Kapitel 8

Integralrechnung

Neben der Differentiation ist die Integration die zentrale Anwendung des Grenzwertbegriffs in der Analysis. Wir werden zuerst einen intuitiven und geometrischen Zugang zur Integralrechnung wählen, bevor wir Differenzieren und Integrieren in Beziehung setzen. Der historische Zugang zur Integralrechnung fußt auf der praktischen Notwendigkeit, bei der Landvermessung Inhalte von Flächen berechnen zu können (Babylonier). Inhalte geradlinig begrenzter Flächen wie Dreiecke, Rechtecke oder Trapeze waren bekannt. Also versuchte man krummlinig begrenzte Flächen durch Unterteilung der Fläche in geradlinig begrenzte Flächen zu approximieren. Ein Beispiel findet man in Abbildung 8.1. Auch hier taucht wieder der Begriff der Approximation auf, der durch eine immer weitergehende Verfeinerung (Grenzwertbetrachtung) schließlich zum *exakten* Ergebnis führt.

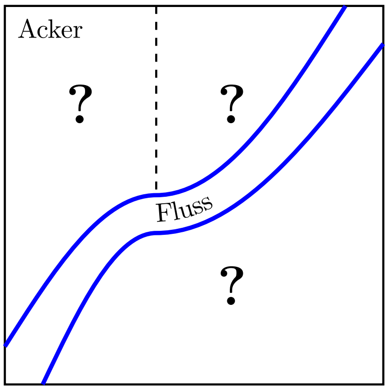


Abbildung 8.1: Fläche eines Ackers

Der griechische Mathematiker Archimedes (gest. 212 vor Chr.) führte den Ansatz ein, dem auch wir hier prinzipiell folgen werden:
Gegeben sei zum Beispiel eine Funktion f mit $f(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$. Gesucht ist die Fläche zwischen Abzisse (x-Achse) und dem Graph der Funktion.

Ansatz: Approximiere mit Rechtecken unterhalb des Graphen und den Graphen einschließenden Rechtecken!

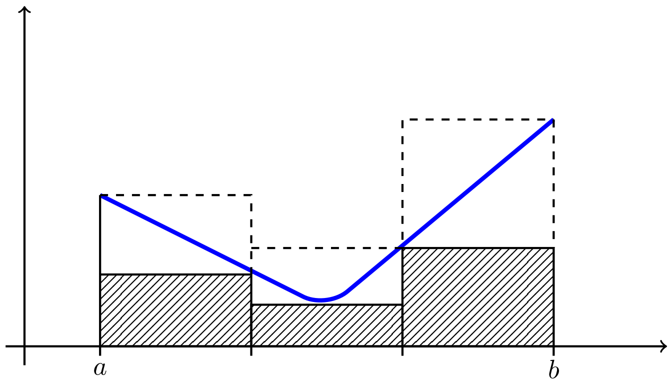


Abbildung 8.2: Approximation der Fläche unterhalb einer Funktion unter der x-Achse durch Rechtecke

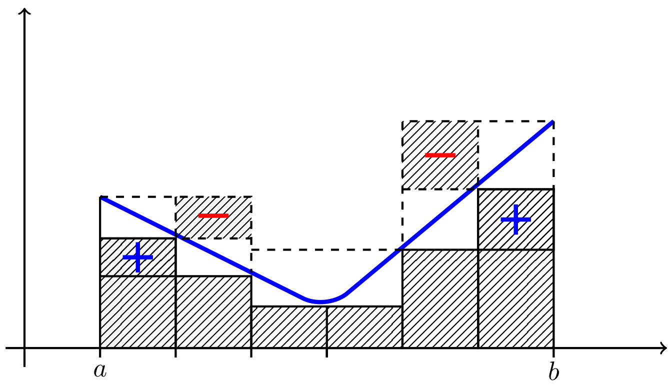


Abbildung 8.3: Eine feinere Unterteilung der Funktion aus Abb. 8.2

1. Beobachtung: Die Summe der unteren Rechteckflächen ist kleiner als der gesamte Flächeninhalt, während die Summe der „oberen" Rechteckflächen zu groß ist. Wie kann man die Näherung genauer machen?

Idee: Feinere Unterteilung!

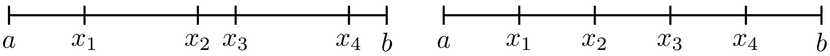
2. Beobachtung: Durch hinzufügen neuer Punkte wird die Summe unterer Rechtecke größer und die der oberen kleiner!

Spekulation/Idee: Mache die Abstände immer kleiner, dann wird die Approximation durch untere und obere Rechtecksummen immer besser – und durch infinitesimal kleine Abstände (Grenzübergang) können die Approximationen exakt werden.

Diese Idee wollen wir nun präzisieren und formalisieren.

8.1 Das bestimmte Riemann-Integral

Definition 8.1. *Gegeben seien ein Intervall* $[a, b] \in \mathbb{R}$ *und eine endliche Anzahl von Punkten* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *mit* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$*. Dann heißt* $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ *eine* Zerlegung *von* $[a, b]$ *und* $|Z| := \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \ldots, n\}$ *das* Feinheitsmaß *der Zerlegung* Z*. Eine Zerlegung heißt* äquidistant*, wenn die Intervalle* $[x_{i-1}, x_i]$ *für* $i = 1, \ldots, n$ *alle gleich groß sind.*



(a) nicht äquidistante Zerlegung (b) äquidistante Zerlegung

Abbildung 8.4: Zerlegungen

In der folgenden Definition definieren wir die Flächeninhalte der Rechtecke unter- und oberhalb einer Funktion, wie in Abbildung 8.2 gezeigt.

Definition 8.2. *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *beschränkt* $(\forall x \in [a, b]. |f(x)| \leq K < \infty)$ *und* Z *eine Zerlegung auf* $[a, b]$*. Wir nennen*

$$\begin{aligned} s(Z) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \textit{die } \textsf{Untersumme} \textit{ und} \\ S(Z) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \textit{die } \textsf{Obersumme} \end{aligned}$$

von f *bezüglich der Zerlegung* Z*.*

Im Folgenden werden wir einige Eigenschaften von Zerlegungen kennen lernen, die uns schließlich zur Definition des so geannten Riemann-Integrals führen.

Definition 8.3. *Eine Zerlegung* $\tilde{Z}$ *wird eine* Verfeinerung *von Zerlegung* Z *genannt (in Zeichen:* $Z \leq \tilde{Z}$*) wenn* $\tilde{Z}$ *alle Punkte von* Z *enthält. Eine Zerlegung* $\hat{Z}$*, die genau die Punkte von* Z *und* $\tilde{Z}$ *enthält, soll* Überlagerung *von* Z *und* $\tilde{Z}$ *heißen und mit* $\hat{Z} = Z + \tilde{Z}$ *bezeichnet werden.*

Folgendes Lemma benötigen wir für den Beweis des darauf folgenden zentralen Satz.

Lemma 8.4. *Sei* $f(x)$ *auf* $[a, b]$ *beschränkt mit* $|f(x)| \leq K$ *und* Z *eine Zerlegung von* $[a, b]$*. Die Zerlegung* $\tilde{Z}$ *entstehe aus* Z *durch Hinzunahme eines zusätzlichen Punktes. Dann gilt:*

a) $s(Z) \leq s(\tilde{Z}) \leq s(Z) + 2K|Z|$

b) $S(Z) \geq S(\tilde{Z}) \geq S(Z) - 2K|Z|$

Beweis: Sei $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ und $\tilde{x} \in (x_{k-1}, x_k)$ für ein beliebiges $k = 1, \ldots, n$.
Also: $\tilde{Z} = (x_0, \ldots, x_{k-1}, \tilde{x}, x_k, \ldots, x_n)$.
ad a) $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$
$\tilde{m}_1 = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, \tilde{x}]\} \geq m_k$

$\tilde{m}_2 = \inf\{f(x) : x \in [\tilde{x}, x_k]\} \geq m_k$

$$\begin{aligned}
s(\tilde{Z}) &= s(Z) - (x_k - x_{k-1})m_k + (\tilde{x} - x_{k-1})\tilde{m}_1 + (x_k - \tilde{x})\tilde{m}_2 \\
\Leftrightarrow s(\tilde{Z}) - s(Z) &= (\tilde{x} - x_{k-1})\tilde{m}_1 + (x_k - \tilde{x})\tilde{m}_2 - (x_k - x_{k-1})m_k \\
&= \tilde{x}\tilde{m}_1 - x_{k-1}\tilde{m}_1 + x_k\tilde{m}_2 - \tilde{x}\tilde{m}_2 - x_k m_k \\
&\quad + x_{k-1}m_k + \underbrace{\tilde{x}m_k - \tilde{x}m_k}_{\text{Trick!}} \\
&= \underbrace{(\tilde{x} - x_{k-1})}_{\geq 0}\overbrace{\underbrace{(\tilde{m}_1 - m_k)}_{\geq 0}}^{\leq 2K} + \underbrace{(x_k - \tilde{x})}_{\geq 0}\overbrace{\underbrace{(\tilde{m}_2 - m_k)}_{\geq 0}}^{\leq 2K} \\
&\begin{cases} \geq \; 0 \\ \leq \; (\tilde{x} - x_{k-1}) \cdot 2K + (x_k - \tilde{x}) \cdot 2K \\ \quad = \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\leq |Z|} \cdot 2K \leq 2K \cdot |Z| \end{cases}
\end{aligned}$$

ad b) analog. □

Der folgende Satz zeigt, dass unabhängig von der gewählten Zerlegung, eine Untersumme immer kleiner als eine Obersumme ist. Für eine feste Zerlegung gilt dies natürlich, wie man direkt aus der Definition ableiten kann.

Satz 8.5. *Jede Untersumme ist kleiner oder gleich jeder Obersumme.*

Beweis: Seien Z und $\tilde{Z}$ zwei beliebige Zerlegungen. Dann gilt

$$s(Z) \underset{8.4}{\overset{\text{Lem.}}{\leq}} s(Z + \tilde{Z}) \underset{8.2}{\overset{\text{Def.}}{\leq}} S(Z + \tilde{Z}) \underset{8.4}{\overset{\text{Lem.}}{\leq}} S(\tilde{Z})$$ □

Nach diesen Vorbemerkungen können wir nun formal das so genannte Riemann-Integral definieren.

Definition 8.6. *Die Funktion $f(x)$ sei auf $[a, b]$ beschränkt. Man nennt*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{s(Z) : Z \textit{ ist eine Zerlegung von } [a, b]\}$$

das untere (Riemann-)Integral *und*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\{S(Z) : Z \textit{ ist eine Zerlegung von } [a, b]\}$$

das obere (Riemann-)Integral.

Sind unteres und oberes Riemann-Integral gleich, dann heißt $f(x)$ über $[a, b]$ (Riemann-)integrierbar *und*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \sup_{Z \textit{ ist Zerlegung von } [a,b]} s(Z) = \inf_{Z \textit{ ist Zerlegung von } [a,b]} S(Z)$$

heißt das (Riemann-)Integral *von f über $[a, b]$.*

Man nennt a (bzw. b) die untere *(bzw.* obere*)* Integrationsgrenze *und x die* Integrationsvariable.

Anmerkung: Um auszudrücken, dass f Riemann-integrierbar über $[a,b]$ ist, schreiben wir auch $f \in R[a,b]$.

Satz 8.7. *Es gilt* $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ *bzw.* $\sup\limits_Z s(Z) \leq \inf\limits_Z S(Z)$.

Beweis: Für zwei beliebige Zerlegungen Z und $\tilde{Z}$ gilt nach Satz 8.5 stets $s(Z) \leq S(\tilde{Z})$. Also gilt für ein beliebig fixiertes $\tilde{Z}$ auch $\sup\limits_Z s(Z) \leq S(\tilde{Z})$. Da $\tilde{Z}$ beliebig, kann es derart gewählt werden, dass $S(\tilde{Z}) = \inf\limits_Z S(Z)$. Folglich $\sup\limits_Z s(Z) \leq \inf\limits_Z S(Z)$. □

Aus der bisherigen Herletung ergibt sich, dass jede Untersumme eine untere Schranke für das Integral ist und jede Obersumme eine obere Schranke. Damit haben wir im Prinzip ein numerisches Berechnungsverfahren hergeleitet. Das folgende Resultat wird uns die Bestimmung von unterem und oberem Riemann-Integral spürbar erleichtern, da nicht mehr zwingend Supremum und Infimum der Summen über alle möglichen Zerlegungen gefunden werden müssen. Vielmehr reicht es dann, den Grenzwert irgendeiner Zerlegungsnullfolge für Unter- und Obersumme zu berechnen.

Satz 8.8. *Sei f auf $[a,b]$ beschränkt und Z_n eine Folge von Zerlegungen mit $|Z_n| \to 0$ für $n \to \infty$. Dann gilt*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} s(Z_n) = \sup\limits_Z s(Z)$ *und*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} S(Z_n) = \inf\limits_Z S(Z)$

Beweis:
ad a) Sei $\tilde{Z}$ eine beliebige Zerlegung mit p inneren Teilpunkten. Wegen Lemma 8.4 gilt dann $s(Z_n) \leq s(Z_n + \tilde{Z}) \leq s(Z_n) + 2pK|Z_n|$.
Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} s(Z_n) = \alpha$ existiert, dann $\underbrace{s(Z_n)}_{\to\alpha} + \underbrace{2pK|Z_n|}_{\to 0} \to \alpha$ und schließlich $s(Z_n + \tilde{Z}) \to \alpha$ für $n \to \infty$. Da aber auch $s(\tilde{Z}) \leq \underbrace{s(Z_n + \tilde{Z})}_{\to\alpha} \leq \sup\limits_Z s(Z)$ gilt, folgt $s(\tilde{Z}) \leq \alpha \leq \sup\limits_Z s(Z)$.
Weil $\tilde{Z}$ beliebig, kann $\tilde{Z}$ auch so gewählt werden, dass $s(\tilde{Z}) = \sup\limits_Z s(Z)$. Also muss $\alpha = \sup\limits_Z s(Z)$ gelten.
ad b) Analog. □

Beispiel 8.1. *Notation:* $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_1]\}$ *und*
$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ *mit* $i = (1, 2, ...n)$.

1. $f(x) = c = const.$ *für alle* $x \in [a,b]$. *Offensichtlich ist* $m_i = M_i = c$ *für alle* $i = 1, 2, \ldots, n$ *und deshalb* $s(Z) = S(Z) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot c \underset{Teleskopsumme}{=} c \cdot (x_n - x_0) = c(b-a)$ *für jede beliebige Zerlegung* Z *von* $[a,b]$.

2. $f(x) = x$ *auf* $[0,a]$. *Wähle äquidistante Zerlegung* $Z_n : x_i = i \cdot \frac{a}{n}$ *für alle* $i = 1, 2, ...n$.

$$\begin{array}{rcl} m_i & = & \inf\{\underbrace{f(x)}_{=x} : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = x_{i-1} = (i-1)\frac{a}{n} \\ M_i & = & \sup\{x : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = x_i = i \cdot \frac{a}{n} \\ \Rightarrow s(Z_n) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{a/n} \cdot m_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a}{n} \cdot (i-1) \cdot \frac{a}{n} = \frac{a^2}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (i-1) \\ & = & \frac{a^2}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n-1} i = \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{a^2}{2}(1 - \frac{1}{n}) \\ S(Z_n) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{a/n} \cdot M_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a}{n} \cdot i \cdot \frac{a}{n} = \frac{a^2}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ & = & \frac{a^2}{2}(1 + \frac{1}{n}) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \sup\limits_n s(Z_n) & = & \sup\limits_n \frac{a^2}{2}(1 - \frac{1}{n}) = \frac{a^2}{2} \\ \inf\limits_n S(Z_n) & = & \inf\limits_n \frac{a^2}{2}(1 + \frac{1}{n}) = \frac{a^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f \in R[0, a]$$

$$\longrightarrow \int_0^a x \,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}$$

3. *$f(x) = e^x$ in $[0, a]$. Wähle wieder äquidistante Zerlegung $Z_n : x_i = i\frac{a}{n}$ für $i = 1, 2, ...n$. Wegen Monotonie:*

$$\begin{array}{rcccccccl} m_i & = & e^{x_{i-1}} & = & e^{(i-1)\frac{a}{n}} & = & (e^{\frac{a}{n}})^{i-1} & =: & q^{i-1} \textit{ mit } q := e^{\frac{a}{n}} \\ M_i & = & e^{x_i} & = & e^{i \cdot \frac{a}{n}} & = & (e^{\frac{a}{n}})^i & = & q^i \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} s(Z_n) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a}{n} \cdot q^{i-1} = \frac{a}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} q^{i-1} = \frac{a}{n} \sum\limits_{i=1}^{n-1} q^i \\ & = & \frac{a}{n} \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{n} \cdot \frac{1-(e^{\frac{a}{n}})^n}{1-e^{\frac{a}{n}}} = (e^a - 1)\frac{\frac{a}{n}}{e^{\frac{a}{n}}-1} \\ S(Z_n) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot M_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a}{n} \cdot q^i = \frac{a}{n} \cdot q \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} q^{i-1} \\ & = & \frac{a}{n} q \sum\limits_{i=1}^{n-1} q^i = \frac{a}{n} \cdot q \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{n} \cdot e^{\frac{a}{n}} \cdot \frac{1-(e^{\frac{a}{n}})^n}{1-e^{\frac{a}{n}}} \\ & = & (e^a - 1) \cdot e^{\frac{a}{n}} \cdot \frac{\frac{a}{n}}{e^{\frac{a}{n}}-1} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sup_n s(Z_n) &= (e^a - 1) \cdot \sup_n \frac{\frac{a}{n}}{e^{\frac{a}{n}} - 1} \\ &\overset{S.\ 8.8}{=} (e^a - 1) \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a}{n}}{e^{\frac{a}{n}} - 1} \qquad (h := \frac{a}{n}) \\ &= (e^a - 1) \lim_{h\to 0} \frac{h}{e^h - 1} \qquad \textit{(l'Hospital)} \\ &= (e^a - 1) \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{1}{e^h}}_{=1} = e^a - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\inf_n S(Z_n) &= (e^a-1)\lim_{n\to\infty} e^{\frac{a}{n}}\cdot\frac{\frac{a}{n}}{e^{\frac{a}{n}}-1} && \textit{(s. o.)}\\ &= (e^a-1)\underbrace{\left[\lim_{n\to\infty} e^{\frac{a}{n}}\right]}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{n}}{e^{\frac{a}{n}}-1}}_{=1\ (s.o.)} = e^a-1\end{aligned}$$

Also ist e^x *auf* $[0,a]$ *Riemann-integrierbar und es ist* $\int\limits_0^a e^x\,\mathrm{d}x = e^a-1$.

4. $f(x)=\begin{cases}0 & \textit{für rationale } x\in[0,1]\\ 1 & \textit{für irrationale } x\in[0,1]\end{cases}$ *(Dirichlet – Funktion)*

Offensichtlich ist $m_i=0$ *und* $M_i=1$ *für* $i=1,\dots,n$ *und deshalb*

$s(Z_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\cdot\underbrace{m_i}_{=0}=0$ *für jede Zerlegung* Z_n

$s(Z_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\cdot\underbrace{M_i}_{=1}=\underbrace{x_n}_{=1}-\underbrace{x_0}_{=0}=1$ *für jede Zerlegung* Z_n

$\Rightarrow f\notin R[0,1]$.

Beobachtung: Anscheinend sind nicht alle Funktionen Riemann-integrierbar! Können wir die Riemann-integrierbaren Funktionen charakterisieren?

Satz 8.9 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)**.** *Sei* $f(x)$ *auf* $[a,b]$ *beschränkt.*

$$f\in R[a,b]\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0.\exists Z(\varepsilon).S(Z)-s(Z)<\varepsilon$$

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei $f\in R[a,b]$. Dann gilt $\sup\limits_Z s(Z)=\inf\limits_Z S(Z)$. Wähle $\varepsilon>0$ beliebig. Man kann eine Zerlegung $\tilde Z$ wählen, so dass $0\le\sup\limits_Z s(Z)-s(\tilde Z)\le\frac{\varepsilon}{2}$. Ebenso kann man eine Zerlegung $\hat Z$ wählen, so dass $0\le S(\hat Z)-\inf\limits_Z S(Z)\le\frac{\varepsilon}{2}$. Sei nun $Z=\tilde Z+\hat Z$. Dann gilt:

$$\left.\begin{aligned}&0\le\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-s(Z)<\tfrac{\varepsilon}{2}\\ &0\le S(Z)-\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x<\tfrac{\varepsilon}{2}\end{aligned}\right\}+$$

$$\Rightarrow\quad 0\le S(Z)-s(Z)<\varepsilon \text{ für Zerlegung } Z=\tilde Z+\hat Z$$

"$\Leftarrow$" $\forall\varepsilon>0.\exists Z_\varepsilon.S(Z_\varepsilon)-s(Z_\varepsilon)<\varepsilon$ bzw. $S(Z_\varepsilon)<s(Z_\varepsilon)+\varepsilon$.

Also $s(Z_\varepsilon)\le\sup\limits_Z s(Z)\underset{\text{Satz 8.7}}{\le}\inf\limits_Z S(Z)\le S(Z_\varepsilon)\underset{\text{n. V.}}{<}s(Z_\varepsilon)+\varepsilon\quad\Big|-\sup\limits_Z s(Z)$

so dass $0\le\inf\limits_Z S(Z)-\sup\limits_Z s(Z)<\underbrace{s(Z_\varepsilon)-\sup\limits_Z s(Z)}_{\le 0}+\varepsilon\le\varepsilon$ für alle $\varepsilon>0$.

Mit $\varepsilon\to0$ folgt also $\inf\limits_Z S(Z)=\sup\limits_Z s(Z)$ und $f\in R[a,b]$. □

Damit bleibt natürlich die Frage nach einer einfachen Charakterisierung Riemann-integrierbarer Funktionen. Der folgende Satz gibt darauf eine Antwort.

Satz 8.10.

a) *f stetig auf $[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$.*

b) *f auf $[a, b]$ monoton $\Rightarrow f \in R[a, b]$.*

Beweis:

a) Nach Satz 4.26 ist $f(x)$ sogar gleichmäßig stetig auf $[a, b]$.
Also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(\tilde{x})| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ für alle $x, \tilde{x} \in [a, b]$ mit $|x - \tilde{x}| < \delta$.
Für ein beliebiges $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ mit $|Z| < \delta$ ist $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$ und

$$\begin{aligned} S(Z) - s(Z) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(M_i - m_i) \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})}_{=x_n - x_0 = b-a} \quad = \varepsilon. \end{aligned}$$

Laut Satz 8.9 ist damit $f \in R[a, b]$.

b) Wähle eine äquidistante Zerlegung Z_n mit $x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i$ für $i = 0, 1, \ldots, n$.
Falls $f(x)$ monoton wachsend, dann $m_i = f(x_{i-1})$ und $M_i = f(x_i)$, sonst $M_i = f(x_{i-1})$ und $m_i = f(x_i)$. Folglich ist

$$\begin{aligned} S(Z_n) - s(Z_n) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(\underbrace{x_i - x_{i-1}}_{\frac{b-a}{n}}) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &= \frac{b-a}{n} |f(b) - f(a)| \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty \end{aligned}$$

Also $\inf\limits_n S(Z_n) = \sup\limits_n s(Z_n)$ und $f \in R[a, b]$. □

Dieser Satz sichert uns Riemann-Integrierbarkeit für eine große Klasse von Funktionen zu. Wenn also die Integrierbarkeit von f auf $[a, b]$ gesichert ist, dann reicht es nur den Grenzwert der Unter- oder Obersumme zu bestimmen. Nachteilig bei dem Vorgehen bleibt jedoch der Umstand, dass Minima oder Maxima in den Teilintervallen berechnet werden müssen. Dieser Mühe wollen wir uns nun entledigen.

Definition 8.11. *Sei f auf $[a, b]$ beschränkt, $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $\tilde{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ für $i = 1, \ldots, n$. Man nennt*

$$\sigma(Z, \tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\tilde{x}_i)$$

die (Riemannsche) Zwischensumme *von f auf $[a, b]$ und $\tilde{x}_1, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$* (Riemannsche) Zwischenpunkte*.*

Wegen $m_k \leq f(\tilde{x}_k) \leq M_k$ folgt aus der Definition sofort für alle Z

$$s(Z) \leq \sigma(Z, \tilde{x}) \leq S(Z)\ .$$

Tatsächlich kann man durch geschickte Wahl von Zwischenpunkten $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ den Unter- und Obersummen beliebig nahe kommen:

Lemma 8.12. *Sei $f(x)$ auf $[a,b]$ beschränkt. Für jede Zerlegung Z von $[a,b]$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es Zwischenpunkte $\tilde{x}$ und $\hat{x}$ mit*

a) $s(Z) \leq \sigma(Z, \tilde{x}) \leq s(Z) + \varepsilon$ *und*

b) $S(Z) - \varepsilon \leq \sigma(Z, \hat{x}) \leq S(Z)$

Beweis: Sei Z Zerlegung $(x_0, \ldots, x_n)$ von $[a,b]$ und $\varepsilon > 0$ gegeben.

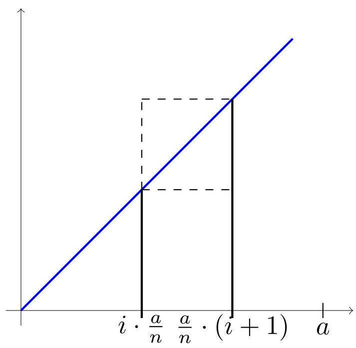
a) Für jedes $k = 1, \ldots, n$ kann man $\tilde{x} \in [x_{k-1}, x_k]$ derart wählen, dass $m_k \leq f(\tilde{x}_k) < m_k + \frac{\varepsilon}{b-a}$ gilt. (je kleiner ε, desto näher schiebe $\tilde{x}_k$ an Minimalstelle im Intervall). Mit diesem Satz von Zwischenpunkten ist dann

$$\begin{aligned}
s(Z) \underset{\text{per Def.}}{\leq} \sigma(Z, \tilde{x}) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\tilde{x}_i) \\
&\leq \textstyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \left(m_k + \frac{\varepsilon}{b-a}\right) \\
&= s(Z) + \tfrac{\varepsilon}{b-a} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})}_{= x_n - x_0 = b-a} \\
&= s(Z) + \varepsilon
\end{aligned}$$

b) Analog für Obersummen.

□

Wenn also die Zerlegungen immer feiner werden, so dass $|Z_n| \to 0$ für $n \to \infty$, dann rücken auch die Positionen von $\tilde{x}_k$ und $\hat{x}_k$ immer näher zusammen.



Satz 8.13. *Sei f auf $[a,b]$ beschränkt, Z_n eine Folge von Zerlegungen mit $|Z_n| \to 0$ für $n \to \infty$ mit passenden Zwischenpunkten $\tilde{x}^{(n)}$. Es gilt*

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \textit{ Jede Riemannsche Zwischensumme konvergiert}\,.$$

In diesem Fall sind alle Grenzwerte gleich und sie haben den Wert

$$\lim_{n\to\infty} \sigma\left(Z_n, \tilde{x}^{(n)}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =: I$$

Beweis:

$\Rightarrow$ Sei $\sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)})$ eine beliebige Folge von Zwischensummen mit $|Z_n| \to 0$. Ist f integrierbar, so konvergieren sowohl $s(Z_n)$ als auch $S(Z_n)$ gegen I (Definition 8.6). Wegen $\underbrace{s(Z_n)}_{\to I} \leq \sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)}) \leq \underbrace{S(Z_n)}_{\to I}$ folgt sofort $\sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)}) \to I$ für $n \to \infty$ (Sandwich-Theorem).

$\Leftarrow$ Sei Z_n eine Folge von Zerlegungen mit $|Z_n| \to 0$ für $n \to \infty$ und jede zugehörige Folge von Summen $\sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)})$ konvergent. Gemäß Lemma 8.12 gibt es zu jedem Z_n Zwischenpunkte $\tilde{x}^{(n)}$ und $\hat{x}^{(n)}$ mit

$$\underbrace{s(Z_n)}_{\to \sup_Z s(Z)} \leq \sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)}) < \underbrace{s(Z_n)}_{\to \sup_Z s(Z)} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}$$

und

$$\underbrace{S(Z_n)}_{\to \inf_Z S(Z)} - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} < \sigma(Z_n, \hat{x}^{(n)}) \leq \underbrace{S(Z_n)}_{\to \inf_Z S(Z)}$$

damit $\sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)}) \to \sup\limits_Z s(Z)$ und $\sigma(Z_n, \hat{x}^{(n)}) \to \inf\limits_Z S(Z)$

Wäre $\tilde{x}^{(n)} = \hat{x}^{(n)}$, dann wären wir jetzt fertig, da Grenzwerte eindeutig sind und somit $\sup_Z s(Z) = \inf_Z S(Z)$ sein müsste. Mische nun beide Summenfolgen zu neuer Summenfolge $\sigma(Z_1, \tilde{x}^{(1)}), \sigma(Z_2, \hat{x}^{(2)}), \sigma(Z_3, \tilde{x}^{(3)}), \sigma(Z_4, \hat{x}^{(4)}), \ldots$ Nach Konstruktion besitzt sie zwei konvergente Teilfolgen, die gegen das untere bzw. obere Riemann-Integral konvergieren. Die Mischfolge konvergiert aber nach Voraussetzung auch. Deshalb müssen die Grenzwerte der Teilfolgen, also unteres und oberes Riemann-Integral, gleich sein. Damit ist $f \in R[a, b]$. $\square$

Praktischer Nutzen dieses Resultats: Steht Integrierbarkeit von f bereits fest (z. B. weil die Funktion stetig oder monoton ist), dann kann man sich eine spezielle Wahl von Zerlegung und Zwischenpunkten aussuchen, um das Integral zu berechnen. Zwei typische und oft verwendete Zerlegungen sind:

- Äquidistante Zerlegung: Für $f \in R[a, b]$ gilt
  $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n-1} h f(a + ih)$ mit $h = \frac{b-a}{n}$

Beispiel: $f(x) = e^{\alpha x}$ für $\alpha \neq 0$ (monoton, stetig $\Rightarrow \in R[a,b]$)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} hf(a+ih) &= h\sum_{i=0}^{n-1} e^{\alpha(a+ih)} && = he^{\alpha a}\sum_{i=0}^{n-1}\left(e^{\alpha h}\right)^i \\
&= he^{\alpha a}\frac{\left(e^{\alpha h}\right)^n - 1}{e^{\alpha h}-1} && = he^{\alpha a}\frac{e^{\alpha\frac{b-a}{n}n}-1}{e^{\alpha h}-1} \\
&= he^{\alpha a}\frac{e^{\alpha b-\alpha a}-1}{e^{\alpha h}-1} && = (e^{\alpha b}-e^{\alpha a})\frac{h}{e^{\alpha h}-1}\frac{\alpha}{\alpha} \\
&= \frac{(e^{\alpha b}-e^{\alpha a})}{\alpha}\cdot\underbrace{\frac{\alpha h}{e^{\alpha h}-1}}_{\to 1 \text{ für } h\to 0} && \to \frac{e^{\alpha b}-e^{\alpha a}}{\alpha}
\end{aligned}$$

weil $\lim\limits_{h\to 0} = \frac{\alpha\cdot h}{e^{\alpha h}-1} \underset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{h\to 0}\frac{\alpha}{\alpha\cdot e^{\alpha h}} = 1.$

- Geometrische Progression (für $[a,b]$ mit $0 < a < b$).
  $Z_n : x_i = a\cdot q^i$ für $i = 1, 2 ... n$ mit $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = (\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}} > 1$.
  Für $k = 1, 2, ... n$ gilt $x_k - x_{k-1} = a(q^k - q^{k-1}) = a\cdot q^{k-1}(q-1)$.

$$\begin{aligned}
|Z_n| &= \max_{\text{k}=\ 1,\dots,\text{n}}\{a\cdot q^{k-1}(q-1)\} = a\cdot q^{n-1}(q-1) \\
&\leq \underbrace{a\cdot q^n}_{=b}(q-1) \qquad\qquad = b(\underbrace{\sqrt[n]{\tfrac{b}{a}}}_{\to 1}-1)\to 0
\end{aligned}$$

Also: $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a\cdot q^{k-1}(q-1)\cdot f(a\cdot q^{k-1})$ mit $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$

Beispiel 8.2. $f(x) = x^\alpha$ *für* $\alpha \neq -1$

$$\begin{aligned}
a(q-1)\sum_{k=0}^{n-1} q^k\cdot f(a\cdot q^k) &= a(q-1)\sum_{k=0}^{n-1} q^k\cdot a^\alpha\cdot q^{\alpha k} \\
= a^{\alpha+1}(q-1)\sum_{k=0}^{n-1}(q^{\alpha+1})^k &\quad = a^{\alpha+1}(q-1)\frac{(q^{\alpha+1})^n-1}{q^{\alpha+1}-1} \\
\overset{(*)}{=} a^{\alpha+1}(q-1)\frac{(\frac{b}{a})^{\alpha+1}-1}{q^{\alpha+1}-1} &\quad = (b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1})\cdot\underbrace{\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}}_{\to\frac{1}{\alpha+1}} \to \frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1}
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{q\to 1}\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1} \underset{l'Hospital}{=} \lim\limits_{q\to 1}\frac{1}{(\alpha+1)\cdot q^\alpha} = \frac{1}{\alpha+1}$
$(*) : (q^{\alpha+1})^n = (\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}(\alpha+1)n} = (\frac{b}{a})^{\alpha+1}$

Für die Differenzierbarkeit zusammengesetzter Funktionen haben wir einige Regeln kennen gelernt, ähnliche Regeln sollen nun für die Integrierbarkeit von Funktionen hergeleitet werden.

Satz 8.14. *Sind die Funktionen f und g auf $[a,b]$ integrierbar, so ist auch die Funktion $\alpha f + \beta g$ für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Beweis: Gegeben sei $(Z_n, \tilde{x}^{(n)})$ mit $|Z_n| \to 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)}; \alpha f + \beta g) &= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})(\alpha f(\tilde{x}_k) + \beta g(\tilde{x}_k)) \\
&= \alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\tilde{x}_k) + \beta \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) g(\tilde{x}_k) \\
&= \alpha \cdot \underbrace{\sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)}; f)}_{\substack{\text{Grenzwert existiert nach Vor.} \\ \text{nämlich } \int f\,\mathrm{d}x}} + \beta \cdot \underbrace{\sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)}; g)}_{\substack{\text{Grenzwert existiert nach Vor.} \\ \text{nämlich } \int g\,\mathrm{d}x}}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)}; \alpha f + \beta g)$ existiert und ist nach Satz 8.13 gerade $\int (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}x$.

□

Satz 8.15. *Seien f und g integrierbar auf $[a,b]$. Dann gilt:*

a) $\max\{f(x), g(x)\}$, $\min\{f(x), g(x)\}$, $|f(x)|$ *sind integrierbar auf* $[a,b]$.

b) *Falls $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, dann* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

c) $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

Beweis:

a) Sei $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ mit $M_h = \sup\{h(x) \mid x \in [a,b]\}$ sowie $m_h = \inf\{h(x) \mid x \in [a,b]\}$ und M_f, M_g, m_f, m_g entsprechend. Es ist stets $m_h \ge m_f$ und $m_h \ge m_g$. Falls $M_f \ge M_g$, dann $M_h = M_f$ und

$M_h - m_h = M_f - m_h \le M_f - m_f \le M_f - m_f + \underbrace{M_g - m_g}_{\ge 0}$

Falls $M_g \ge M_f$, dann $M_h = M_g$ und

$M_h - m_h = M_g - m_h \le M_g - m_g \le M_g - m_g + \underbrace{M_f - m_f}_{\ge 0}$

Also ist für eine beliebige Zerlegung Z

$$S_h(Z) - s_h(Z) \le \underbrace{S_f(Z) - s_f(Z)}_{\le \frac{\varepsilon}{2} \text{ da } f \in R[a,b]} + \underbrace{S_g(Z) - s_g(Z)}_{\le \frac{\varepsilon}{2} \text{ da } g \in R[a,b]} \le \varepsilon$$

und damit $h \in R[a,b]$ nach Satz 8.10. Mit den Identitäten $\min\{f(x), g(x)\} = -\max\{-f(x), -g(x)\}$ und $|f(x)| = \max\{0, f(x)\} + \max\{0, -f(x)\}$ erhält man die übrigen Behauptungen in Teil *a)*.

b) Sei Z_n eine Folge von Zerlegungen mit $|Z_n| \to 0$ für $n \to \infty$ und $\tilde{x}^{(n)}$ eine Folge von passenden Zwischenwerten. Es ist

$$\begin{array}{ccccc}
\sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)}; f) = \sum\limits_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\geq 0} f(\tilde{x}_i) & \leq & \sum\limits_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\geq 0} g(\tilde{x}_i) & = & \sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)}; g) \\
\Big\downarrow n \to \infty & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow n \to \infty \\
\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x & & \leq & & \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x
\end{array}$$

unter Verwendung von Satz 8.13.

c) Wegen $f(x) \leq |f(x)|$ und $-f(x) \leq |f(x)|$ ergibt sich aus *b)* sofort

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \quad \text{sowie} \quad -\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

und damit die Behauptung.

□

In der Differentialrechnung haben wir bereits Mittelwertsätze kennen gelernt, ähnliche Sätze existieren auch für die Integralrechnung.

Satz 8.16 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** *Sei $f \in R[a,b]$ und $m \leq f(x) \leq M$ für $x \in [a,b]$. Dann ist*

a) $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)\,.$

b) Ist $f(x)$ auf $[a,b]$ zudem stetig, dann existiert ein $\tilde{x} \in (a,b)$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\tilde{x})\,.$$

Beweis:

a) Integration der Ungleichungen $m \leq f(x) \leq M$ gibt mit Satz 8.15*b)*
$m(b-a) = \int\limits_a^b m\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b M\,\mathrm{d}x = M(b-a)$

b) Sei $m = \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ und $M = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. Wegen *a)* ist $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\cdot v$ für ein $v \in [m,M]$. Nach Zwischenwertsatz (Korollar 4.19) nimmt $f(x)$ jeden Wert zwischen m und M an. Also existiert ein $\tilde{x} \in [a,b]$ mit $f(\tilde{x}) = v$.

□

Satz 8.17 (Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** *Sei $p(x) \geq 0$ für $x \in [a,b]$ und $p(x)$ sowie $f(x)\cdot p(x)$ integrierbar auf $[a,b]$.*

Wenn $m \leq f(x) \leq M$ auf $[a,b]$ ist, dann gilt

$$m\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x \leq M\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis: Analog zu 8.16a). □

Im folgenden Satz zeigen wir, dass die Intgerierbarkeit über einzelne Intervalle sich auf die Vereinigung der Intervalle überträgt.

Satz 8.18. *Sei f auf $[a,b]$ beschränkt und $a < c < b$. Es gilt:*

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow f \in R[a,c] \text{ und } f \in R[c,b]\ .$$

In diesem Fall ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Beweis: Sei $\tilde{Z}_n$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,c]$ und $\hat{Z}_n$ eine Folge von Zerlegungen von $[c,b]$ mit $|\tilde{Z}_n| \to 0$ und $|\hat{Z}_n| \to 0$ für $n \to \infty$. Dann ist $Z_n = \tilde{Z}_n + \hat{Z}_n$ für jedes n eine Zerlegung von $[a,b]$ und es gilt $|Z_n| \leq \max\{|\tilde{Z}_n|, |\hat{Z}_n|\} \to 0$ für $n \to \infty$. Für alle $n \geq 0$ ist

$$\left.\begin{array}{rl} & S(\tilde{Z}_n) + S(\hat{Z}_n) = S(Z_n) \\ \textit{sowie} & s(\tilde{Z}_n) + s(\hat{Z}_n) = s(Z_n) \end{array}\right\} - (*)$$

$$\underbrace{S(\tilde{Z}_n) - s(\tilde{Z}_n)}_{\tilde{\delta}_n} + \underbrace{S(\hat{Z}_n) - s(\hat{Z}_n)}_{\hat{\delta}_n} = \underbrace{S(Z_n) - s(Z_n)}_{=:\delta_n}$$

Gemäß Satz 8.9 ist

$$\begin{array}{rcl} f \in R[a,b] & \Longleftrightarrow & \delta_n \to 0 \\ & \Longleftrightarrow & \tilde{\delta}_n \to 0 \quad \text{und} \quad \hat{\delta}_n \to 0 \\ & \underset{\text{Satz 8.9}}{\Longleftrightarrow} & f \in R[a,c] \quad \text{und} \quad f \in R[c,b]. \end{array}$$

Aus $(*)$ und Grenzübergang folgt Teil 2 der Behauptung. □

Der Wert eines Integrals wurde bisher nur für die Grenzen $a < b$ ermittelt. Die folgende Definition erweitert dies auf beliebige Grenzen.

Definition 8.19. *Für $a < b$ und $f \in R[a,b]$ wird*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \textit{sowie} \qquad \int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 0$$

für $c \in [a,b]$ festgelegt.

Wegen Satz 8.18 und Definition 8.19 ist für beliebiges $x \in [a,b]$ das Integral

$$F(x) := \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y$$

für $f \in R[a,b]$ definiert. Mit dieser Festlegung lässt sich das bestimmte Integral als Differenz zweier Funktionswerte ausdrücken.

Satz 8.20. *Sei $f \in R[a,b]$ und $[c,d] \subseteq [a,b]$. Dann gilt*

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = F(d) - F(c)\ .$$

Beweis: Mit Satz 8.18 gilt

$$\begin{aligned} &\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x \\ \Longleftrightarrow &\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = F(d) - F(c) \end{aligned}$$

□

8.2 Der Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung

Bisher haben wir das Integral rein initutiv über den Flächeninhalt definiert. Die Erkenntnis, dass Integration auch als Umkehrung der Differentiation gesehen werden kann, entstand aber schon in der 2. Hälfte des 17. Jahrhunderts. Durch diesen Zusammenhang, können wir in vielen Fällen das Integral direkt, d.h. ohne den Umweg über den Grenzwert von Summen, berechnen.

Satz 8.21. *Sei $f \in R[a,b]$ eine stetige Funktion und $c \in [a,b]$. Für $x \in [a,b]$ sei dann*

$$F(x) = \int_c^x f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a,b]$.

Beweis: Nach Satz 8.20 ist $F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(y)\,\mathrm{d}y$ und

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \underbrace{f(x)}_{=const.}\ \mathrm{d}y = \frac{1}{h} f(x) \int_x^{x+h} \mathrm{d}y = \frac{1}{h} f(x)\cdot(x+h-x) = f(x)\,.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} f(y)\,\mathrm{d}y - \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} f(x)\,\mathrm{d}y\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} (f(y)-f(x))\,\mathrm{d}y\right| \\
&\underset{\text{Satz 8.15c}}{\leq} \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} \underbrace{|f(y)-f(x)|}_{\leq\varepsilon\ (*)}\,\mathrm{d}y \\
&\leq \frac{\varepsilon}{h}\int\limits_x^{x+h} \mathrm{d}y \\
&= \frac{\varepsilon}{h}(x+h-x) \qquad = \varepsilon
\end{aligned}$$

ε kann beliebig klein gemacht werden, indem $|h| \to 0$ (dann $|h| < \delta$).
$(*)$ da f in $\tilde{x}$ stetig! $\forall\varepsilon > 0.\exists\delta > 0.|f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon$ für $|x - \tilde{x}| < \delta$. □

Definition 8.22. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $F(x)$ mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x)$ auf $[a,b]$ soll* Stammfunktion *oder* unbestimmtes Integral *von $f(x)$ heißen. Wir schreiben dafür $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Offensichtlich ist mit $F(x)$ auch $F(x) + c$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f(x)$, da die Ableitung einer Konstanten stets Null ergibt. Damit ist die Schreibweise $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$, die oft verwendet wird, streng genommen ohne Angabe der Integrationsgrenzen nicht korrekt, da die Stammfunktion nur bis auf eine additive Konstante eindeutig ist. Über die Stammfunktion haben wir das unbestimmte Integral (d.h. das Integral ohne Festlegung der Integrationsgrenzen) definiert, während das Riemann-Integral als bestimmtes Integral für Integrationsgrenzen a und b definiert wurde. Die Kenntnis der Stammfunktion von f erleichtert die Berechnung des bestimmten Integrals ungemein, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 8.23 (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Ist $F(x)$ auf $[a,b]$ stetig differenzierbar, so gilt*

$$F(b) - F(a) = \int\limits_a^b F'(t)\,\mathrm{d}t\ ,$$

und für $x, c \in [a,b]$ entsprechend

$$F(x) = F(c) + \int\limits_c^x F'(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Beweis: Sei $G(x) := \int\limits_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t$ und F' auf $[a,b]$ stetig. Dann ist G nach Satz 8.21 stetig differenzierbar und es gilt $G'(x) = F'(x)$ für $x \in [a,b]$. Für die Funktion

$H(x) := F(x) - G(x)$ ist also die Ableitung $H'(x) = F'(x) - G'(x) \equiv 0$ für $x \in [a, b]$. Folglich muss $H(x)$ konstant sein auf $[a, b]$. Da aber

$$H(a) \;=\; F(a) - \underbrace{G(a)}_{=0,\text{ Def. } 8.19} \;=\; F(a),$$

folgt somit $H(x) \equiv F(a)$ für $x \in [a, b]$. Also gilt für $x = b$

$$\text{sowohl } \underbrace{H(b) = F(b) - G(b)}_{\text{n. Def. von } H(\cdot)} \quad \text{als auch} \quad \underbrace{H(b) = F(a)}_{\text{wg. } H(x) \equiv F(a)}.$$

Deshalb gilt

$$F(b) - G(b) = F(a) \iff G(b) = F(b) - F(a) = \int_c^b F'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

□

Ist also $f \in R[a, b]$ und kennen wir die zugehörige Stammfunktion, so lässt sich das Integral ohne den langwierigen Riemannschen Grenzprozess bestimmen!

Beispiel 8.3. *Wir haben bei den Beispielen in Kapitel 5.2 bereits gesehen, dass für* $F(x) = \ln(x)$ *mit* $x > 0$ *gilt* $F'(x) = f(x) = \frac{1}{x}$. *Für* $a, b > 0$ *folgt damit*

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; F(b) - F(a) \;=\; \ln(b) - \ln(a).$$

8.3 Die Technik des Integrierens

Wenn wir die Stammfunktion einer Funktion kennen, so können wir das bestimmte Integral durch Auswertung der Stammfunktion einfach bestimmen. Im Gegensatz zum Differenzieren, das in vielen Fällen durch einfache Regelanwendungen quasi algorithmisch durchgeführt werden kann, basiert die Technik des Integrierens auf

- einer Liste von Stammfunktionen,
- der Methode der partiellen Integration,
- der Substitutionsregel und
- einem Fundus von Umformungen, so dass die vorgenannten Ansätze greifen.

Insgesamt ist das Integrieren oft *schwieriger* als das Differenzieren einer Funktion. Neben den hier vorgestellten symbolischen Methoden gibt es noch numerische Methoden, die in vielen Computersystemen zur Berechnung bestimmter Integrale genutzt werden. Wir beschäftigen uns nur mit der symbolischen Berechnung mit Hilfe der Stammfunktion.
Wir nutzen die folgende Notation

$$F(x)\Big|_a^b := \Big[F(x)\Big]_a^b := F(b) - F(a).$$

$f(x) = F'(x)$	$F(x) = \int F'(x)\,\mathrm{d}x$	Definitionsbereich von f
$c (\in \mathbb{R})$	cx	$\mathbb{R}$
x^{α}	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ für $\alpha \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ für $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, $x > 0$ für $\alpha \neq 1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$a^x (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$\ln\lvert x\rvert$	$x \cdot \ln\lvert x\rvert - x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \ln \left\lvert \frac{x+1}{x-1} \right\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{Arsinh} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$(-1, 1)$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \{x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Tabelle 8.1: Funktionen und ihre Stammfunktionen (Auswahl)

Satz 8.24 (Partielle Integration)**.** *Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei auf $[a,b]$ stetig differenzierbare Funktionen.. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Beweis: Die Produktregel der Differenziation lautet

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\ .$$

Integration auf beiden Seiten ergibt

$$\underbrace{\int_a^b (f(x) \cdot g(x))'\,\mathrm{d}x}_{= f(x) \cdot g(x)\big|_a^b} = \underbrace{\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x}_{(*)} + \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Substraktion von $(*)$ auf beiden Seiten liefert die Behauptung. □

Anmerkung: Die Formel für partielle Integration gilt auch für unbestimmte Integrale

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

wie man leicht durch Differentiation auf beiden Seiten verfiziert.
Entscheidend für eine erfolgreiche Anwendung der partiellen Integration ist die geeignete Wahl von f und g', so dass sowohl g als auch $\int f'g\,\mathrm{d}x$ auf der rechten Seite leicht gefunden werden können.

Beispiel 8.4.

a) $\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{e^x}_{g'} \,\mathrm{d}x = \underbrace{x}_{f} \underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{e^x}_{g} \,\mathrm{d}x = xe^x - e^x = (x-1)e^x$

b) $\int \underbrace{x^2}_{f} \underbrace{e^x}_{g'} \,\mathrm{d}x = \underbrace{x^2}_{f} \underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{2x}_{f'} \underbrace{e^x}_{g} \,\mathrm{d}x = x^2 e^x - 2(x-1)e^x$
$= (x^2 - 2x + 2)e^x$

c) $\int \ln x \,\mathrm{d}x = \int \underbrace{\ln x}_{f} \underbrace{1}_{g'} \,\mathrm{d}x = \underbrace{\ln x}_{f} \underbrace{x}_{g} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'} \underbrace{x}_{g} \,\mathrm{d}x = x \ln x - x,\ x > 0$

d) $\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \int \underbrace{(\sin x)}_{f} \underbrace{(\sin x)}_{g'} \,\mathrm{d}x = \underbrace{(\sin x)}_{f} \underbrace{(-\cos x)}_{g} - \int \underbrace{(\cos x)}_{f'} \underbrace{(-\cos x)}_{g} \,\mathrm{d}x$
$= -\sin x \cos x + \int \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\sin x \cos x + \underbrace{\int 1 \,\mathrm{d}x}_{=x} - \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x$
$\Rightarrow \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$

In der Regel setzt man $f(x)$ gleich dem Potenzfaktor, damit er durch mehrfache partielle Integration schließlich verschwindet. Manchmal führt aber auch $g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x$ zum Ziel (wie in (c)).

Satz 8.25 (Substitutionsregel)**.** *Sei f stetig auf $\langle a, b\rangle$ und g : stetig differenzierbar auf $\langle \alpha, \beta\rangle$, wobei $< a, b > := [\min\{a, b\},\ \max\{a, b\}]$ und*

- *$g(\langle \alpha, \beta\rangle) \subseteq \langle a, b\rangle$ sowie*
- *$g(\alpha) = a, g(\beta) = b$.*

Dann ist $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t$.

Beweis: Die Integrale existieren, weil f und g' sowie$f(g(t))$ stetig sind. Sei $F'(x) = f(x)$. Nach der Kettenregel der Differenzialrechnung gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(g(t)) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t) \ .$$

Integration auf beiden Seiten bezüglich t ergibt

$$F(g(t)) \mid_\alpha^\beta = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t \ .$$

Da $F(g(t)) \mid_\alpha^\beta = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ folgt damit die Behauptung. □

Anmerkung: Sei f stetig und g stetig differenzierbar. Dann gilt $\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x))$ wenn $F'(x) = f(x)$, also F Stammfunktion von f ist. Beweis durch Differenzieren auf beiden Seiten.
Entscheidend für eine erfolgreiche Anwendung der Substitutionsregel ist die geeignete Wahl der Substitution. Die eine führt schnell zum Ziel, eine andere nur weiter ins Dickicht. Hier ist Übung, Erfahrung, Intuition und auch Glück erforderlich, um den zielführenden Ansatz zu wählen. Übung hilft ungemein beim Finden der richtigen Substitution!

Beispiel 8.5.

- *Berechne* $\int_1^2 (2t-2)^9 \,\mathrm{d}t$.
  $f(x) = x^9$; $g(t) = 2t-2$; $g'(t)\mathrm{d}t = 2\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$; $\alpha = 1$; $\beta = 2$
  $g(\alpha) = g(1) = 0 = a$; $g(\beta) = g(2) = 2 = b$
  $\Rightarrow F(x) = \frac{1}{10}x^{10}$
  Also:
  $$\int_1^2 (2t-2)^9 \,\mathrm{d}t = \int_1^2 f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2}F(x)\Big|_{a=0}^{b=2}$$
  $$= \frac{1}{2}\frac{1}{10}(2^{10}-0) \quad = \frac{512}{10}$$

- *Berechne* $\int_0^1 \frac{1}{1+4t}\,\mathrm{d}t$
  $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(t) = 1+4t$; $g'(t)\mathrm{d}t = 4\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$; $\alpha = 0$; $\beta = 1$
  $g(\alpha) = g(0) = 1 = a$; $g(\beta) = g(1) = 5 = b$
  $\Rightarrow F(x) = \ln|x|$.
  Also:
  $$\int_0^1 \frac{1}{1+4t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^1 f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}F(x)\Big|_{a=1}^{b=5} = \frac{1}{4}(\ln 5 - \underbrace{\ln 1}_{=0}) - \frac{1}{4}\ln 5\ .$$

  Für das unbestimmte Integral ergibt sich
  $$\int \frac{1}{1+4t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}F(g(t)) = \frac{1}{4}\ln|1+4t|\ .$$

Wir betrachten noch einmal $\int_1^2 (2t-2)^9\,\mathrm{d}t$:
Man könnte auch sagen, dass wir den Ausdruck $2t-2$ durch eine neue Variable x ersetzen (substituieren!); also
$$x = 2t-2\ .$$
Das Differential $\mathrm{d}x$ erhielten wir aus dem Produkt der Ableitung des substituierten Ausdrucks $(2t-2)'$ und dem Differential $\mathrm{d}t$; also
$$\mathrm{d}x = (2t-2)'\mathrm{d}t = 2\mathrm{d}t \Leftrightarrow \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{d}x\ .$$

Die neuen Intervallgrenzen ergeben sich durch Einsetzen der ursprünglichen Intervallgrenzen in den substituierten Ausdruck; also $2t-2\ |_{t=1}= 0$ und $2t-2\ |_{t=2}= 2$. Insgesamt ergibt sich also durch Substitution $\int_1^2 (2t-2)^9\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^2 x^9\,\mathrm{d}x$, was wir sofort mit Hilfe der Stammfunktionstabelle lösen können. Für das unbestimmte Integral machen wir den gleichen Ansatz, müssen aber schließlich rücksubstituieren $(x = 2t-2)$, also
$$\int (2t-2)^9\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int x^9\mathrm{d}x = \frac{1}{20}x^{10} = \frac{1}{20}(2t-2)^{10}.$$
Probe: $(\frac{1}{20}(2t-2)^{10})' = \frac{1}{20}10(2t-2)^9 \cdot 2 = (2t-2)^9$ ✓

Satz 8.26. *Nützliche Substitutionsregeln:*

1. $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$ *für* $F'(x) = f(x)$.

2. $\int f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f^2(x)$.

3. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|$.

Beweis: 1) bis 3) lassen sich leicht durch Ableiten verifizieren. Wir wollen aber konstruktive Beweise geben:

1. $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x \underset{\substack{t=ax+b \\ \mathrm{d}t=a\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{d}t}}{=} \frac{1}{a}\int f(t)\,\mathrm{d}t \underset{f=F'}{=} \frac{1}{a}F(t) = \frac{1}{a}F(ax+b)$

2. $\int f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x \underset{\substack{t=f(x) \\ \mathrm{d}t=f'(x)\mathrm{d}x}}{=} \int t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}f^2(x)$

3. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x \underset{\substack{t=f(x) \\ \mathrm{d}t=f'(x)\mathrm{d}x}}{=} \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| = \ln|f(x)|$

□

Beispiel 8.6 (zu Satz 8.26)**.**

1. $\int \ln(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[2x(\ln(2x)-1)] = x(\ln(2x)-1)$ *für* $F'(x) = \ln x$.

2. $\int \underbrace{\sin x}_{f(x)}\underbrace{\cos x}_{f'(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin^2 x$

3. $\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln(\ln x))$, $x > 1$

Durch Substitution lassen sich auch kompliziert anmutende Ausdrücke manchmal in Form von rationalen Funktionen darstellen, die sich *relativ einfach* integrieren lassen. Dabei spielen elementare Funktionen eine entscheidende Rolle. Der Begriff der elementaren Funktion ist nicht exakt definiert. Es handelt sich um Funktionen, die sich mittels der vier Grundrechenarten und des Operators $\circ$ aus trigonometrischen Funktionen, Potenzen, Wurzeln und der Exponentialfunktion in endlicher Schrittzahl zusammensetzen lassen. Die Klasse der Basisfunktionen ist nicht eindeutig festgelegt. Eine Funktion ist elementar integrierbar, wenn die Stammfunktion eine elementare Funktion ist. Für elementar integrierbare Funktionen lässt sich im Prinzip die Stammfunktion auch algorithmisch bestimmen. Ohne Beweis bemerken wir:

Satz 8.27. *Jede rationale Funktion ist elementar integrierbar.*

Beweis: Siehe z. B. [4, S. 278]. □

Beispiel 8.7. $\int \frac{e^{3x}+3}{e^x+1}\,\mathrm{d}x \underset{\substack{t=e^x \\ \mathrm{d}t=e^x\mathrm{d}x=t\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}t}{t}=\mathrm{d}x}}{=} \int \underbrace{\frac{t^3+3}{t(t+1)}}_{\textit{rationale Fkt.!}}\,\mathrm{d}t$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (t^3+3):(t^2+t) = t-1+(t+3)/(t(t+1)) \\ \underline{-(t^3+t^2)} \\ \quad -t^2+3 \\ \quad \underline{-(-t^2-t)} \\ \qquad t+3 \end{array}$$

$\frac{t+3}{t(t+1)}$ *ist echt gebrochen rational (Polynomgrad im Zähler < Polynomgrad im Nenner).*
Partialbruchzerlegung:

$$\frac{t+3}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+Bt}{t(t+1)} = \frac{\overbrace{(A+B)}^{\stackrel{!}{=}1 \Rightarrow B=-2}\, t + \overbrace{A}^{\stackrel{!}{=}3}}{t(t+1)}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{t^3+3}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t &= \int (t-1)\,\mathrm{d}t + \int \frac{3}{t}\,\mathrm{d}t - \int \frac{2}{t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}t^2 - t + 3\ln|t| - 2\ln|t+1| \\ &\stackrel{\textit{Rücksubst.}}{=} \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + 3x - 2\ln(e^x+1) \end{aligned}$$

8.4 Uneigentliche Integrale

Voraussetzungen für das Riemann-Integral sind

- die Beschränktheit der zu integrierenden Funktion und
- die Beschränktheit des Integrationsintervalls.

Der Riemannsche Integralbegriff soll nun ausgedehnt werden auf solche Fälle, bei denen man auf diese Einschränkungen verzichten kann.

Definition 8.28 (unbeschränkter Integrationsbereich)**.** *Sei f auf $[a,\infty)$ erklärt und über jedes $[a,c]$ für $a < c < \infty$ integrierbar.*
Man legt fest:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Wenn der Grenzwert existiert, dann existiert das uneigentliche Integral und es wird konvergent *genannt (andernfalls* divergent*). Entsprechend definieren wir für ein Intervall $(-\infty,a]$*

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

und für ganz $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$*, wobei beide Integrale auf der rechten Seite existieren müssen.*

Beispiel 8.8.

1. $\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{c\to\infty} \int_0^c e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{c\to\infty} [-e^{-x}]_0^c = \lim\limits_{c\to\infty} (1 - e^{-c}) = 1$ *(konvergent)*
2. $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{c\to\infty} \int_1^c \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{c\to\infty} [\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}]_1^c = \lim\limits_{c\to\infty} \frac{c^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$ $= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{für } \alpha > 1 \quad \text{(konvergent)} \\ \infty & \text{für } \alpha < 1 \quad \text{(divergent)} \end{cases}$ *Für* $\alpha = 1$ *ist* $1 - \alpha = 0$ *und damit die Funktion nicht definiert.*
3. $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{c\to\infty} \int_1^c \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{c\to\infty} [\ln x]_1^c = \lim\limits_{c\to\infty} \ln c = \infty$ *(divergent).*
4. $\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim\limits_{c\to-\infty} \int_c^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \lim\limits_{c\to\infty} \int_0^c \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim\limits_{c\to-\infty} \arctan x\,|_c^0 + \lim\limits_{c\to\infty} \arctan x\,|_0^c = -\lim\limits_{c\to-\infty} \arctan c + \lim\limits_{c\to\infty} \arctan c = -(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} = \pi$ *(konvergent).*
5. $\int_0^\infty \sin x\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{c\to\infty} \int_0^c \sin x\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{c\to\infty} -\cos x\,|_0^c = \lim\limits_{c\to\infty} (-\cos(c) + 1)$ *(Grenzwert existiert nicht* $\Rightarrow$ *divergent).*

Achtung: Im Allgemeinen gilt $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \neq \lim\limits_{c\to\infty} \int_{-c}^c f(x)\,\mathrm{d}x$, da in der Definition gefordert wird, dass bei beide Grenzwerte $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ und $\int_a^\infty f(x)dx$ existieren müssen. Ein Gegenbeispiel ist $\int_{-\infty}^\infty x\,\mathrm{d}x$ der Grenzwert $\lim\limits_{c\to\infty} \int_{-c}^c x\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{c\to\infty} \frac{1}{2}x^2\,|_{-c}^c = 0$, aber $\int_{-\infty}^\infty x\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 x\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty x\,\mathrm{d}x$ existiert nicht, da jedes Teilintegral divergent.

Definition 8.29 (Integration unbeschränkter Funktionen)**.**

1. *Sei* $f \in R[c, b]$ *für jedes* c *mit* $a < c < b$ *und* $\lim\limits_{x\nearrow a} |f(x)| = \infty$*. Man definiert* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim\limits_{c\nearrow a} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$*, falls der Grenzwert existiert.*
2. *Sei* $f \in R[a, c]$ *für jedes* c *mit* $a < c < b$ *und* $\lim\limits_{x\searrow b} |f(x)| = \infty$*. Man definiert* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim\limits_{c\nearrow b} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$*, falls der Grenzwert existiert.*
3. *Sei* $f \in R[c, d]$ *für alle* c, d *mit* $a < c < d < b$ *und* $\lim\limits_{x\nearrow a} |f(x)| = \infty$ *sowie* $\lim\limits_{x\searrow b} |f(x)| = \infty$*. Man definiert unter Rückführung auf die Fälle 1.) und 2.)* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$*,* $(a < c < b)$ *falls beide uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite existieren.*

Beispiel 8.9.

1. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{c\nearrow 1} \int_0^c \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{c\nearrow 1} [\arcsin x]_0^c = \lim\limits_{c\nearrow 1} \arcsin c = \frac{\pi}{2}$

2. $\int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}x = \lim\limits_{c \searrow 0} \int_c^1 \ln x \,\mathrm{d}x = \lim\limits_{c \searrow 0} [x \ln x - x]_c^1 = -1 - \lim\limits_{c \searrow 0} c \ln c = -1$
   da $\lim\limits_{c \searrow 0} c \ln c = \lim c \searrow 0 \frac{\ln c}{c^{-1}} \underset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{c \searrow 0} \frac{c^{-1}}{-c^{-2}} = -\lim\limits_{c \searrow 0^+} c = 0$

3. *wie 1.) mit* $[-1, 1]$

Anmerkung: Falls sowohl Integrationsbereich als auch zu integrierende Funktion unbeschränkt sind, dann spaltet man in mehrere uneigentliche Integrale auf und fordert, dass alle uneigentlichen Teilintegrale existieren müssen.

Beispiel 8.10. *Sei* $f(x) = \min\{\ln x, \frac{\ln 16}{x^2}\}$
$= \begin{cases} \ln x, & \text{für } x \leq 2 \\ \frac{\ln 16}{x^2}, & \text{für } x > 2 \end{cases}$ *mit* $x > 0$ *(stetig!)*
$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{a \to 0^+} \int_a^2 \ln x \,\mathrm{d}x + \lim\limits_{b \to \infty} \int_2^b \frac{\ln 16}{x^2}\,\mathrm{d}x =$
$\lim\limits_{a \to 0^+} [x \ln x - x]_a^2 + \lim\limits_{b \to \infty} [-\frac{\ln 16}{x}]_2^b$
$2 \ln 2 - 2 - \underbrace{\lim\limits_{a \to 0^+} a \ln a}_{=0} + (-\underbrace{\lim\limits_{b \to \infty} \frac{\ln 16}{b}}_{=0} + \frac{\ln 16}{2}) = 4 \ln 2 - 2,$ *da* $\ln 16 = \ln 2^4 = 4 \ln 2$.

8.5 Anwendungen

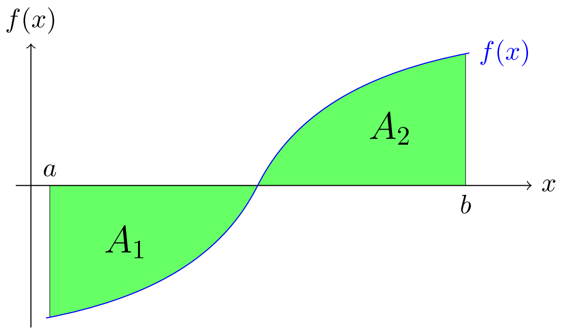
Prinzipiell ergeben sich die Anwendungen der Integralrechnung aus drei Sichtweisen:

1. Integrieren heißt Summieren ($\to$ Flächenberechnung)
2. Integrieren heißt Mitteln (Mittelwertsatz)
3. Integrieren heißt Rekonstruktion (von Funktionen aus ihrer Änderungsrate).

8.5.1 Summieren

Flächenberechnung als Grenzwert der Summe infinitesimal schmaler Rechtecke. Aber im Allgemeinen ist der Wert des bestimmten Integrals ungleich der Flächen zwischen x-Achse und Graph der Funktion.

Beispiel 8.11.



A_1*: Fläche zwischen* $f(x)$*,* x*-Achse und Gerade* $x = a$
A_2*: Fläche zwischen* $f(x)$*,* x*-Achse und Gerade* $x = b$

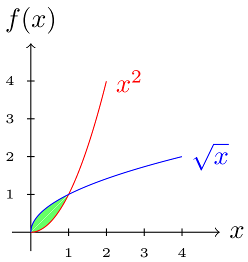
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{?}{=} \begin{cases} A_1 + A_2 & = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \\ A_1 - A_2 & \\ A_2 - A_1 & \checkmark \\ |A_1 - A_2| & \\ \frac{1}{2}(A_1 + A_2) & \end{cases}$$

$\Rightarrow$ *Das Integral* bilanziert *Flächen!*

Die analytische Bestimmung von gänzlich nichtlinear berandeten Flächen ist möglich:

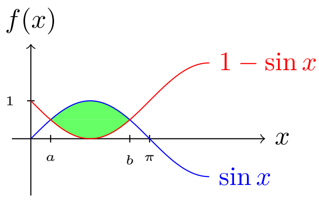
Beispiel 8.12.

- *Gesucht ist der Flächeninhalt zwischen* $\sqrt{x}$ *und* x^2 *im Bereich* $[0, 1]$



$$\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\,x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

- *Gesucht ist der Flächeninhalt zwischen* $\sin x$ *und* $1 - \sin x$ *im Bereich* $[a, b]$



$$\sin x \overset{!}{=} 1 - \sin x \quad\Leftrightarrow\quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a = x_1 = \frac{\pi}{6} \text{ und } b = x_2 = \frac{5}{6}\pi$$

$$\int_a^b \sin x\,\mathrm{d}x - \int_a^b (1 - \sin x)\,\mathrm{d}x = 2\int_a^b \sin x\,\mathrm{d}x - \int_a^b \mathrm{d}x = -2\cos x\big|_a^b - (b - a)$$

$$= -2\left(\cos\frac{5}{6}\pi - \cos\frac{1}{6}\pi\right) - \frac{2}{3}\pi = -2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{2}{3}\pi = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi \approx 1{,}3$$

Die Bestimmung eines Integrals in geschlossener Form (also Darstellung mit Hilfe von elementaren Funktionen) ist nicht immer möglich.

Beispiel 8.13.

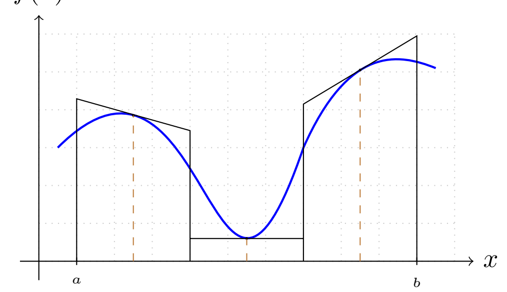
1. *Integralsinus* $\mathrm{Si}\,(x) := \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

2. *Fehlerfunktion* $\mathrm{erf}\,(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

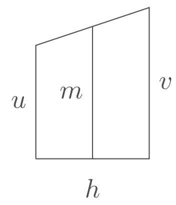
3. $\int \sqrt{x^3 + 1}\,\mathrm{d}x$ *oder* $\int \left(x^2 + 1\right)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x$

In solchen Fällen kommt die numerische Integration *zum Einsatz.*
Ansatz: Riemannsche Zwischensummen

$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \cdot f(\tilde{x}_i)$ *für* $\tilde{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ *„passend"*
z. B. $\tilde{x}_i = x_{i-1} + \frac{x_i - x_{i-1}}{2} = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ *(Intervallmitte)*
$\longrightarrow$ *Tangententrapezformel*



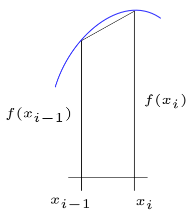
Flächeninhalt eines Trapezes
$= m \cdot h$



$m = \frac{u+v}{2}$

Satz 8.13 sichert Konvergenz zum Integralwert für $n \to \infty$. *Je größer* n, *desto besser die Approximation.*

Auch implizite Wahl von $\tilde{x}_i$ *möglich* $\longrightarrow$ *Sehnentrapezregel.*



$\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}$ *liegt zwischen* $f(x_{i+1})$ *und* $f(x_i)$.
Falls f *stetig ist, sichert der Zwischenwertsatz die Existenz eines* $\tilde{x}_i$ *mit*

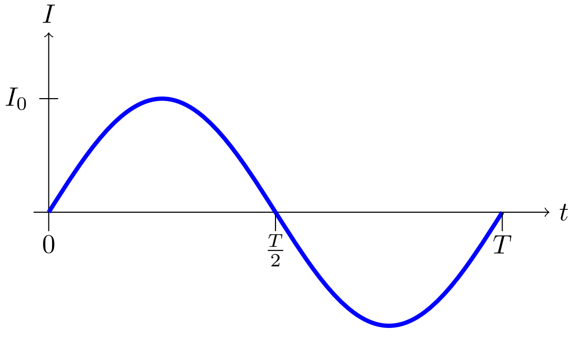
$$f(\tilde{x}_i) = \frac{1}{2}\left(f(x_{i+1}) + f(x_i)\right).$$

Das beschriebene Vorgehen wird in vielen Computeralgebraprogrammen genutzt, um Integrale numerisch auszuwerten.

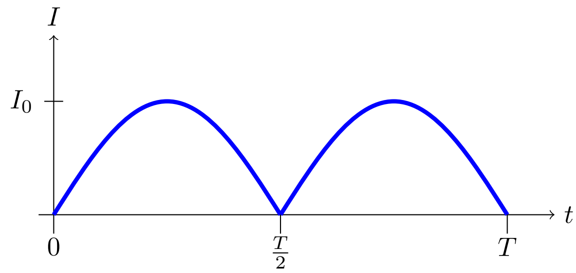
8.5.2 Mitteln

Mitteln mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung.

Beispiel 8.14. *Zweiweggleichrichter erzeugt aus Sinuswechselstrom*
$I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t)$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$



diesen Verlauf



Wie groß ist der (lineare) Mittelwert des Stroms?

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\frac{T}{2}-0}\int_0^{T/2} I(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{2}{T}\cdot I_0 \int_0^{T/2}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\cdot I_0}{T}\cdot\frac{1}{\omega}\Big[-\cos(\omega t)\Big]_0^{T/2} \\
&= \frac{2\cdot I_0}{T}\cdot\frac{T}{2\pi}\left(-\underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right)}_{\cos\pi=-1}+\underbrace{\cos(0)}_{0}\right) = \frac{2}{\pi}\cdot I_0
\end{aligned}$$

8.5.3 Rekonstruieren

Rekonstruieren mit dem Fundamentalsatz der Differnetial- und Integralrechnung (Satz 8.23)

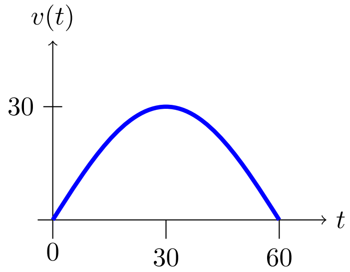
$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t \text{ für } x\in[a,b] \text{ für stetiges } F'$$

Man kann aus der Änderungsrate der Funktion die Funktion selbst rekonstruieren.

Beispiel 8.15. Fahrtenschreiber: *Geschwindigkeit im Zeitverlauf $v(t)$. Rekonstruktion des zurückgelegten Weges aus Geschwindigkeit als momentane Änderungsrate des Weges: $x(t)$ sei gefahrene Strecke zum Zeitpunkt t. Dann ist*

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{(t+h)-t}$$

die mittlere Geschwindigkeit in h Zeiteinheiten. Grenzprozess $h\to 0$ ergibt $x'(t)$ als momentane Geschwindikeit $v(t)$. Wir kennen $v(t)=x'(t)$ vom Fahrtenschreiber und wollen daraus die Funktion $x(t)$ rekonstruieren. Offensichtlich ist $x(0)=0$. Also $x(t) = x(0) + \int_0^t x'(s)\,\mathrm{d}s$.
Angenommen, der Fahrtenschreiber liefert die Daten für das Diagramm



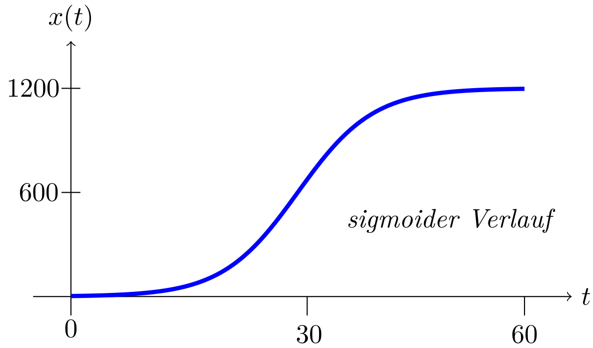
mit $v(t) = \frac{1}{30}t(60-t)$ *für* $t \in [0,60]$ *mit der Einheit* $[\mathrm{m\,s^{-1}}]$. *Dann ergibt sich*

$$x(t) = 0 + \int_0^t \frac{1}{30} s(60-s)\,\mathrm{d}s \tag{8.5.1}$$

$$= \frac{1}{30}\int_0^t (60s - s^2)\,\mathrm{d}s \tag{8.5.2}$$

$$= \frac{1}{30}\left[30s^2 - \frac{1}{3}s^3\right]_0^t = t^2 - \frac{1}{90}t^3. \tag{8.5.3}$$

Für $t = 30$ *ergibt sich* $x(30) = 900 - \frac{1}{90}\cdot 30 \cdot 900 = 600\,[\mathrm{m}]$.



Weiteres Beispiel zur Rekonstruktion:
Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Epidemie $\widehat{=}$ *momentane Änderungsrate der Zahl der Infizierten*
Sei $x(t)$ *die Anzahl der Infizierten zum Zeitpunkt* $t \geq 0$ *und* $x(0) = 1$. *Die Änderungsrate beschreibt den Zuwachs an Infizierten; er wird proportional zur Anzahl der Infizierten angenommen*

$$\underbrace{x'(t) = c \cdot x(t)}_{\text{Welche Funktionen erfüllen die Gleichung überhaupt?}} \qquad , \text{ für } c > 0.$$

Wir raten: $x(t) = e^{c\cdot t}$ *mit* $x'(t) = c \cdot e^{c\cdot t}$. *Eigentlich sind wir schon fertig:* $x(t) = e^{ct}$ *ist die Lösung!*

„Probe" mit Satz 8.23:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(s)\,\mathrm{d}s = 1 + c \cdot \int_0^t e^{cs}\,\mathrm{d}s = 1 + c \cdot \frac{1}{c}\Big[e^{cs}\Big]_0^t = 1 + (e^{ct} - 1) = e^{ct}$$

Stimmt!

Wie kommt man ohne „gutes Raten" aus? Theorie der → Differentialgleichungen!

8.6 Exkurs: Differentialgleichungen

Viele Vorgänge in der Natur und auch in technischen Systemen sind dynamisch, d.h. der Zustand ändert sich mit der Zeit. Um diese Abläufe zu verstehen und zu analysieren, benötigt man ein mathematisches Modell, das die Zustandsänderungen über die Zeit beschreibt. Die Zeit wird üblicherweise mit t bezeichnet und taucht dann als Variable im Modell auf. Das Modell zur Beschreibung dynamischer Vorgänge sind Differentialgleichungen, die in vielen Varianten genutzt werden. Mit Hilfe von Differentialgleichungen wird das Wetter und Klima vorhergesagt, es werden chemische oder biologische Reaktionen analysiert, oder Crashtests von Autos im Rechner nachgebildet, um nur einige Anwendungen zu nennen. Differentialgleichungssysteme für die genannten Probleme können sehr komplex sein und viele Variablen beinhalten, so dass ihre Berechnung nur mit hohem Computereinsatz möglich ist. Viele heutige Hochleistungsrechner sind primär mit dem Lösen von Differentialgleichungen ausgelastet.
Wir werden im Rahmen der Vorlesung nur einen kurzen Exkurs in den Bereich der Differentialgleichungen machen und nur sehr einfache Varianten kennen lernen. Aber auch an diesen einfachen Modellen kann man schon das grundsätzliche Vorgehen erkennen. Als Informatiker und Informatikerin sollte man zumindest eine Idee davon haben, wie solche Modellierungen und die zugehörigen Simulationen im Rechner ablaufen, auch wenn man nicht direkt mit der Entwicklung von Algorithmen in diesem Bereich beschäftigt ist.
Die Schreibweise $x(t)$ wird benutzt, um den Wert der Variablen x zum Zeitpunkt t zu bezeichnen. Ableitungen oder Funktionen $x(t), y(t), \ldots$ werden auch in Newtonscher Schreibweise mit

$$\dot{x}(t) := \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},\ \ddot{x}(t) := \frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} \quad \text{und kürzer mit} \quad \dot{x} := \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \text{ bzw. } \ddot{x} := \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

bezeichnet. Die Ableitung nach der Zeit (d.h. die Änderung des Variablenwertes mit der Zeit) wird durch einen Punkt über der Variablen beschrieben.

Definition 8.30. *Eine Gleichung der Form $f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots) = 0$ heißt* gewöhnliche Differentialgleichung *(DGL). Die Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung heißt die* Ordnung der DGL*.*

Anmerkung: Treten in der Gleichung auch sogenannte partielle Ableitungen (→ nächstes Kapitel) auf, so spricht man von partiellen DGL. Hier behandeln wir nur gewöhnliche DGL!

Zurück zum Beispiel der Ausbreitung einer Epidemie:
Die Änderungsrate der Infizierten war $x'(t) = c \cdot x(t)$ für $c > 0$ (bzw. $\dot{x} = c \cdot x$).
Gesucht ist $x(t)$ für $t \geq 0$ und $x(0) = 1$. Mit dem Ansatz

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = c \cdot x(t) \quad \text{bzw. kürzer} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c \cdot x$$

erhalten wir nach Multiplikation mit $\frac{\mathrm{d}t}{x}$ die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = c \cdot \mathrm{d}t$$

mit getrennten Variablen. Integration auf beiden Seiten liefert zunächst

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{y} &= c \cdot \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \quad \Leftrightarrow \\
\ln y\big|_{x_0}^{x} &= c \cdot s\big|_{t_0}^{t} \quad \Leftrightarrow \\
\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) &= c\,(t - t_0)
\end{aligned}$$

und schließlich nach Anwendung der Exponentialfunktion auf beiden Seiten die Gleichung

$$\frac{x}{x_0} = e^{c\,(t-t_0)}$$

und damit die Lösung

$$x(t) = x_0 \cdot e^{c\,(t-t_0)} \quad \text{bzw.} \quad x(t) = e^{c\,t}$$

nach Einsetzen der Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $t_0 = 0$.

8.6.1 Lineare DGL 1. Ordnung

Sei $x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$, wobei $a(t)$ und $b(t)$ gegebene stetige Funktion sind.
Falls $b(t) \equiv 0$, dann heißt die DGL homogen, sonst inhomogen.

- Lösung homogener DGL durch Trennung der Variablen:
  $x'(t) = a(t) \cdot x(t) \;\Leftrightarrow\; \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(t) \cdot x(t) \quad \Big| \cdot \frac{\mathrm{d}t}{x(t)}$
  $\Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x(t)} = a(t) \cdot \mathrm{d}t$
  Integration auf beiden Seiten liefert
  $\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s \qquad \Leftrightarrow \ln y\big|_{x_0}^{x} = \int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s$
  $\Leftrightarrow \ln \frac{x}{x_0} = A(t) - A(t_0) \quad \Leftrightarrow x(t) = x_0 \cdot e^{A(t)-A(t_0)}$ bzw. $x_0 \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right)$
  Wobei $A'(t) = a(t)$ gilt.

- Lösung inhomogener DGL durch Variation der Konstanten
  $x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$

Idee: in homogener Lösung Konstante x_0 zur Funktion $x_0(t)$ machen und behaupten, dass $\underbrace{x(t) = x_0(t) \cdot \varphi(t)}_{(*)}$ mit

$$\varphi(t) \overset{\varphi'(t)=a(t)\cdot\varphi(t)}{=} \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right) = e^{A(t)-A(t_0)}$$

Produktregel:

$x'(t) = x_0'(t)\cdot\varphi(t) + x_0(t)\cdot\varphi'(t) = x_0'(t)\cdot\varphi(t) + \underbrace{x_0(t)\cdot a(t)\cdot\varphi(t)}_{(*)=a(t)\cdot x(t)} \overset{!}{=} a(t)x(t) + b(t)$

$\Rightarrow x_0'(t) \overset{!}{=} \frac{b(t)}{\varphi(t)}$ $\Big|$ integrieren!

$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} x_0'(s)\,\mathrm{d}s = x_0(t) - \underbrace{x_0(t_0)}_{=:c_0} \overset{!}{=} \int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{\varphi(s)}\,\mathrm{d}s$ $\Big|$ einsetzen in $(*)$

$x(t) = \varphi(t) \cdot \left[c_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{\varphi(s)}\,\mathrm{d}s\right], \qquad c_0 := x_0(t_0) \overset{!}{=} x_0$

Beweis durch Ableiten:

$$x(t) = \varphi(t) \cdot \left[c_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{\varphi(s)}\,\mathrm{d}s\right] \qquad (**)$$

$$\begin{aligned}
x'(t) &= c_0 \cdot \varphi'(t) + \varphi'(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{\varphi(s)}\,\mathrm{d}s + \varphi(t) \cdot \frac{b(t)}{\varphi(t)} \\
&= \varphi'(t) \cdot \left[c_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{\varphi(s)}\,\mathrm{d}s\right] + b(t) \qquad \varphi'(t) = a(t)\cdot\varphi(t) \\
&= a(t) \cdot \underbrace{\varphi(t) \cdot \left[c_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{\varphi(s)}\,\mathrm{d}s\right]}_{x(t) \text{ wegen } (**)} + b(t) \\
&= a(t) \cdot x(t) + b(t)
\end{aligned}$$

Wir wollen nun diesen Ansatz verwenden, um die Lösung einer inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung zu bestimmen.

Beispiel 8.16. $x'(t) = \underbrace{2t}_{a(t)} \cdot x(t) + \underbrace{t^3}_{b(t)}$ *mit* $x(0) = x_0$

1. *Lösung der homogenen DGL*
   $\varphi(t) = \exp\left(\int_0^t 2s\,\mathrm{d}s\right) = \exp\left(\left[s^2\right]_0^t\right) = e^{t^2}$
2. *Lösung der inhomogenen DGL*
   $x(t) = \varphi(t) \cdot \left[x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{\varphi(s)}\,\mathrm{d}s\right] = e^{t^2} \cdot \left[x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{s^3}{e^{s^2}}\,\mathrm{d}s\right]$

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{t_0}^{t} \tfrac{s^3}{e^{s^2}}\,\mathrm{d}s &= \tfrac{1}{2}\cdot\int\limits_{t_0}^{t} u\cdot e^{-u}\,\mathrm{d}u \textit{ mit } u=s^2,\ \mathrm{d}u = 2s\cdot\mathrm{d}s \ \Rightarrow u\cdot\mathrm{d}u = 2s^3\mathrm{d}s\\
&\quad \textit{Wir lösen das Integral mit partieller Integration}\\
&\quad \int \tfrac{s^3}{e^{s^2}}\,\mathrm{d}s\\
&= \tfrac{1}{2}\left[-ue^{-u} + \int e^{-u}\,\mathrm{d}u\right] = \tfrac{1}{2}\left[-ue^{-u} - e^{-u}\right]\\
&= -\tfrac{1}{2}e^{-u}(u+1) = -\tfrac{1}{2}e^{-s^2}(s^2+1)
\end{aligned}
$$

Sei $t_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \int\limits_{0}^{t} \tfrac{s^3}{e^{s^2}}\,\mathrm{d}s &= \left[-\tfrac{1}{2}e^{-s^2}(s^2+1)\right]_0^t = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}e^{-t^2}(t^2+1)\\
\Rightarrow \quad x(t) &= e^{t^2}\cdot\left[x_0 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}e^{-t^2}(t^2+1)\right]
\end{aligned}
$$

8.6.2 Nichtlineare DGL

Auch für nichtlineare DGL können die uns bisher bekannten Methoden zum Erfolg führen.

Sei nun $x'(t) = a(t)\cdot g(x(t))$, wobei g stetig und nichtlinear.

Methode: Trennung der Variablen

Ansatz: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(t)g(x) \mid \cdot\frac{\mathrm{d}t}{g(x)}$
$\frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = a(t)dt \mid$ Integration auf beiden Seiten
$G(x) := \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int\limits_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s =: F(t)$
Dann $G(x)$ nach x auflösen (d.h. $x(t) = G^{-1}(F(t))$), falls es gelingt.

Beispiel 8.17. $x'(t) = e^{x(t)}\cdot\cos(t)$ *mit* $x(0) = x_0$ *und* $t_0 = 0$
$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\cos(t)}_{a(t)}\cdot\underbrace{e^x}_{g(x)}$, *also* $g(x) = e^x$

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{e^y} &&= \int\limits_{0}^{t} \cos(s)\,\mathrm{d}s\\
\Leftrightarrow\ &\left[-e^{-y}\right]_{x_0}^{x} &&= [\sin(s)]_0^t\\
\Leftrightarrow\ &-e^{-x} + e^{-x_0} &&= \sin(t) - \underbrace{\sin(0)}_{=0}\\
\Leftrightarrow\ &e^{-x} &&= e^{-x_0} - \sin(t) \qquad \mid \ln\\
\Leftrightarrow\ &-x &&= \ln(e^{-x_0} - \sin(t))\\
\Leftrightarrow\ &x(t) &&= -\ln(e^{-x_0} - \sin(t))
\end{aligned}
$$

Wenn eine Trennung der Variablen nicht möglich ist oder das Auflösen der Integrale nicht gelingt, so kann immerhin noch eine approximative, numerische Lösung erzeugt werden.

Methode: Numerische Lösung

$x'(t) = f(t, x(t))$ Ebene der Punkte (t, x)
für jeden Punkt (t, x) wird die Ableitung von $x(t)$ durch $f(t, x(t))$ gegeben.

Beispiel 8.18. $x'(t) = -x(t) + 1$
Richtungsfeld
Kennt man den Startwert (Anfangswert) $x(t_0)$*, dann kennen wir den Punkt* $(t_0, x(t_0))$ *und die Steigung* $f(t_0, x(t_0))$*, sodass für* $t + dt$ *der nächste Punkt* $x(t + dt)$ *bekannt ist.*
Streckenzugverfahren nach Euler
$x'(t) = f(t, x(t))$ *mit* $x(t_0) = x_0$
numerisch für Zeiten $t_0 \leq t \leq T$
Intervall $[t_0, T] \rightarrow$ *Zerlegung:* $t_i = t_0 + i\mathrm{d}t = t_0 + i \cdot \underbrace{\frac{T - t_0}{N}}_{=:h} \; i = 0, \ldots, N$

$x(t_1) = x(t_0 + h) \underbrace{\approx}_{Taylor} x(t_0) + \underbrace{x'(x_0)}_{f(t_0, x_0)} \cdot h$
Wir suchen: $x_1 = x_0 + f(t_0, x_0) \cdot h$
$x_{i+1} = x_i + f(t_i.x_i) \cdot h \; i = 0, \ldots, N - 1$

Das im Beispiel vorgestellte Verfahren bezeichnet man als Euler-Verfahren. Es gibt weitere und oftmals genauere oder effizientere Verfahren, die zusätzliche Terme der Taylor-Reihe zur Approximation der Funktion im Punkte $x + h$ bei bekanntem Wert an der Stelle x verwenden. Wir wollen es aber bei dieser sehr einfachen Einführung belassen.
Der Verlauf der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung lässt sich graphisch veranschaulichen. Sei $x'(t) = f(t, x(t))$. Dann beschreibt $(t, x(t))$ einen Punkt in der Ebene. Man kann jedem Punkt nun die Steigung (d.h. die Tangente) zuordnen. Anschaulich kann man dies, wie in Abbildung 8.5 gezeigt, durch einen Pfeil darstellen. Da damit jedem Punkt eine Richtung zugeordnet wird, spricht man auch von einem Richtungsfeld. Punkte mit identischer Tangentesteigung bezeichnet man als Isolinen. Eine Lösung für die Differentialgleichung erhält man dadurch, dass man ausgehend von einem Startpunkt eine Kurve zeichnet, die zu den Isoklinen *passt*, d.h. in jedem Punkt die entsprechende Steigung aufweist.

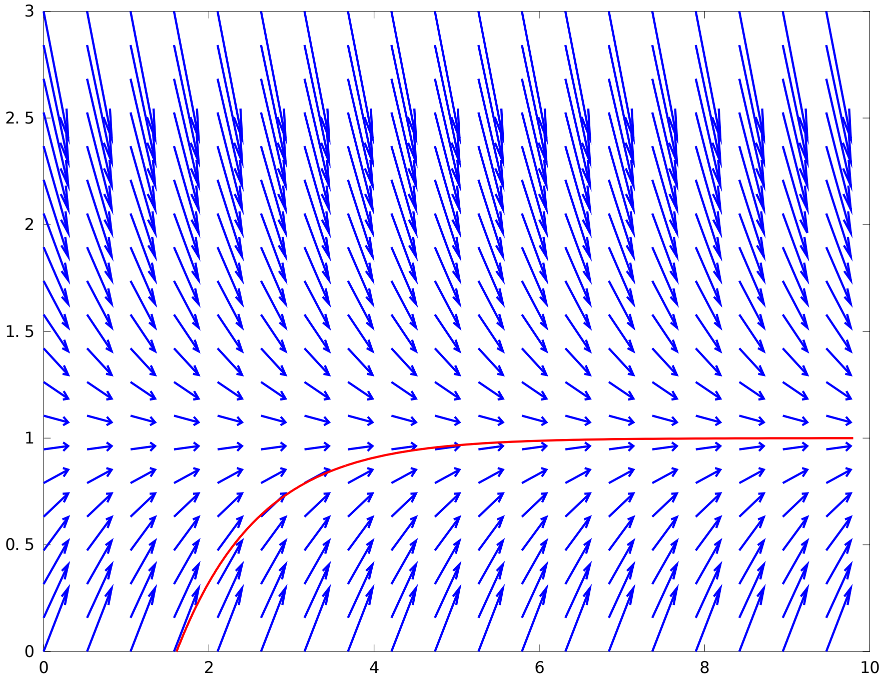


Abbildung 8.5: Richtungsfeld mit Isokline