Kapitel 10

Abzählende Kombinatorik

Die in diesem Kapitel behandelte abzählende Kombinatorik untersucht endliche Strukturen und beschäftigt sich mit den Möglichkeiten Objekte anzuordnen oder auszuwählen. Die abzählende Kombinatorik hat Wurzeln im 17. Jahrhundert als man begann sich mit der Analyse von Glücksspielen zu beschäftigen. Aus diesen Anfängen entwickelte sich später die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Damit ist die abzählende Kombinatorik, im Gegensatz zur Analysis, der diskreten Mathematik zuzurechnen.
Die abzählende Kombinatorik behandelt viele Fragestellungen des täglichen Lebens. So ist zum Beispiel auch die Frage nach der Wahrscheinlichkeit eines großen Lottogewinns, d.h. die Auswahl 6 richtiger Zahlen aus 49 Zahlen mit den Formeln der Kombinatorik zu bestimmen. Für die Informatik ist die Kombinatorik von großer praktische rund theoretischer Bedeutung. So lassen sich Algorithmen mit kombinatorischen Methoden analysieren, viele Graphprobleme sind auf kombinatorische Problemstellungen abbildbar und die Sicherheit von Passwörter lässt sich mit Hilfe der Kombinatorik abschätzen. Darüber hinaus sind einige Problemstellungen der Analysis, wenn sie in diskreten Mengen untersucht werden, mit Methoden der Kombinatorik berechenbar.

10.1 Grundlagen

Zur Erinnerung:
$|A|$ bezeichnet die Kardinalität (Anzahl der Elemente) der Menge A.

Satz 10.1. *Seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Dann gilt*

a) $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$ *falls* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *für alle* $i \neq j$.

b) $\left|\bigtimes_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$.

Beweis:

ad a) Da die Mengen paarweise disjunkt sind, können in der Vereinigung keine Duplikate wegfallen.

ad b) Vollständige Induktion:

Für $n = 1$ ist die Aussage wahr, da $\left| \bigtimes_{i=1}^{1} A_i \right| = |A_1| = \prod_{i=1}^{1} |A_i|$.

Sei die Aussage wahr für $n > 1$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\left| \bigtimes_{i=1}^{n+1} A_i \right| &= \left| \left(\bigtimes_{i=1}^{n} A_i \right) \times A_{n+1} \right| \\
&= \left| \bigcup_{a \in A_{n+1}} \left\{ (x, a) : x \in \bigtimes_{i=1}^{n} A_i \right\} \right| \\
&\overset{(a)}{=} \sum_{a \in A_{n+1}} \left| \left\{ (x, a) : x \in \bigtimes_{i=1}^{n} A_i \right\} \right| \\
&= \sum_{a \in A_{n+1}} \left| \bigtimes_{i=1}^{n} A_i \right| \\
&= |A_{n+1}| \cdot \left| \bigtimes_{i=1}^{n} A_i \right| \\
&\overset{(*)}{=} |A_{n+1}| \cdot \prod_{i=1}^{n} |A_i| = \prod_{i=1}^{n+1} |A_i|
\end{aligned}
$$

unter Verwendung der Induktionsannahme in Gleichung $(*)$.

□

Man spricht auch von der Summenregel und der Produktregel. Bei der Summenregel ist zu beachten, dass diese natürlich nur gilt, wenn die Mengen paarweise disjunkt sind. Den allgemeinen Fall, bei dem Elemente in mehreren Mengen vorkommen, werden wir später untersuchen.

Beispiel 10.1. *Um von Dortmund nach Duisburg zu fahren, gibt es* 4 *unterschiedliche Regionalzüge, um von Duisburg nach Düsseldorf zu fahren gibt es* 6 *unterschiedliche Regionalzüge, um von Dortmund nach Wuppertal zu fahren gibt es zwei unterschiedliche Regionalzüge und um von Wuppertal nach Düsseldorf zu fahren gibt es ebenfalls* 2 *unterschiedliche Regionalzüge. Wie viele Zugkombinationen gibt es, um von Dortmund nach Düsseldorf über Duisburg oder Wuppertal zu fahren?*
Wir analysieren zuerst die Fahrten über Wuppertal und erhalten $2 \cdot 2 = 4$ *Möglichkeiten. Über Duisburg gibt es* $4 \cdot 6 = 24$ *Möglichkeiten. Da die Routen über Duisburg und Wuppertal disjunkt sind, kann die Summenregel angewendet werden und es gibt insgesamt* 28 *Möglichkeiten.*

10.2 Prinzip des doppelten Abzählens

Wenn man die Elemente einer Menge auf zwei verschiedene Weisen abzählt, dann müssen die Ergebnisse gleich sein. Die Präzisierung dieser Aussage gibt das folgende Resultat.

Satz 10.2 (Prinzip des doppelten Abzählens)**.** *Sei $R \subseteq A \times B$ eine Relation über endliche Mengen A und B. Für $x \in A$ bezeichne $a(x)$ die Anzahl der mit x in Relation stehenden $y \in B$ und $b(y)$ die mit y in Relation stehenden $x \in A$. Dann gilt*

$$\sum_{x \in A} a(x) \;=\; \sum_{y \in B} b(y)\,.$$

Beweis: Sei $I_R(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } (x,y) \in R \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$

die Indikatorfunktion oder charakteristische Funktion der Relation R. Dann gilt per Definition

$$\begin{aligned} a(x) &= \sum_{y \in B} I_R(x,y) \quad \text{für } x \in A \text{ und} \\ b(y) &= \sum_{x \in A} I_R(x,y) \quad \text{für } y \in B\,. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\sum_{x \in A} a(x) \;=\; \underbrace{\sum_{x \in A}\sum_{y \in B} I_R(x,y) \;=\; \sum_{y \in B}\sum_{x \in A} I_R(x,y)}_{=\sum_{(x,y)\in A\times B} I_R(x,y) \,=\, |R|} \;=\; \sum_{y \in B} b(y)\,. \qquad \square$$

Dieses Resultat scheint eine offensichtliche Tatsache zu sein (und ist, wie gesehen, auch leicht zu begründen); es liefert aber oft überraschende Vereinfachungen.

Beispiel 10.2. *In einem sozialen Netzwerk beschreibe der Beliebtheitsgrad $b(p) \in \mathbb{N}_0$ einer Person $p \in P$ im Netzwerk, wieviele Freunde man im Netzwerk hat. Freundschaftsbeziehungen sind symmetrisch. Für jedes soziale Netzwerk dieser Art ist die Summe der Beliebtheitsgrade über aller Personen im Netzwerk eine gerade Zahl. Warum?*

Wir verwenden das Prinzip des doppelten Abzählens.

Sei $F \subseteq P \times P$ die Menge aller Freundschaftsbeziehungen zwischen 2 Personen im Netzwerk und die Indikatorfunktion $I(p,f) = 1$, wenn die Person $p \in P$ an der Freundschaftsbeziehung $f \in F$ beteiligt ist, ansonsten ist $I(p,f) = 0$.

Wir zählen nun auf zwei verschiedene Weisen:

1. Die Summe aller Freundschaftsbeziehungen, an denen p beteiligt ist, ist gerade $b(p)$. Also

$$\sum_{p \in P} \underbrace{\left(\sum_{f \in F} I(p,f) \right)}_{b(p)} \;=\; \sum_{p \in P} b(p)\,.$$

2. Die Summe aller Personen, die an einer Freundschaftsbeziehung $f \in F$ beteiligt sind, ist genau 2. Also

$$\sum_{f \in F} \underbrace{\left(\sum_{p \in P} I(p,f) \right)}_{2} \;=\; 2 \cdot |F|\,.$$

Folglich ist

$$\sum_{p \in P} b(p) \;=\; 2 \cdot |F|$$

und damit die Summe aller Beliebtheitsgrade eine gerade Zahl. □

10.3 Schubfachprinzip

Das nächste Resultat dient der Bereitstellung von nicht-konstruktiven Existenzargumenten. Wir betrachten zunächst eine mathematisch präzise Formulierung, bevor die etwas anschaulichere Darstellung erörtert wird.

Satz 10.3 (Schubfachprinzip; engl. pigeonhole principle)**.** *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen endlichen Mengen X und Y mit $|X| > |Y|$. Dann existiert ein $y \in Y$, so dass für $x_1, x_2 \in X$ $(x_1 \neq x_2)$ $f(x_1) = f(x_2) = y$.*

Beweis Falls die Aussage nicht gelten würde, dann können nur $|Y|$ Element aus X auf Elemente in Y abgebildet werden. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass f eine Abbildung von X nach Y ist.
Wenn man also n Elemente auf k Fächer aufteilt und $n > k$ ist, dann landen zwangsläufig in irgendeinem Fach mindestens 2 Elemente. Wenn also $n = 400$ Studierende im Hörsaal sind, dann haben mindestens 2 von ihnen am selben Tag Geburtstag ($k = 366$). Die Existenz eines solchen Paares von Studierenden ist somit gesichert! Es wird aber nichts darüber ausgesagt, wer diese Personen sind. Zum Beweis wird also keine Lösung konstruiert.

Beispiel 10.3.

a) In einer Umzugskiste sind 10 nicht unterscheidbare weiße Socken und 10 nicht unterscheidbare schwarze Socken. Wie oft muss ich höchstens in der Dunkelheit Socken aus der Kiste ziehen, um sicher zu gehen, dass ich ein gleichfarbiges Paar habe?

Die Anzahl der Fächer ist $k = 2$ (weiße Socken, schwarze Socken). Nach Satz 10.3 muss $n > k$ sein, so dass $n = k + 1 = 3$ Züge reichen.

b) Gegeben sei ein Kartenspiel (z.B. für Skat) mit 32 Karten. Wie oft muss ich höchstens vom Stapel ziehen, um sicher zwei Karten mit der gleichen Spielfarbe in der Hand zu haben?

Die Anzahl der Fächer ist $k = 4$, nämlich die Anzahl der Spielfarben (Kreuz, Pik, Herz, Karo). Nach Satz 10.3 muss $n > k$ sein, so dass $n = k + 1 = 5$ Züge reichen.

c) Wieviele Personen müssen im Hörsaal sein, dass sicher 3 von ihnen am selben Tag Geburtstag haben?

Dies erfordert eine leichte Verallgemeinerung von Satz 10.3. Wir haben $k = 366$ Fächer. Wir können maximal $2\,k$ viele Personen in die Fächer „legen“, ohne dass in einem Fach 3 Personen sind (in jedem Fach sind 2 Personen). Kommt noch eine Person hinzu, dann sind sicher in einem Fach 3 Personen. Also muss hier $n > 2\,k$ gelten, so dass $n = 2\,k + 1 = 733$ Personen ausreichen. Im vollen Audimax trifft diese Situation also zu.

Eine Verallgemeinerung von Satz 10.3 lautet also:
Verteilt man n Elemente auf k Fächer ($n, k > 0$), so gibt es ein Fach, das mindestens $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ Elemente enthält.

10.4 Auswahl von k aus n Elementen

Definition 10.4. *Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$ ($n \geq k$) wird der Ausdruck*

$$\binom{n}{k} := \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (\textit{sprich: „}n \textit{ über } k\textit{“})$$

als Binomialkoeffizient *bezeichnet. Für $k = 0$ wird*

$$\binom{n}{0} := 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ festgelegt und für $n < k$ sei $\binom{n}{k} = 0$. □

Eigenschaften:

a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für $n \geq k \geq 0$.

Die Berechnung von Binomialkoeffizienten führt für größere Werte von n und k zu Überläufen in der Zahlendarstellung, wenn die Fakultäten einfach naiv berechnet werden. Aus diesem Grund gibt es verschiedene Rekursionsbeziehungen, die eine sichere Berechnung ermöglichen.

Satz 10.5 (Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten)**.** *Es gilt*

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

für $k, n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: mit Fallunterscheidung (keine Induktion).
1. Fall: Sei $k = 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die Formel korrekt:

$$\binom{n+1}{1} = \frac{n+1}{1} \stackrel{!}{=} \binom{n}{1} + \binom{n}{0} = \frac{n}{1} + 1\,.$$

2. Fall: Sei $k > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-(k+1))!} \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!\,(n-k)}{(k+1)\cdot k!\,(n-k)\cdot(n-(k+1))!} \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot\frac{n-k}{k+1} \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot\left(1+\frac{n-k}{k+1}\right) \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot\frac{n+1}{k+1} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

□

Die Illustration dieser Rekursionsformel erfolgt am sogenannten Pascalschen Dreieck:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & \binom{1}{0} & & & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & & & \searrow & & \swarrow & & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & & \binom{2}{1} & & & \binom{2}{2} & & \\
 & & & \searrow & \swarrow & & \searrow & \swarrow & & & \\
\binom{3}{0} & & & \binom{3}{1} & & & & \binom{3}{2} & & & \binom{3}{3} \\
 & \searrow & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & \swarrow &
\end{array}$$

Die folgenden weiteren Rekursionsbeziehungen lassen sich aus der Definition des Binomialkoeffizineten herleiten.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k+1} &= \tfrac{n-k}{k+1}\binom{n}{k} \\
\binom{n+1}{k} &= \tfrac{n+1}{n-k+21}\binom{n}{k} \\
\binom{k+1}{n+1} &= \tfrac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Der binomische Lehrsatz ist Namensgeber für die Binomialkoeffizienten:

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\quad (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$.

Durch geschickte Wahl von a und b ergeben sich leicht folgende Identitäten:

- Es gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ für $a = b = 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$.
- Es gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$ für $a = -1$, $b = 1$ und $n \in \mathbb{N}$.

Satz 10.6. *Die Anzahl der Möglichkeiten für die Auswahl von k Elementen aus einer n-elementigen Menge ist*

$$\binom{n}{k}$$

für $k, n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: Bezeichne $a(n,k)$ die Anzahl von k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge. Unser Ziel ist die Bestimmung von $a(n,k)$. Erneut benötigen wir eine Fallunterscheidung:

Fall 1: Sei $|M| = n+1$ und $A \subseteq M$ mit $|A| = k+1$ für $k, n \geq 1$.

Gesucht ist nun eine Formel für $a(n+1, k+1)$.

Wähle dazu ein beliebiges $x \in M$. Entweder ist $x \notin A$ oder $x \in A$.

Gilt $x \notin A$, dann ist A eine $(k+1)$-elementige Teilmenge der n-elementigen Menge $M \setminus \{x\}$. Davon gibt es $a(n, k+1)$ Stück.

Gilt $x \in A$, so konstruieren wir alle diese Teilmengen und zählen sie dann ab. Dazu platzieren wir zuerst x in die leere Menge. Anschließend müssen noch k weitere Elemente aus $M \setminus \{x\}$ platziert werden. Das sind gerade alle k-elementigen Teilmengen aus $M \setminus \{x\}$. Davon gibt es $a(n,k)$ Stück.

Insgesamt gibt es also $a(n, k+1) + a(n,k)$ Stück. Damit haben wir eine Rekursionsformel gefunden:

$$a(n+1, k+1) \; = \; a(n,k) + a(n, k+1) \; .$$

Fall 2: Sei $n = 0$ und $k > 0$. Es gibt keine nichtleeren Teilmengen der leeren Menge. Also ist $a(0,k) = 0$.

Fall 3: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $k = 0$. Es gibt nur eine leere Menge, die man ziehen könnte. Also ist $a(n,0) = 1$.

Damit sind alle Fälle untersucht und wir stellen fest, dass sowohl die Rekursionsformel aus Fall 1 als auch die Anfangsbedingungen in den beiden anderen Fällen genau mit denen des Binomialkoeffizienten (Satz 10.5) übereinstimmen. Folglich müssen die so erzeugten Werte gleich sein, so dass

$$a(n,k) = \binom{n}{k}$$

gilt.

□

Die Auswahl von k aus n Elementen nennt man auch eine Kombination ode rungeordnete Auswahl.

Beispiel 10.4.

a) Lotto 6 aus 49 (ohne Superzahl): $\binom{49}{6}$ *Möglichkeiten.*

b) Lotto 6 aus 49 (mit Superzahl): $\binom{49}{6} \cdot \binom{10}{1}$ *Möglichkeiten.*

c) Eurojackpot: $\binom{50}{5} \cdot \binom{8}{2}$ *Möglichkeiten.*

Satz 10.7. *Die Anzahl der Möglichkeiten für die Auswahl von k Elementen einer n-elementigen Menge für $k, n \in \mathbb{N}_0$ ist:*

	Anordnung im k-Tupel	*keine Anordnung*
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Zurücklegen	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Beweis: Zunächst sollen die gezogenen Elemente von links nach rechts in einem k-Tupel abgelegt werden.

Wenn die Elemente nach jedem Zug wieder in die Menge zurückgelegt werden können, dann hat man

$$\left.\begin{array}{ll} \text{bei der 1. Komponente} & : n \text{ Möglichkeiten} \\ \text{bei der 2. Komponente} & : n \text{ Möglichkeiten} \\ \vdots & \qquad \vdots \\ \text{bei der } k\text{. Komponente} & : n \text{ Möglichkeiten} \end{array}\right\} \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ mal}} = n^k$$

Wenn die Elemente nach jedem Zug nicht wieder in die Menge zurückgelegt werden können, dann hat man

$$\left.\begin{array}{ll} \text{bei der 1. Komponente} & : n \text{ Möglichkeiten} \\ \text{bei der 2. Komponente} & : n-1 \text{ Möglichkeiten} \\ \vdots & \qquad \vdots \\ \text{bei der } k\text{. Komponente} & : n-(k-1) \text{ Möglichkeiten} \end{array}\right\} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ab jetzt soll die Reihenfolge der gezogenen Elemente keine Rolle mehr spielen.

Wenn die Elemente nach jedem Zug nicht wieder in die Menge zurückgelegt werden können, dann hat man die gleiche Situation wie bei der Auswahl einer k-elementigen Menge aus einer n-elementigen Menge in Satz 10.6, also

$$\binom{n}{k} \quad \text{Möglichkeiten.}$$

Wenn die Elemente nach jedem Zug wieder in die Menge zurückgelegt werden können, dann erhalten wir die Anzahl der Möglichkeiten durch folgende Überlegung: Gegeben seien n Urnen $U_1, \ldots, U_n$, wobei in Urne U_i mindestens k Kugeln mit Nummer i (und nur solche) für $i = 1, \ldots, n$ sind. Eine k-elementige Menge ziehen wir, indem wir bei Urne U_1 starten und für jede Urne i entscheiden, ob wir entweder eine Kugel ziehen (Z) oder zur nächsten Urne weitergehen (W). Man kann also aus einer Urne mehrfach ziehen, bevor man weitergeht. Insgesamt darf aber nur

k mal gezogen werden und wir müssen $n-1$ mal weitergehen, um aus jeder Urne möglicherweise ziehen zu können. Offensichtlich beschreibt eine Sequenz mit k mal Z und $n-1$ mal W eindeutig eine mögliche Auswahl von k Elementen aus einer n-elementigen Menge und jede Auswahl ist auch derart zu realisieren.
Insgesamt hat die Sequenz $k+n-1$ viele Einträge mit Z oder W und jede Sequenz beschreibt eine mögliche Auswahl. Wieviele verschiedene Sequenzen sind möglich? Also: Auf wieviele Möglichkeiten kann ich k Einträge von Typ Z in der Sequenz anordnen? Das sind gerade

$$\binom{n+k-1}{k} \quad \text{Möglichkeiten.}$$

Man könnte auch fragen, auf wieviele verschiedenen Möglichkeiten man die $n-1$ Einträge vom Typ W anordnen kann. Das sind gerade

$$\binom{n+k-1}{n-1} \quad \text{Möglichkeiten.}$$

Beide Ausdrücke müssen gleich sein wie wir sofort aus dem Prinzip des doppelten Abzählens folgern können. Alternativ liefert das Einsetzen in die „Fakultätsformel“ für den Binomialkoeffizienten die Gültigkeit der Identität. □

10.5 Prinzip der Inklusion / Exklusion

Gegeben seien die endlichen Mengen A, B und C. Wir wollen wissen, wieviele Elemente in der Vereinigung dieser Mengen liegen, wenn sie nicht wie in Satz 10.1 a) als disjunkt vorausgesetzt werden.

Satz 10.8. *Seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Dann gilt*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \cdot \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|\,.$$

Beweis: Laut Behauptung gilt

$$\begin{array}{lll}
& \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| & \\
= & |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| & \text{Ebene } 1 \\
- & (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots + |A_1 \cap A_n| + \ldots |A_{n-1} \cap A_n|) & \text{Ebene } 2 \\
+ & (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|) & \text{Ebene } 3 \\
\vdots & & \\
\pm & |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| & \text{Ebene } n
\end{array}$$

Die Formel ist richtig, wenn jedes Element in der Vereinigungsmenge exakt ein Mal gezählt wird. Sei ein Element in k der Mengen $A_1, \ldots, A_n$ enthalten ($1 \le k \le n$). Wie oft wird das Element gezählt?