Kapitel 6

Lösung von Gleichungen

In vielen Anwendungen tritt das Problem auf, für eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ die Nullstellen, also diejenigen x für die $f(x) = 0$ gilt, oder die Fixpunkte, also diejenigen x für die $f(x) = x$ gilt, zu berechnen. Beide Problemstellungen lassen sich ineinander überführen, so entspricht die Nullstelle der Funktion $f(x)$ dem Fixpunkt der Funktion $g(x) = f(x) - x$. Wir beschränken uns deshalb hier auf Methoden zur Bestimmung der Nullstellen einer Funktion.

Sie kennen bereits Verfahren, um für lineare oder auch quadratische Funktionen Nullstellen analytisch, also durch Anwendung vorgegebener Formeln, zu berechnen. Für komplexere Funktionen, also zum Beispiel Polynome höheren Grades, können Nullstellen in der Regel nicht mehr analytisch bestimmt werden, sondern sind numerisch zu berechnen. Die dazu verwendeten Verfahren sind meistens iterativ. Dies bedeutet, dass die Nullstellen schrittweise angenähert werden. Es können dabei zwei Probleme auftreten. Zum einen kann es vorkommen, dass ein Verfahren sich nicht kontinuierlich einer Nullstelle annähert, sondern sich nach einigen Schritten wieder davon entfernt. Man spricht dann davon, dass das Verfahren *divergiert*, wenn das Verfahren sich einer Nullstelle annähert, so spricht man davon, dass das Verfahren *konvergiert*. Auch wenn ein Verfahren konvergiert, können wir Nullstellen nicht mit beliebiger Genauigkeit berechnen, da wir bereits gesehen haben, dass Berechnungen nur mit endlicher Genauigkeit auf einem Rechner durchgeführt werden.

Es werden nur kurz zwei elementare Verfahren vorgestellt, das Gebiet der numerischen Lösung von Gleichungssystemen ist sehr breit und hat eine immense praktische Bedeutung in allen Natur- und Ingenieurwissenschaften.

Für stetige Funktionen können wir uns die folgende einfache Beobachtung zu Nutze machen. Wenn $a, b \in A$ mit $a < b$ und $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen haben, so gibt es mindestens ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = 0$. Dieses x können wir mit dem so genannten *regula-falsi*-Verfahren per Intervallschachtelung bestimmen.

Dazu werden die folgenden beiden Schritte iterativ durchgeführt. Wir nehmen an, dass $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, der Fall $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ ist analog zu realisieren.

1. Bestimme $c = b - f(b)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$.

2. Falls $f(c) < 0$ setze $a = c$ und fahre bei 1. fort, falls $f(c) > 0$, setze $b = c$ und fahre bei 1. fort, ansonsten ist c die gesuchte Nullstelle.

Da es unwahrscheinlich ist, dass genau der Punkt c mit $f(c) = 0$ gefunden wird, muss das Verfahren irgendwann abgebrochen werden. Dazu muss eine Abbruchbedingung definiert werden. Übliche Bedingungen sind $|f(c)| < \varepsilon$ oder $b - a < \varepsilon$ für ein kleines $\varepsilon > 0$.

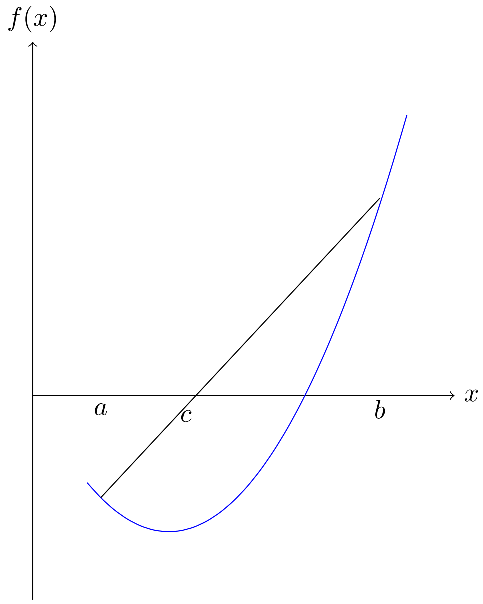

Abbildung 6.1: Skizze des regula-falsi-Verfahrens

Das grundsätzlich Vorgehen des Ansatzes wird in Abbildung 6.1 dargestellt. Es wird eine Gerade zwischen den beiden Funktionswerten gezogen (die Sekante) und der Schnittpunkt der Geraden mit der x Achse als Approximation der Nullstelle verwendet. Das Verfahren konvergiert für stetige Funktionen, wie wir sie hier betrachten immer gegen eine Nullstelle, die Konvergenz kann aber relativ langsam sein, d.h. es werden viele Schritte benötigt.
Als Alternative kann man statt der Sekante auch die Tangente in einem Punkt verwenden und deren Schnittstelle mit der x Achse als Approximation der Nullstelle nutzen. Dies führt zum Newton-Verfahren,bei dem eine Sequenz von Punkten $x_1, x_2, \ldots$ berechnet werden, die gegen die Nullstelle konvergieren sollen. D.h. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ sollte gelten. Ausgehend von einem Punkt x_n wird der nächste Punkt x_{n+1} wie folgt berechnet.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Ausgehend von einem Startwert x_0 können dann sukzessive Näherungslösungen berechnet werden. Das Vorgehen wird in Abbildung 6.2 verdeutlicht.

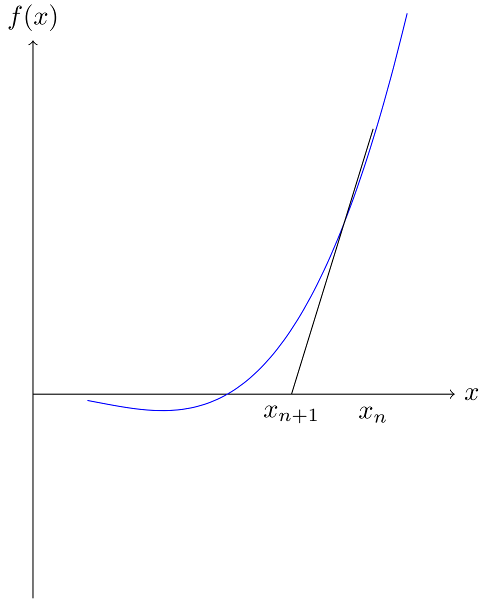

Abbildung 6.2: Skizze des Newton-Verfahrens

Das Newton-Verfahren konvergiert deutlich schneller als das regula-falsi-Verfahren, wenn es konvergiert. Dies bedeutet, dass je nach Funktion und Startwert, die berechneten x_n sich auch weiter von der Nullstelle entfernen können. Stellt man dies fest, so wird das Verfahren abgebrochen und ein neuer Startpunkt gesucht. Ein solcher Startpunkt kann z.B. mit Hilfe des regula-falsi-Verfahrens ermittelt werden. Es gibt Klassen von Funktionen, für die bekannt ist, dass das Newton-Verfahren konvergiert, dies gilt u.a. für konvexe oder konkave Funktionen.