Kapitel 5

Differenzierbare Funktionen

Die Differentialrechnung, die auf Leibniz und Newton zurückgeht, bildet den eigentlichen Kern der Analysis. Die Differentialrechnung ist die Basis für Differentialgleichungen mit denen sich viele Vorgänge in der Natur und in technischen Systemen modellieren lassen.
Wir betrachten in diesem Kapitel die Differentialrechnung mit einer Veränderlichen, wie sie auch in der Schule behandelt wird. Nach einer generellen Einführung, leiten wir die Ableitungsregeln her, führen höhere Ableitungen ein und nutzen schließlich die Ableitungen um Eigenschaften von Funktionen im Rahmen der Kurvendiskussion zu analysieren.

5.1 Differenzierbarkeit einer Funktion

Eine Funktion f lässt sich, falls $f(x) \to f(a)$ für $x \to a$ (a Häufungspunkt, bzw. f ist stetig in a), in der Umgebung von a durch eine konstante Funktion annähern. Dies ist gerade die Idee der Stetigkeit. Differenzierbarkeit nutzt eine bessere Art der Approximation durch ein Polynom statt einer konstante Funktion.

Definition 5.1 (Differenzierbarkeit)**.** *Sei $a \in A \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt* in a differenzierbar*, falls der Grenzwert*

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A \setminus \{a\}}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert.

Es wird in der Definition vorausgesetzt, dass eine Folge $a_k \in A \setminus \{a\}$ mit $\lim\limits_{k \to \infty} (a_k) = a$ existiert (d. h. a ist Häufungspunkt von A).
$f'(a)$ heißt die Ableitung von f in a. Man kann die Ableitung auch darstellen als

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

wobei wir nun Folgen h_k mit $h_k \neq 0$ und $x + h_k \in A$ zulassen. Eine Funktion f ist in einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbar, wenn f in jedem $a \in A$ differenzierbar ist.

Satz 5.2. *Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ ist in einem Häufungspunkt $a \in A$ genau dann differenzierbar, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass*

$$f(x) = f(a) + c \cdot (x - a) + r(x)$$

für $x \in A$. Wobei $r(x)$ eine Funktion mit der Eigenschaft $\lim\limits_{x \to a,\ x \neq a} \frac{r(x)}{x-a} = 0$ ist. Es gilt in diesem Fall $c = f'(a)$.

Beweis:

1. f sei in a differenzierbar.
Zu zeigen: c und $r(x)$ existieren.
Wir definieren $c = f'(a)$ und $r(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$. Es gilt dann

$$\frac{r(x)}{x-a} + f'(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Da $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existiert (da f differenzierbar), existiert auch $\lim\limits_{x \to a} \frac{r(x)}{x-a}$. Damit gilt

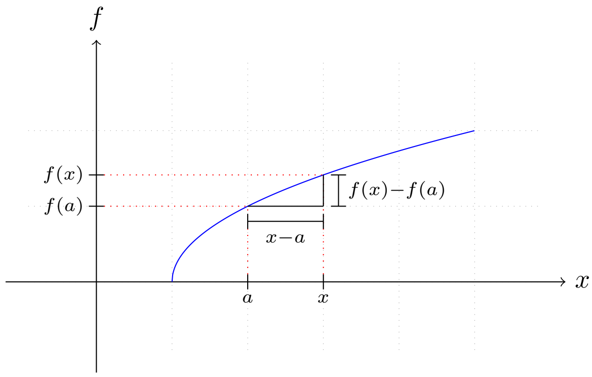
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{r(x)}{x-a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = 0.$$

2. c und $r(x)$ existieren.
Zu zeigen: f ist in a differenzierbar.
Es gilt

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - c \right) = \lim_{x \to a} \frac{r(x)}{x - a} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c.$$

Dies ist genau die Definition von Differenzierbarkeit und $c = f'(a)$. □

Man kann die Ableitung geometrisch interpretieren, da $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ der Sekante des Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$ entspricht. Beim Grenzübergang geht die Sekante in die Tangente im Punkt a, mit der Tangentengleichung $f(a) + f'(a)(x - a)$ über. Die folgende Graphik veranschaulicht diese Interpretation. Die Ableitung einer Funktion beschreibt damit eine lineare Approximation des Wachstums der Funktion in einem Punkt. Damit liefert die Ableitung einen Zusammenhang zwischen der Änderung der Variablen x und dem Funktionswert $f(x)$. Wenn x zum Beispiel die Zeit beschreibt und $f(x)$ die Bewegung über die Zeit, so ist die Ableitung gerade die Beschleunigung.



Es gibt alternative Schreibweisen für die Ableitung, die gerade im Bereich der Differentialgleichungen oft verwendet werden und insbesondere dann benutzt werden, wenn Funktionen mit mehr als einer Veränderlichen untersucht werden. Die Ableitung wird dann Bruch $\frac{df(x)}{dx}$ dargestellt. Diese Darstellung folgt aus der Grenzwertbetrachtung von $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ mit $\frac{df(x)}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. Streng genommen ist die Darstellung nicht unproblematisch, da man für $x = 0$ eigentlich nicht $\frac{df(0)}{d0}$ schreiben kann, wohl aber $f'(0)$. Alternativ werden deshalb teilweise die Formen $\frac{df}{dx}(0)$ oder $\frac{df(x)}{dx}\ |_{x=0}$ verwendet.

Beispiel 5.1. *In den folgenden Beispielen betrachten wir Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = cx$ $(c \in \mathbb{R})$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c(x+h) - cx}{h} = c$$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} && = \lim_{h\to 0} \tfrac{(x+h)^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{2xh+h^2}{h} && = \lim_{h\to 0} (2x+h) && = 2x \end{aligned}$$

4. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} && = \lim_{h\to 0} \left(\tfrac{1}{h} \cdot \left(\tfrac{1}{x+h} - \tfrac{1}{x}\right)\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{x-(x+h)}{hx(x+h)} && = \lim_{h\to 0} \tfrac{-1}{x(x+h)} && = -\tfrac{1}{x^2} \end{aligned}$$

5. $f(x) = \exp(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \exp'(\lambda x) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{\exp(\lambda(x+h)) - \exp(\lambda x)}{h} && = \lim_{h\to 0} \tfrac{\exp(\lambda x)\cdot(\exp(\lambda h)-1)}{h} \\ &= \exp(\lambda x) \cdot \lim_{h\to 0} \tfrac{\exp(\lambda h)-1}{h} && = \exp(\lambda x) \lim_{h\to 0} (\tfrac{1}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(\lambda h)^k}{k!} - 1) \\ &= \exp(\lambda x) \cdot \lim_{h\to 0} (\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{\lambda^k h^{k-1}}{k!}) && = \exp(\lambda x) \cdot \lambda \end{aligned}$$

Die letzte Umformung kann durchgeführt werden, da für $h \to 0$ alle Summanden mit Index $k \geq 2$ gegen 0 konvergieren und für $k = 1$ der Wert λ angenommen wird.

Der folgende Satz stellt eine Beziehung zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit her.

Satz 5.3 (Stetigkeit - Differenzierbarkeit)**.** *Ist die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ in $a \in A$ differenzierbar, so ist sie in a auch stetig.*

Beweis: Nach Satz 5.2 gilt dann $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) + \lim_{x\to a} c(x-a) + \lim_{x\to a} r(x) = f(a)$ □

Die Umkehrung von Satz 5.3 gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt!

Beispiel 5.2. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$*
$f(x)$ ist stetig in jedem $a \in \mathbb{R}$, da $\lim_{x\to a}(|x|) = |a|$ aber

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x| - |0|}{x} = \begin{cases} 1 & falls \quad x > 0 \\ -1 & falls \quad x < 0 \end{cases}$$

Damit ist $|x|$ im Punkt 0 nicht differenzierbar.

5.2 Differentiations-Regeln

Zur Berechnung der Ableitung einer Funktion wird man in den meisten Fällen nicht direkt auf die Grenzwertbildung zurückgreifen, sondern die Ableitung auf schon bekannte elementare Fälle zurückführen. Dazu werden die in diesem Abschnitt vorgestellten Ableitungsregeln verwendet.

Satz 5.4 (Algebraische Operationen)**.** *Seien $f, g : A \to \mathbb{R}$ in $a \in A$ differenzierbar und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f+g, c\cdot f, f\cdot g : A \to \mathbb{R}$ in a differenzierbar und es gelten folgende Rechenregeln:*

i) Linearität: $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)$

ii) Produktregel: $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

Ist ferner $g(x) \neq 0$ für alle $x \in A$, so ist auch die Funktion $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt:

iii) Quotientenregel: $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

Beweis:

i) Folgt direkt aus der Definition des Differenzenquotienten und den Regeln für Ableitungen.

ii) Es gilt

$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (\tfrac{1}{h}(f(a+h)(g(a+h)-g(a)) + (f(a+h)-f(a))g(a))) \\ &= \lim_{h\to 0} (f(a+h)\tfrac{g(a+h)-g(a)}{h}) + \lim_{h\to 0} (\tfrac{f(a+h)-f(a)}{h} g(a)) \\ &= f(a)g'(a) + f'(a)g(a)\end{aligned}$$

iii) Wir beweisen zuerst den Spezialfall $f = 1$.

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{1}{g}\right)'(a) &= \lim_{h\to 0} \left(\tfrac{1}{h}\left(\tfrac{1}{g(a+h)} - \tfrac{1}{g(a)}\right)\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\tfrac{1}{g(a+h)g(a)}\left(\tfrac{g(a)-g(a+h)}{h}\right)\right) \\ &= -\tfrac{g'(a)}{g(a)^2}\ .\end{aligned}$$

Allgemein gilt dann

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f\tfrac{1}{g}\right)'(a) \overset{\text{nach } ii)}{=} f'(a)\tfrac{1}{g(a)} + f(a)\tfrac{-g'(a)}{g(a)^2} \\ &= \tfrac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}\end{aligned}$$

□

Beispiel 5.3. *1.* $f_n(x) = x^n$ *(*$n \in \mathbb{N}$*)*

$f_n'(x) = nx^{n-1}$

Beweis: *Vollständige Induktion über* n*.*

Für $n = 0$ *und* $n = 1$ *wurde die Behauptung in den Beispielen 5.1.i) und 5.1.ii) in Abschnitt 5.1 gezeigt. Damit ist der Induktionsanfang bewiesen. Ferner sei* $f_{n-1}'(x) = (n-1)x^{n-2}$*.*

Sei $n \geq 2$*, dann lautet der Induktionsschritt:*

$$\begin{aligned}f_n(x) &= f_1(x)f_{n-1}(x) \\ f_n'(x) &= f_1'(x)f_{n-1}(x) + f_1(x)f_{n-1}'(x) = x^{n-1} + x(n-1)x^{n-2} \\ &= nx^{n-1}\end{aligned}$$

□

2. Polynomfunktionen

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$*,* $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$

$f(x)$ *ist differenzierbar in* $x \in \mathbb{R}$ *und es gilt:*

$$f'(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k k x^{k-1} & falls \quad n \geq 1 \\ 0 & falls \quad n = 0 \end{cases}$$

Der Beweis folgt aus Beispiel i) und der Summenregel.

3. $f(x) = \frac{1}{x^n}$, $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, $n \in \mathbb{N}$
Die Quotientenregel liefert:
$$f'(x) = \frac{-(nx^{n-1})}{(x^n)^2} = -nx^{-n-1} \ .$$

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$
$f'(x) = \sin'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \cos(x)$
Zum Beweis berechnen wir die Ableitung der Sinus-Reihe (Definition 4.31). Nach Satz 5.4.i) entspricht die Ableitung der Summe, der Summe der Ableitungen der einzelnen Summanden. Für die Ableitung der Summanden können wir die Ableitung von x^n (siehe 1.) verwenden.
$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)' &&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{(2k+1)x^{2k}}{(2k+1)!} \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{x^{2k}}{(2k)!} \right) &&= \cos(x) \end{aligned}$$

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$
$f'(x) = \cos'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{cos(x+h)-cos(x)}{h} = -\sin(x)$.
Zum Beweis bestimmen wir die Ableitung der Cosinus-Reihe(Definition 4.31). Nach Satz 5.4.i) entspricht die Ableitung der Summe, der Summe der Ableitungen der einzelnen Summanden. Für die Ableitung der Summanden können wir die Ableitung von x^n (siehe 1.) verwenden.
$$\begin{aligned} \cos'(x) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{x^{2k}}{(2k)!} \right)' &&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \tfrac{2k \cdot x^{2k-1}}{(2k)!} \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \tfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \right) &&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \tfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\ &= -\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) &&= -\sin(x) \end{aligned}$$

Die folgenden beiden Sätze erweitern die Ableitungsregeln um Regeln zur Bestimmung der Ableitung der Umkehrfunktion und komponierter Funktionen.

Satz 5.5 (Ableitung der Umkehrfunktion)**.** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, das aus mehr als einem Punkt besteht und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion und $g = f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ mit $J = f(I)$ deren Umkehrfunktion.*
Ist f in $a \in I$ differenzierbar und gilt $f'(a) \neq 0$, so ist g in $b = f(a)$ differenzierbar und es gilt:
$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))} \ .$$

Beweis: Sei $b_n \in J \setminus \{b\}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Wir setzen $a_n = g(b_n)$ (a_n existiert, da $b_n \in f(I)$).
Da g stetig ist (siehe Korollar 4.24), ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und da $g : J \to I$ bijektiv ist, ist $a_n \neq a$ für $b_n \neq b$. Es gilt
$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(b_n) - g(b)}{b_n - b} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a}{f(a_n) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Der Grenzwert existiert, da die Grenzwerte im Zähler und Nenner existieren. □

Satz 5.6 (Kettenregel)**.** *Seien* $f : A \to \mathbb{R}$ *und* $g : B \to \mathbb{R}$ *(*$A, B \subseteq \mathbb{R}$*) Funktionen. Sei* f *in* $a \in A$ *differenzierbar und* g *sei in* $b = f(a)$ *differenzierbar. Dann ist die zusammengesetzte Funktion* $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ *in Punkt* a *differenzierbar und es gilt*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) \ .$$

Beweis: Definiere Funktion $g^* : B \to \mathbb{R}$ durch

$$g^*(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(b)}{y-b} & , \text{ falls } y \neq b \\ g'(b) & , \text{ falls } y = b \ . \end{cases}$$

Da g in b differenzierbar ist, gilt

$$\lim_{y \to b} g^*(y) = g^*(b) = g'(b)$$

sowie

$$g(y) - g(b) = g^*(y) \cdot (y - b) \ .$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{g^*(f(x)) \cdot (f(x) - f(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} g^*(f(x)) \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= g'(f(a)) \cdot f'(a) \end{aligned}$$

□

Beispiel 5.4.

1. *Sei* $F(x) = f(ax + b)$ $(a, b \in \mathbb{R})$ *und seien* F *und* f *in* $\mathbb{R}$ *differenzierbar, dann gilt*
$$F'(x) = a \cdot f'(ax + b) \ .$$

2. *Sei* $F(x) = \exp(x^2)$*. Dann gilt*
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ g(y) &= \exp(y) \\ f'(x) &= 2x \\ g'(y) &= \exp(y) \\ F'(y) &= \exp(y^2) \cdot 2y \ . \end{aligned}$$

3. *Sei* $F(x) = \sqrt{x^2+2}$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2+2 \\ f'(x) &= 2x \\ g(y) &= \sqrt{y} \\ g'(y) &= \frac{1}{2\sqrt{y}} . \end{aligned}$$

Da $\lim_{y\to x} \frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{y-x} = \lim_{y\to x} \frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{(\sqrt{y}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{y}+\sqrt{x})} = \lim_{y\to x} \frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ *und damit* $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+2}} \cdot 2x$.

4. $f(x) = \ln(x)$, $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$.
$\ln(x)$ *ist die Umkehrfunktion von* $\exp(x)$. *Damit gilt nach Satz 5.5 mit* $f(x) = \exp(x)$ *und* $g(x) = \ln(x)$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x} .$$

5.3 Ableitungen höherer Ordnung

Die Idee der Ableitung einer Funktion kann rekursiv angewendet werden, indem man die Ableitung der Ableitung bildet, sofern diese existiert. Dies führt zu folgender Definition höherer Ableitungen.

Definition 5.7 (Ableitung höherer Ordnung)**.** *Sei* $f : A \to \mathbb{R}$ *mit* $A \subseteq \mathbb{R}$. *Dann ist die* k-te Ableitung *(oder* Ableitung k-ter Ordnung*) von* f *in* $a \in A$ *definiert als* $f^{(k)}(a)$ *(*f *oben* k, $k \in \mathbb{N}_0$*) mit*

1. $f^{(0)}(a) = f(a)$

2. $f^{(k+1)}(a) = (f^{(k)}(a))' : A \to \mathbb{R}$, *falls die Ableitung von* $f^{(k)}(a)$ *in* $a \in A$ *existiert.*

Für $f : A \to \mathbb{R}$ benutzt man die Schreibweise $f^{(k)}$, wenn die k-te Ableitung für alle $a \in A$ existiert. Eine Funktion heißt k-mal differenzierbar, wenn $f^{(k)}$ existiert. Die Funktion f heißt k-mal stetig differenzierbar, wenn f k-mal differenzierbar ist und $f^{(k)}$ stetig ist. Man schreibt auch

$$\frac{d^k f(x)}{dx^k}$$

für die k-te Ableitung im Punkt x. Es wird ferner manchmal auch die Schreibweise $(f(x))^{(k)}$ verwendet.
Wie schon bei der ersten Ableitung lassen sich auch für höhere Ableitungen Regeln für zusammengesetzte Funktionen herleiten, die im folgenden Satz zusammengefasst werden.

Satz 5.8 (Operationen auf Ableitungen)**.** *Sei* $k \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$, $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ *und seien* $f : A \to \mathbb{R}$ *und* $g : A \to \mathbb{R}$ k*-mal differenzierbar.*

1. *Dann sind* $f+g$, $f-g$, $c \cdot f$, $f \cdot g$ *und falls* $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in A$ $\frac{f}{g}$ k*-mal differenzierbar und es gilt:*

i) $(f+g)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) + g^{(k)}(a)$

ii) $(f-g)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - g^{(k)}(a)$

iii) $(cf)^{(k)}(a) = cf^{(k)}(a)$

iv) $(fg)^{(k)}(a) = \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)}(a) \cdot g^{(k-i)}(a)$ *(Leibnizsche Formel)*

v) $\left(\frac{f}{g}\right)^{(k)}(a) = \frac{f^{(k)}(a) - \sum\limits_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \left(\frac{f}{g}\right)^{(i)}(a) g^{(k-i)}(a)}{g(a)}$

2. *Ist ferner $f(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ k-mal differenzierbar, so ist auch $(g \circ f)$ k-mal differenzierbar.*

Beweis: Der Beweis erfolgt durch rekursive Anwendung der Differentiationsregeln für die erste Ableitung. □

Für die Kettenregel haben wir keine allgemeine Form für Ableitungen höherer Ordnung angegeben, da diese sehr schnell unübersichtlich wird und damit nicht hilfreich ist.

Beispiel 5.5.

$$f(x) = x^n \qquad \textit{mit } n \in \mathbb{N}_0 \textit{ und } x \in \mathbb{R}$$

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} k!\binom{n}{k} x^{(n-k)} , & \textit{falls } 0 \leq k \leq n \\ 0 , & \textit{falls } k > n \end{cases}$$

Beweis: Per Induktion über k:

$k = 0$:

$$f(x) = x^n = 0!\binom{n}{0} x^{n-0} = x^n$$

Sei $f^{(k)}(x) = k!\binom{n}{k} x^{n-k}$. $k \to (k+1)$:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x) &= \begin{cases} (k!\binom{n}{k} x^{n-k})' , & \text{falls } 0 \leq k \leq n \\ 0 , & \text{falls } k > n \end{cases} \\ &= \begin{cases} k!\binom{n}{k}(n-k) x^{n-k-1} , & \text{falls } 0 \leq k < n \\ k!\binom{n}{k} 0 , & \text{falls } k = n \\ 0 , & \text{falls } k > n \end{cases} \\ &= \begin{cases} (k+1)!\binom{n}{k+1} x^{n-(k+1)} , & \text{falls } 0 \leq k+1 \leq n \\ 0 , & \text{falls } k+1 > n \end{cases} \end{aligned}$$

Der Übergang vom vorletzten zum letzten Schritt gilt, da

$$k! \cdot \binom{n}{k} \cdot (n-k) = \frac{k! \cdot n! \cdot (n-k)}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n! \cdot (k+1)!}{(n-k-1)! \cdot (k+1)!} = (k+1)! \cdot \binom{n}{k+1}$$

□

Bevor wir uns anschauen, wozu man (höhere) Ableitungen bei der Analyse von Funktionen verwenden kann, wird im nächsten Abschnitt kurz auf die Berechnung der Ableitung einer beliebigen Funktion eingegangen.

5.4 Numerisches Differenzieren

Mit Hilfe numerischer Software sind Ableitungen numerisch berechnenbar. Die Berechnung erfolgt für allgemeine Funktionen in der Regel ohne eine symbolische Bestimmung der Stammfunktion. Da die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten definiert ist, liegt folgende Approximation nahe:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{5.4.1}$$

oder

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{5.4.2}$$

In beiden Fällen ist eine festes $h \neq 0$ zu wählen, um die Approximation zu berechnen. Dabei wird, da nicht der Grenzwert für $h \to 0$ berechnet wird, ein Fehler gemacht. Es stellt sich nun die Frage, wie groß der auftretende Fehler ist und wie h zu wählen ist, damit de Fehler möglichst gering ist. Es gibt zwei Arten von Fehlern die sich überlagern.

1. **Approximationsfehler:** Für ein festes $h > 0$ gilt

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta} \right|$$

Der Fehler ist abhängig von h und f, und wird in der Regel kleiner, wenn h reduziert wird.

2. **Rundungsfehler:** Siehe auch Abschnitt 2.4.

Wir nutzen nicht x sondern $\mathrm{rd}(x)$, wobei $\mathrm{rd}(x)$ die nächste darstellbare Zahl ist. Es gilt $\mathrm{rd}(x) := x \cdot (1 + \varepsilon) = x + \varepsilon x$ mit $|\varepsilon| \leq \mathsf{eps}$. Die Konstante eps ist die relative Maschinengenauigkeit der gewählten Zahlendarstellung.

Wir untersuchen kurz, was bei der Berechnung von (5.4.1) oder (5.4.2) passiert. Da $\lim_{h \to 0}(f(x+h)) - f(x) = 0)$ gilt, wird mit fallenden h der Wert im Zähler immer kleiner und damit, da eps vorgegeben ist, der relative Fehler immer größer. Zusätzlich wird durch die Division durch den kleinen Nenner auch der absolute Fehler immer größer und der Rundungsfehler wächst für kleiner werdende h.
Damit kann man zwei gegenläufige Tendenzen beobachten, einen mit fallendem h fallenden Approximationsfehler und einen mit fallendem h wachsenden Rundungsfehler.

Beispiel 5.6. *Wir betrachten die Funktion $f(x) = \exp(x)$ und berechnen $\exp'(1)$. Es ist bekannt, dass $\exp(1) = \exp'(1) = 2.7182818\ldots$ gilt. Die folgende Tabelle zeigt das Resultat der Berechnung*

$$\exp'(1) \approx \frac{\exp(1+h) - \exp(1)}{h} \, ,$$

die mit der Software octave *durchgeführt wurde, für verschiedene Werte von h.*

h	Berechneter Wert	Fehler
$1{,}0 \cdot 10^{+0}$	4,670 774 270 471 605 8	$1{,}952\,492\,442\,012\,560\,7 \cdot 10^{+0}$
$1{,}0 \cdot 10^{-2}$	2,731 918 655 787 124 5	$1{,}363\,682\,732\,807\,935\,9 \cdot 10^{-2}$
$1{,}0 \cdot 10^{-4}$	2,718 417 747 082 924 1	$1{,}359\,186\,238\,789\,611\,4 \cdot 10^{-4}$
$1{,}0 \cdot 10^{-6}$	2,718 283 187 430 614 1	$1{,}358\,971\,569\,054\,290\,3 \cdot 10^{-6}$
$1{,}0 \cdot 10^{-8}$	2,718 281 821 856 293 9	$-6{,}602\,751\,234\,652\,259\,9 \cdot 10^{-9}$
$1{,}0 \cdot 10^{-10}$	2,718 283 376 168 527 9	$1{,}547\,709\,482\,796\,477\,7 \cdot 10^{-6}$
$1{,}0 \cdot 10^{-12}$	2,718 714 142 702 082 9	$4{,}323\,142\,430\,378\,013\,0 \cdot 10^{-4}$
$1{,}0 \cdot 10^{-14}$	2,708 944 180 085 381 5	$-9{,}337\,648\,373\,663\,576\,3 \cdot 10^{-3}$
$1{,}0 \cdot 10^{-16}$	0,000 000 000 000 000 0	$-2{,}718\,281\,828\,459\,045\,1 \cdot 10^{+0}$

Ähnliche Ergebnisse erhält man für die Berechnung

$$\exp'(1) \approx \frac{\exp(1+h) - \exp(1-h)}{2h} ,$$

wie die folgende Tabelle zeigt.

h	Berechneter Wert	Fehler
$5{,}0 \cdot 10^{-1}$	2,832 967 799 637 936 3	$1{,}146\,859\,711\,788\,912\,3 \cdot 10^{-1}$
$5{,}0 \cdot 10^{-3}$	2,718 293 154 647 444 3	$1{,}132\,618\,839\,916\,332\,8 \cdot 10^{-5}$
$5{,}0 \cdot 10^{-5}$	2,718 281 829 592 328 3	$1{,}133\,283\,245\,025\,040\,7 \cdot 10^{-9}$
$5{,}0 \cdot 10^{-7}$	2,718 281 828 517 632 0	$5{,}858\,691\,309\,867\,936\,1 \cdot 10^{-11}$
$5{,}0 \cdot 10^{-9}$	2,718 281 821 856 293 9	$-6{,}602\,751\,234\,652\,259\,9 \cdot 10^{-9}$
$5{,}0 \cdot 10^{-11}$	2,718 283 376 168 527 9	$1{,}547\,709\,482\,796\,477\,7 \cdot 10^{-6}$
$5{,}0 \cdot 10^{-13}$	2,718 270 053 492 232 8	$-1{,}177\,496\,681\,226\,131\,2 \cdot 10^{-5}$
$5{,}0 \cdot 10^{-15}$	2,753 353 101 070 387 8	$3{,}507\,127\,261\,134\,268\,5 \cdot 10^{-2}$
$5{,}0 \cdot 10^{-17}$	0,000 000 000 000 000 0	$-2{,}718\,281\,828\,459\,045\,1 \cdot 10^{+0}$

Die Resultate bestätigen unsere Erwartungen. Für kleine und große Werte ist die Approximation der Ableitung sehr ungenau. Die beste Approximation erreichen wir im Bereich von 10^{-8} für die erste Approximation und $5 \cdot 10^{-7}$ für die zweite Approximation.

Aus dem bisherigen Beobachtungen kann man folgende generellen Aussagen ableiten:

1. Für eine feste Zahlendarstellung kann nur eine bestimmte funktionsabhängige Genauigkeit erreicht werden.

2. Das optimale h hängt von der Zahlendarstellung, der Funktion und der Approximation der Ableitung ab. In unserem Fall sind $h \approx \sqrt{\mathsf{eps}} \approx 10^{-8}$ beziehungsweise $h \approx \sqrt[3]{\mathsf{eps}} \approx 10^{-5}$ gute Werte.

Die ausführlichere Analyse von Approximationfehlern ist Thema der Numerik und geht über den Inhalt dieser Vorlesung weit hinaus.

5.5 Lokale Extrema und Mittelwertsätze

Wir wollen nun mit Hilfe der Ableitungen von Funktionen deren Eigenschaften analysieren. Dazu wird eine Reihe von Sätzen hergeleitet, die das Verhalten von Funktionen auf Intervallen beschreiben. Zuerst definieren wir den Begriffe des lokalen Extremums.

Definition 5.9 (Lokale Extrema)**.** *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann hat f in $x \in (a, b)$ ein* lokales Maximum *(bzw.* lokales Minimum*), wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $f(x) \geq f(y)$ (bzw. $f(x) \leq f(y)$) für alle y mit $|x - y| < \varepsilon$ gilt.*
Gilt sogar $f(x) > f(y)$ (bzw. $f(x) < f(y)$) für alle $y \neq x$ mit $|x - y| < \varepsilon$ so spricht man von einem strikten lokalen Maximum *(bzw.* striktem lokalen Minimum*).*

Extremum ist der Oberbegriff für Minimum und Maximum. Während ein striktes lokales Extremum beschreibt, dass ein Funktionswert größer oder kleiner als alle Punkte in der Umgebung ist, wird der Begriff striktes absolutes Extremum (oder striktes globales Extremum) für Punkte benutzt, deren Funktionswerte größer oder kleiner als alle anderen Funktionswerte sind. Für $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist $x \in (a, b)$ ein striktes absolutes Maximum falls $f(x) > f(y)$ für alle $y \in (a, b)$ und $y \neq x$. Analog kann man strikte absolute Minima, sowie absolute Minima und Maxima definieren. Jedes (strikte) absolute Extremum ist gleichzeitig auch (striktes) lokales Extremum. Wir werden Bedingungen für lokale Extrema herleiten, da nur diese auf Basis der Ableitung, die das Verhalten einer Funktion in der Umgebung eines Punktes beschreiben, bestimmt werden können. Die Bestimmung globaler Minima ist nur in bestimmten Funktionsklassen möglich und geht über den Inhalt dieser Vorlesung hinaus.

Satz 5.10 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)**.** *Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ besitze im Punkt $x \in (a, b)$ ein lokales Extremum und sei in x differenzierbar. Dann ist $f'(x) = 0$.*

Beweis: Die Funktion f in x ein lokales Maximum, dann existiert $\varepsilon > 0$, sodass $f(y) \leq f(x)$ für alle $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ gilt. Damit gilt auch

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \underbrace{\lim_{y \nearrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}}_{\geq 0} = \underbrace{\lim_{y \searrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}}_{\leq 0}$$

Woraus $f'(x) = 0$ folgt, da beide Grenzwerte für differenzierbare Funktionen übereinstimmen.
Der Beweis für lokale Minima ist analog zu führen. □

Die Bedingung $f'(x) = 0$ ist nicht hinreichend, wie die Funktion $f(x) = x^3$ zeigt, für die in $x = 0$ zwar $f'(0) = 0$ gilt, die aber im Punkt 0 kein Extremum hat.
Ferner ist zu beachten, dass wir die Funktion f über dem offenen Intervall (a, b) untersucht haben. Wenn wir $f : [a, b] \Rightarrow \mathbb{R}$ untersuchen, so folgt aus Satz 4.21 zwar, dass die Funktion, falls sie stetig ist, ihre Minimum und Maximum im Intervall annimmt. Wenn das Minimum oder Maximum aber in einem der beiden Randpunkte angenommen wird, so ist dort die erste Ableitung nicht notwendigerweise gleich 0, wie man sich leicht überlegen kann.
Die nun folgenden Sätze beschäftigen sich mit dem Verhalten von Funktionen in Intervallen, wenn Informationen über die Randpunkte vorliegen. Wir betrachten dabei oft Funktionen die auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ definiert sind und im offenen Intervall (a, b) differenzierbar sind. Damit $f'(x)$ nur für $x \in (a, b)$ definiert. Um die Intervallgrenzen einzubeziehen, müssten wir den Ableitungsbegriff erweitern, was wir aber im Rahmen dieser Vorlesung nicht tun werden.

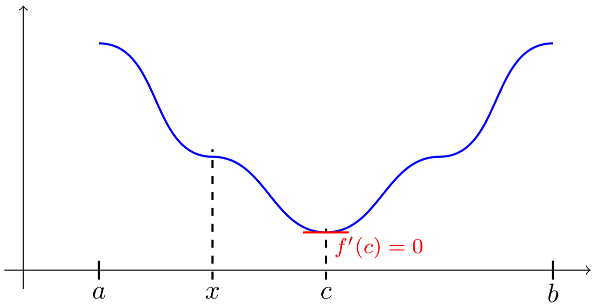


Abbildung 5.1: Veranschaulichung von Satz 5.11

Satz 5.11 (Satz von Rolle)**.** *Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$. Die Funktion f sei in (a, b) differenzierbar. Dann existiert eine $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$.*

Beweis: Falls f konstant, so gilt $f'(c) = 0$ für alle $c \in (a, b)$.
Ist f nicht konstant, so gibt es ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) < f(a)$ oder $f(x) > f(a)$. Damit wird ein (absolutes) Extremum in einem Punkt $c \in (a, b)$ angenommen und $f'(c) = 0$ (nach Satz 5.10). □

Satz 5.12 (Mittelwertsatz)**.** *Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in (a, b) differenzierbar ist. Dann existiert ein $c \in (a, b)$, sodass $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.*

Beweis: Definiere eine Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, mit $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. g ist stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b) und $g(b) = f(a) = g(a)$. Dann existiert nach Satz 5.11 ein $c \in (a, b)$ mit $g'(c) = 0$. Aus $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ folgt die Behauptung. □

Den Mittelwertsatz kann man geometrisch interpretieren. Die Steigung der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ entspricht der Steigung der Tangente im Punkt $(c, f(c))$, wie die folgende Graphik zeigt.

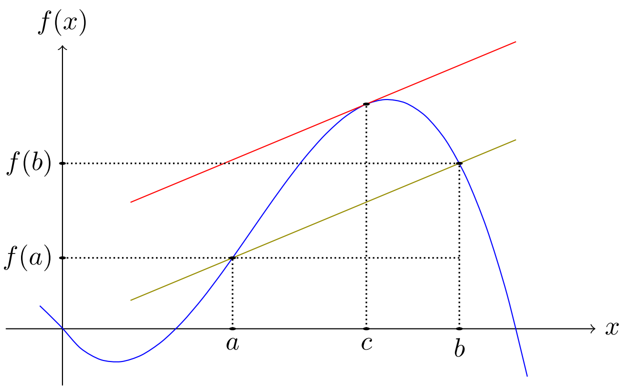


Abbildung 5.2

Aus dem Mittelwertsatz folgt unmittelbar das folgende Korollar, mit dem man Schranken für das Wachstum einer Funktion herleiten kann.

Korollar 5.13. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und in (a,b) differenzierbare Funktion. Für die Ableitung gelte $K^- \leq f'(x) \leq K^+$ für alle $x \in (a,b)$ mit $K^-, K^+ \in \mathbb{R}$. Für alle $c, d \in [a,b]$ mit $c \leq d$ gilt $K^-(d-c) \leq f(d) - f(c) \leq K^+(d-c)$*

Mit Hilfe der Ableitungen lassen sich auch Aussagen über die Monotonie von Funktionen gewinnen.

Satz 5.14 (Monotonie von Funktionen)**.**
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Dann gilt:

i) $\forall x \in (a,b) : f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ *monoton wachsend in* $[a,b]$

ii) $\forall x \in (a,b) : f'(x) > 0 \Rightarrow f$ *streng monoton wachsend in* $[a,b]$

iii) $\forall x \in (a,b) : f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ *monoton fallend in* $[a,b]$

iv) $\forall x \in (a,b) : f'(x) < 0 \Rightarrow f$ *streng monoton fallend in* $[a,b]$

Beweis:

i) Sei $c, d \in [a,b]$ mit $c < d$. Der Mittelwertsatz (Satz 5.12) angewendet auf das Intervall $[c,d]$ liefert ein $y \in (c,d)$ mit $f'(y) = \frac{f(d)-f(c)}{d-c}$.
Sei nun $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann folgt $\frac{f(d)-f(c)}{d-c} \geq 0$ für alle $d > c$, $c, d \in [a,b]$ und damit auch $f(d) - f(c) \geq 0$ und die Funktion ist monoton wachsend. Damit ist eine Richtung bewiesen.

Nehmen wir nun an, dass f monoton wachsend in $[a,b]$ ist. Dann gilt für jedes $y \in (a,b)$ $f'(y) = \lim\limits_{x \to y} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0$. Daraus folgt durch den Grenzübergang $f'(y) \geq 0$ und damit der Beweis für die andere Richtung.

Die Beweise für *ii)*, *iii)* und *iv)* sind analog zu führen, wobei zu beachten ist, dass in den Fällen *ii)* und *iv)* nur eine Richtung bewiesen werden muss und kann. ☐

Es sollte beachtet werden, dass in dem vorherigen Satz nur die beiden Aussagen *i)* und *iii)* genau-dann-wenn-Beziehungen sind, d. h. dass die Folgerungen in beide Richtungen gelten. Für die beiden Punkte *ii)* und *iv)* gilt nur die Folgerung von links nach rechts. Dies kann man sich leicht anhand der Funktion $f(x) = x^3$ überlegen. Zwar ist mit $f'(0) = 0$ für diese Funktion, trotzdem ist die Funktion streng monoton wachsend.
Aus den vorherigen Sätzen können wir nun eine hinreichende Bedingung für strenge lokale Extrema herleiten.

Satz 5.15 (Strenges lokales Maximum/Minimum)**.** *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die im Punkt $x \in (a,b)$ zweimal differenzierbar ist. Falls $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ (bzw. $f''(x) < 0$), dann besitzt f in x ein strenges lokales Minimum (bzw. Maximum).*

Beweis: Wir beweisen den Satz für strenge lokale Minima. Sei $f''(x) > 0$. Da $f''(x) = \lim\limits_{y \to x} \frac{f'(y)-f'(x)}{y-x} > 0$ ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $\frac{f'(y)-f'(x)}{y-x} > 0$ für alle $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Da ferner $f'(x) = 0$ folgt $f'(y) < 0$ für $y \in (x-\varepsilon, x)$ und $f'(y) > 0$

für $y \in (x, x+\varepsilon)$. Nach Satz 5.14 *iii)*, *iv)* ist f damit streng monoton fallend in $(x-\varepsilon, x)$ und streng monoton wachsend in $(x, x+\varepsilon)$. Damit muss f in x ein strenges lokales Minimum besitzen.
Der Beweis für strenge lokale Maxima ist analog zu führen. □

Die Bedingungen sind nur hinreichend, aber nicht notwendig. Wie man an der Funktion $f(x) = x^4$ sieht. Diese besitzt in $x = 0$ ein strenges Minimum, trotzdem ist $f''(0) = 0$. Eine hinreichendes Kriterium für lokale Extrema liefert der folgende Satz, den wir ohne Beweis einführen Der Beweis basiert auf der Taylor-Reihenentwicklung, die wir in Kapitel 7 kurz einführen werden.

Satz 5.16. *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die im Punkt $x \in (a,b)$ $n+1$mal differenzierbar ist. Falls $f'(x) = f^{(2)}(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = 0$ und $f^{(n+1)}(x) \neq 0$, dann besitzt f in x*

i) ein strenges lokales Minimum, falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x) > 0$,

ii) ein strenges lokales Maximum, falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x) < 0$,

iii) kein Extremum, falls n gerade ist.

Ein Punkt dem sich das Vorzeichen der zweiten Ableitung ändert bezeichnet man auch als Wendepunkt. Formal bedeutet dies, dass Funktion f in $x \in A$ einen Wendepunkt besitzt, falls $f''(x) = 0$ und $f''(y) < 0$ sowie $f''(z) > 0$ für entweder $y \in (x-\varepsilon, x)$, $z \in (x, x+\varepsilon)$ oder $z \in (x-\varepsilon, x)$, $y \in (x, x+\varepsilon)$, sowie $\varepsilon > 0$.
Eine wichtige Eigenschaft von Funktionen ist die Konvexität, die wie folgt definiert wird.

Definition 5.17. *Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt* konvex*, wenn für alle $x_1, x_2 \in (a,b)$ und alle $\lambda \in (0,1)$ gilt*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Die Funktion heißt konkav*, falls $-f$ konvex ist.*

Abbildung 5.3 zeigt die Skizze einer konvexen Funktion. Die Funktion „hängt nach unten durch“, d.h. die Funktionswerte liegen unterhalb der Verbindungsgeraden zwischen den Funktionswerten an den Intervallgrenzen. Konvexe Funktionen haben einige sehr angenehme Eigenschaften, so fallen zum Beispiel lokale und globale Minima bei diesen Funktionen zusammen. Dies kann bei der Optimierung, d.h. dem Finden von globalen Extrema, genutzt werden.

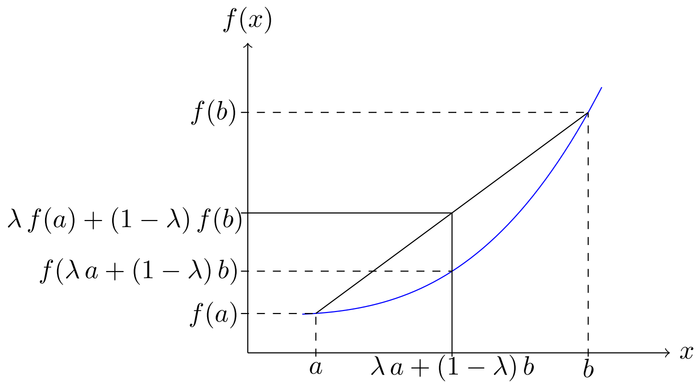


Abbildung 5.3: Skizze einer konvexen Funktion

Der folgende Satz stellt eine Zusammenhang zwischen der Konvexität und der zweiten Ableitung einer Funktion her.

Satz 5.18. *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. f ist genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$.*

Beweis: Sei $f''(x) \geq 0$ für all $x \in (a, b)$. Dann ist f' nach Satz 5.14 monoton wachsend. Sei $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ für $x_1, x_2 \in (a, b)$ mit $x_1 < x_2$ und $0 < \lambda < 1$, dann gilt offensichtlich $x_1 < x < x_2$. Nach Satz 5.12 existieren dann $y_1 \in (x_1, x)$ und $y_2 \in (x, x_2)$ mit

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(y_1) \leq f'(y_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Da $x - x_1 = (1-\lambda)(x_2 - x_1)$ und $x_2 - x = \lambda(x_2 - x_1)$ folgt

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{1-\lambda} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{\lambda} \quad \Rightarrow f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Damit ist die Funktion konvex.
Sei nun f konvex. Angenommen es gäbe ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f''(x_0) < 0$. Sei $c = f'(x_0)$ und $g(x) = f(x) - c(x - x_0)$. g ist zweimal differenzierbar und $g'(x_0) = 0$ sowie $g''(x_0) = f''(x_0) < 0$. Damit besitzt g nach Satz 5.15 an der Stelle x_0 ein strenges lokales Maximum. Es gibt damit ein $\varepsilon > 0$, so dass $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$ und $g(x_0 - \varepsilon) < g(x_0)$, $g(x_0 + \varepsilon) < g(x_0)$. Aufgrund der Definition von g folgt damit auch

$$f(x_0) = g(x_0) > \frac{1}{2}\left(g(x_0 - \varepsilon) + g(x_0 + \varepsilon)\right) = \frac{1}{2}\left(f(x_0 - \varepsilon) + f(x_0 + \varepsilon)\right).$$

Wähle nun $x_1 = x_0 - \varepsilon$, $x_2 = x_0 + \varepsilon$ und $\lambda = \frac{1}{2}$. Dann $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ und

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Dies steht im Widerspruch zur Konvexität von f. □

Wir leiten nun noch einige Ergebnisse her, die es manchmal erlauben Grenzwerte von Funktionen einfacher zu bestimmen. Dazu beginnen wir mit einer Erweiterung des Mittelwertsatzes.

Satz 5.19 (Zweiter Mittelwertsatz)**.** *Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar sind. Sei ferner $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es existiert ein $c \in (a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.*

Beweis:

i) Wir beweisen zuerst $g(a) \neq g(b)$.
Wäre $g(a) = g(b)$, so gäbe es nach Satz 5.11 (Satz von Rolle) ein $c \in (a,b)$ mit $g'(c) = 0$, was aber laut Voraussetzung ausgeschlossen ist.

ii) Für die Hilfsfunktion $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$ gilt $h(a) = h(b) = f(a)$. Damit existiert nach Satz 5.11 (Satz von Rolle) $c \in (a,b)$ mit $h'(c) = 0$ und somit gilt $h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0$.

Da $g'(c) \neq 0$ folgt die Behauptung. □

Eine Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes ist die Regel von L'Hospital.

Satz 5.20 (Regel von L'Hospital $\frac{0}{0}$)**.** *Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei auf $[a,b]$ stetige und auf (a,b) differenzierbare Funktionen. Sei $c \in [a,b]$ und $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a,b) \setminus \{c\}$.*
Gilt $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ und existiert $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$, so existiert auch $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beweis: Wir definieren zwei Funktionen

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in [a,b] \setminus \{c\} \\ 0 & \text{falls } x = c \end{cases} \quad \text{und } G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{falls } x \in [a,b] \setminus \{c\} \\ 0 & \text{falls } x = c \end{cases}$$

F und G sind stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar in $(a,b) \setminus \{c\}$, da f und g diese Eigenschaften aufweisen. Ferner ist $F'(x) = f'(x)$ und $G'(x) = g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b) \setminus \{c\}$.
Wir zeigen zuerst, dass $G(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b) \setminus \{c\}$ gilt. Gäbe es ein $x \in (a,b) \setminus \{c\}$ mit $G(x) = G(c) = 0$, so würde nach Satz 5.11 angewendet auf das Intervall $[x,c]$ falls $x < c$ (und $[c,x]$ falls $x > c$) folgen, dass ein $y \in [x,c]$ mit $G'(y) = 0$ und damit $g'(y) = 0$ existiert, was aber der Annahme $g'(y) \neq 0$ für alle $y \in (a,b)$ widerspricht.
Sei nun $x_0 \in (a,b) \setminus \{c\}$ vorgegeben. Wir nehmen an, dass $x_0 < c$, und betrachten das Intervall $[x_0, c]$. Der Fall $x_0 > c$ ist analog zu behandeln. Es existiert dann ein $x_1 \in (x_0, c)$, sodass

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \underbrace{\frac{F(x_0) - F(c)}{G(x_0) - G(c)}}_{\text{da } F(c)=G(c)=0} \underset{(\text{Satz } 5.19)}{=} \frac{F'(x_1)}{G'(x_1)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}$$

Ausgehend von x_1 kann man nun ein $x_2 \in (x_1, c)$ finden, so dass $\frac{f(x_1)}{g(x_1)} = \frac{F(x_1)-F(c)}{G(x_1)-G(c)} = \frac{F'(x_2)}{G'(x_2)} = \frac{f'(x_2)}{g'(x_2)}$. Diesen Prozess kann man beliebig weiter fortführen. Sei $\xi(x_i)$ eine Funktion, die zu x_i den Wert von $x_{i+1} \in (x_i, c)$ berechnet.

Die Funktion ξ kann man auf beliebige $x \in (a,c)$ anwenden und es gilt $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}$ und $|c - \xi(x)| < |c - x|$. Damit gilt auch $\lim\limits_{x\to c} \xi(x) = c$ und somit auch

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{F(x) - F(c)}{G(x) - G(c)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \frac{f'(c)}{g'(c)} . \qquad \square$$

Bevor wir eine zweite Version der Regel von L'Hospital betrachten, muss der Begriff des Grenzwertes erweitert werden. Wir definieren dazu uneigentliche Grenzwerte.

Definition 5.21 (Uneigentlicher Grenzwert)**.** *Sei $f : A \to \mathbb{R}$ und a ein Häufungspunkt von A. Falls für alle $K \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $f(x) > K$ für $|x - a| < \delta$, so schreibt man $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.*
Falls $\lim\limits_{x\to a} -f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Wie der Name schon ausdrückt, ist ein uneigentlicher Grenzwert kein richtiger Grenzwert, da keine Konvergenz vorliegt. Uneigentliche Grenzwerte sind aber die Grundlage für die folgende zweite Regel von L'Hospital.

Satz 5.22 (Regel von L'Hospital $\frac{\infty}{\infty}$)**.** *Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbare Funktionen. Sei $c \in [a,b]$ und $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a,b) \setminus \{c\}$.*
Gilt $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$ und existiert $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beweis: Wir beschränken uns im Beweis auf den Fall $f(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b] \setminus \{c\}$.
Definiere $F(x) = \frac{1}{g(x)}$ und $G(x) = \frac{1}{f(x)}$, dann ist

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{F(x)}{G(x)}$$

und $\lim\limits_{x\to c} F(x) = \lim\limits_{x\to c} G(x) = 0$, so dass Satz 5.20 anwendbar ist.
Also gilt

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to c} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to c} \frac{\frac{-g'(x)}{(g(x))^2}}{\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}} = \lim_{x\to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2 \cdot \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

da $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$. Damit gilt auch

$$1 = \lim_{x\to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) \cdot \frac{g'(x)}{f'(x)} \Rightarrow \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} . \qquad \square$$

Es gibt einige weitere Varianten der Regel von L'Hospital, die wir kurz ohne Beweis vorstellen wollen.
Seien $f : [a,\infty] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,\infty] \to \mathbb{R}$ zwei auf (a,∞) differenzierbare Funktionen, und sei $g(x) \neq 0$ für $x \in (a,\infty)$.

i) Sei $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$ existiert, dann existiert auch $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$ und es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ii) Sei $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$ existiert, dann gilt existiert auch und $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$ es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Beispiel 5.7.

i) $f(x) = x^2, \quad g(x) = x$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{1} = 0$
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{1} = \infty$

ii) $f(x) = e^x - 1, \quad g(x) = \sin x$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$.

iii) $\lim\limits_{x\searrow 0} x \ln x = \lim\limits_{x\searrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{x^2}{x} \overset{wie\ in\ i)}{=} 0$

Das dritte Beispiel zeigt, dass man die Regel auch für einseitige Grenzwerte anwenden kann. Ferner kann man die Regel auch rekursiv anwenden, wenn die Grenzwerte der ersten Ableitungen die Bedingungen der Regel von L'Hospital erfüllen. Es ist allerdings immer darauf zu achten, dass die Voraussetzungen erfüllt sind. Wenn die Grenzwerte der Funktionen $\neq 0$ (bzw. $\neq \infty$) sind, so gelten die Regeln nicht!

5.6 Kurvendiskussion

Zum Abschluss des Kapitels fassen wir einige der bisherigen Resultate noch einmal zusammen und nutzen sie zur Analyse von Funktionen in Form einer Kurvendiskussion. Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine in A differenzierbare Funktion, für die wir folgende Punkte untersuchen.

1. Symmetrie
2. Verhalten am Rand des Definitionsbereichs
3. Nullstellen
4. Extrempunkte
5. Wendepunkte
6. Funktionsgraph

Im Einzelnen werden die folgenden Aspekte dabei untersucht.
1) Symmetrie
Man unterscheidet Achsensymmetrie zur y-Achse, die vorliegt wenn $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in A$ gilt.
Weiterhin wird die Punktsymmetrie zum Nullpunkt (bzw. Ursprung) untersucht, die vorliegt, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in A$ gilt.
Es ist zu beachten, dass für beide Arten von Symmetrie $x \in A \Leftrightarrow -x \in A$ eine notwendige Bedingung ist.
2) Verhalten am Rand des Definitionsbereichs

Interessant sind Häufungspunkte a von A, die nicht zu A gehören, sowie $-\infty$ und ∞, falls A nach unten oder oben unbeschränkt ist. Die folgenden Grenzwerte werden für Häufungspunkte untersucht:

$$\lim_{x \searrow a} f(x) \text{ oder } \lim_{x \nearrow a} f(x)$$

Dabei ist festzustellen, ob die Funktionen konvergieren oder der uneigentliche Grenzwert gegen $\pm\infty$ existiert. Für unbeschränkte Definitionsbereiche A werden die Grenzwerte

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \text{ oder } \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

untersucht. Auch hier wird wieder die Frage nach der Konvergenz oder der Existenz der uneigentlichen Grenzwerte gestellt.
Für die Fälle $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ kann das asymptotische Verhalten analysiert werden. Dazu wird eine Gerade $g(x) = \alpha x + \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ gesucht, sodass

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - g(x)) = 0 \text{ bzw. } \lim_{x \to -\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

Die Gerade heißt Asymptote von f für $x \to \infty$ (bzw. $x \to -\infty$). Die folgenden Bedingungen charakterisieren eine Asymptote und erlauben eine direkte Bestimmung der Werte von α und β.

$$\begin{array}{ll} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha & \left(\text{bzw. } \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha\right) \\ \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - \alpha x) = \beta & \left(\text{bzw. } \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta\right) \end{array}$$

Die zweite Bedingung folgt direkt aus der Bedingung an die Asymptote, die erste Bedingung folgt aus

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x) - g(x)}{x} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x) - \alpha x - \beta}{x} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \alpha \right)$$

oder aus dem entsprechenden Grenzwert gegen $-\infty$.
Unter Umständen wird auch die senkrechte Gerade als Asymptote angesehen, wenn der Funktionswert gegen $-\infty$ oder ∞ konvergiert.

3) Bestimmung von Nullstellen

Eine Nullstelle liegt vor, wenn $f(x) = 0$. Methoden zur Berechnung von $f(x) = 0$ werden wir im nächsten Kapitel kennen lernen.

4) Berechnung von Extrempunkten

Eine notwendige Bedingung für einen lokalen Extrempunkte $a \in A$ lautet $f'(a) = 0$ falls eine Umgebung $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A$ für ein $\varepsilon > 0$ existiert. Randpunkte von A, falls diese existieren, sind separat zu untersuchen, da dort die notwendige Bedingung nicht greift.
Eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums im Punkt $a \in A$ lautet $f'(a) = 0$ sowie $f''(a) < 0$ für ein lokales Maximum oder $f''(a) > 0$ für ein lokales Minimum. Eine weitergehende hinreichende Bedingung haben wir in Satz 5.16 kennen gelernt.

5) Wendepunkt

Ein Wendepunkt liegt dann vor, wenn sich das Vorzeichen der zweiten Ableitung ändert. Ein Punkt $a \in A$ mit $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A$ für $\varepsilon > 0$ ist ein Wendepunkt, falls

$$f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x \in (a - \varepsilon, a) \\ = 0 & \text{für } x = a \\ > 0 & \text{für } x \in (a, a + \varepsilon) \end{cases} \quad \text{oder} \quad f''(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x \in (a - \varepsilon, a) \\ = 0 & \text{für } x = a \\ < 0 & \text{für } x \in (a, a + \varepsilon) \end{cases}$$

Eine notwendige Bedingung für einen Wendepunkt in $x \in A$, wobei x kein Randpunkt von A sein darf, lautet $f''(x) = 0$.
Eine hinreichende Bedingung lautet $f''(x) = 0$ und $f^{(3)}(x) \neq 0$. Diese Bedingung ist nicht notwendig. Eine besondere Form des Wendepunkts ist der Sattelpunkt, bei dem zusätzlich noch die erste Ableitung gleich 0 sein muss.
6) Funktionsgraph
Aus den bisherigen Analysen lassen sich erste Aussagen über den Verlauf der Funktion machen. Diese können durch die Bestimmung des Verlauf der Funktion, durch punktweises Abtasten, und die graphische Darstellung noch ergänzt werden.

Beispiel 5.8. *Als Beispiel untersuchen wir die Funktion*

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x^2(x+2)}{(x+1)^2}$$

mit Definitionsbereich $A = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
zu 1) *Da $1 \in A$ aber $-1 \notin A$, kann keine Symmetrie vorliegen.*
zu 2) *Interessant ist das Verhalten der Funktion für x gegen einen der Werte $-\infty, \infty, -1$.*
Im Punkt -1 gilt:
Der Nenner $(x+1)^2$ ist größer 0 für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Der Zähler $x^2(x+2)$ ist größer 0 für $x > -2$. Damit ist $f(x)$ positiv für $x > -2$. Es gilt

$$\lim_{x \nearrow -1} f(x) = \lim_{x \searrow -1} f(x) = \infty$$

da $\lim_{x \nearrow -1} x^2(x+2) = \lim_{x \searrow -1} x^2(x+2) = 1$ und $\lim_{x \nearrow -1} (x+1)^2 = \lim_{x \searrow -1} (x+1)^2 = 0$.
Für die Grenzwerte x gegen ∞ oder $-\infty$ gilt

$$\begin{array}{rcccccc} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) & = & \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2}{x^2+2x+1} & = & \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+2}{1+\frac{2}{x}\frac{1}{x^2}} & = & \infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) & = & \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+2}{1+\frac{2}{x}\frac{1}{x^2}} & = & -\infty & & \end{array}$$

Die Asymptote für $x \to \infty$ wird wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(x+2)}{x(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x}{x^2+2x+1} = 1 \\ \beta &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2(x+2)}{(x+1)^2} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+2^2}{x^2+2x+1} - \frac{x^3+2x^2+x}{x^2+2x+1} \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-x}{x^2+2x-1} \right) = 0 \end{aligned}$$

zu 3) *Es gilt $f(x) = \frac{x^2(x+2)}{(x+1)^2} = 0$ für $x = 0$ oder $x = -2$.*
Der Schnittpunkt mit der y-Achse liegt an der Stelle 0, da $f(0) = 0$.

zu 4) *Zur Bestimmung der Extremstellen berechnen wir die erste Ableitung mithilfe der Quotientenregel.*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{(3x^2+4x)(x+1)^2-2(x+1)(x^3+2x^2)}{(x+1)^4} \\ &= \tfrac{3x^3+4x^2+3x^2+4x-2x^3-4x^2}{(x+1)^3} \\ &= \tfrac{x^3+3x^2+4x}{(x+1)^3} \\ &= \tfrac{x(x^2+3x+4)}{(x+1)^3} \quad \textit{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \end{aligned}$$

$f'(x)$ besitzt eine Nullstelle im Punkt 0. Für den Term in der Klammer des Zählers gilt $x^2+3x+4 = (x+\frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist der Zähler > 0 für $x > 0$, $= 0$ für $x = 0$ und < 0 für $x < 0$. Der Nenner ist > 0 für $x > -1$ und < 0 für $x < -1$. sodass

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \textit{für } x \in (-\infty,-1) \cup (0,\infty) \\ < 0 & \textit{für } x \in (-1,0) \\ = 0 & \textit{für } x = 0 \end{cases}$$

Mithilfe von Satz 5.14 können wir die folgenden Aussagen über den Verlauf von f machen.

- *f ist streng monoton wachsend auf $(-\infty,-1)$*
- *f streng monoton fallend auf $(-1,0)$*
- *f ist streng monoton wachsend auf $(0,\infty)$*
- *f hat in $x = 0$ ein lokales Minimum*

Wie wir gleich sehen werden gilt $f''(0) = 2 > 0$, sodass auch die hinreichende Bedingung für das lokale Extremum erfüllt ist. Ein globales Extremum existiert nicht, da die Funktionswerte gegen $-\infty$ und ∞ konvergieren.

zu 5) *Zur Bestimmung der Wendepunkte bestimmen wir die zweite Ableitung.*

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\tfrac{x(x^2+3x+4)}{(x+1)^3}\right)' \\ &= \tfrac{(3x^2+6x+4)(x+1)^3-(x^3+3x^2+4x)3(x+1)^2}{(x+1)^6} \\ &= \tfrac{3x^3+6x^2+4x+3x^2+6x+4-3x^3-9x^2-12x}{(x+1)^4} \\ &= \tfrac{-2x+4}{(x+1)^4} = \tfrac{2(2-x)}{(x+1)^4} \quad \textit{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \end{aligned}$$

der Nenner ist im Definitionsbereich der Funktion positiv, während der Zähler $x < 2$ positiv und für $x > 2$ negativ ist. Im Punkt $x = 2$ hat $f''(x)$ eine Nullstelle. Damit gilt

$$f''(x) = \begin{cases} > 0 & \textit{für } (-\infty,-1) \cup (-1,2) \\ = 0 & \textit{für } x = 2 \\ < 0 & \textit{für } (2,\infty) \end{cases}$$

Die Funktion hat an der Stelle $x = 2$ einen Wendepunkt. Für die dritte Ableitung gilt

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= \left(\tfrac{4-2x}{(x+1)^4}\right)' \\ &= \tfrac{-2(x+1)^4-(4-2x)\cdot 4\cdot(x+1)^3}{(x+1)^8} \\ &= \tfrac{-2(x+1)-(4-2x)4}{(x+1)^5} \\ &= \tfrac{6x-18}{(x+1)^5} = \tfrac{6(x-3)}{(x+1)^5} \quad \textit{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \end{aligned}$$

Da $f''(2) = 0$ *und* $f^{(3)}(2) = \frac{-6}{3^5} = -\frac{1}{27} \neq 0$ *ist die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt erfüllt.*
zu 6) *Die folgende Graphik zeigt den Verlauf der Funktion im Intervall* $[-5, 5]$.