Kapitel 3

Folgen und Reihen

Wie bereits in der Einleitung angedeutet, beschäftigt sich die Analysis sehr stark mit Grenzprozessen. Wir werden in diesem Kapitel die wichtigsten Grenzprozesse, nämlich die Grenzeprozesse von Folgen und Reihen kennen lernen. Grenzprozesse betrachten in der Regel unendliche Abläufe und können in endlich vielen Schritten nur approximiert, nicht aber exakt berechnet werden.

3.1 Folgen und Grenzwerte

Definition 3.1. *Unter einer Folge versteht man eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Jedem $n \in \mathbb{N}$ wird ein $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet. Man schreibt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_1, a_2, \ldots)$.*

n bezeichnet man als den Index und a_n als die Glieder der Folge. Folgen lassen sich einfach verallgemeinern, indem Indizes $n \in \mathbb{Z}$ oder $n \geq k \in \mathbb{N}$ zur Indizierung gewählt werden.

Beispiel 3.1.

- *Konstante Folge $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$*
- $a_n = \frac{1}{n}$ *definiert die Folge* $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$
- $a_n = (-1)^n$ *definiert die Folge* $-1, 1, -1, 1, \ldots$
- $a_n = (\frac{n^k}{\sqrt{n}})$ *definiert* $1, \frac{2^k}{\sqrt{2}}, \frac{3^k}{\sqrt{3}}, \ldots$

Eine Folge ist rekursiv definiert, falls sich a_n $(n > h)$ aus den Gliedern $a_{n-1}, \ldots, a_{n-h}$ berechnen lässt und $a_1, ..a_h$ vorgegeben werden.

Beispiel 3.2.

- $a_1 = 1$, $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ *definiert 1, 2, 4, 8....*
- *Fibonacci- Folge, die üblicherweise mit a_0 und nicht a_1 beginnt*
  $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
  definiert $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

$f = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge, dann sei $\|f\| := \sup\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$. $\|f\|$ wird auch als Norm der Folge bezeichnet.

Definition 3.2 (konvergente Folgen)**.** *Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt: zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt* divergent.

Beachte, dass n_0 von ε abhängt!
Falls f gegen a konvergiert, so nennt man a den Grenzwert von f und schreibt:
$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$
Eine Folge die gegen 0 konvergiert, heißt Nullfolge.

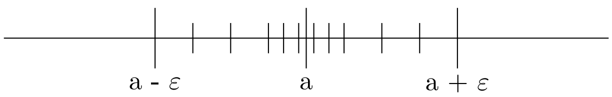
Satz 3.3. *Der Grenzwert einer Folge ist, falls er existiert, eindeutig.*

Beweis: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Angenommen der Grenzwert sei nicht eindeutig und es existieren zwei Grenzwerte a und a' mit $a \neq a'$, sodass $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a'$. Dann existiert ein ε mit $0 < \varepsilon < |a - a'|/2 \Rightarrow 2\varepsilon < |a - a'|$. Da sowohl a als auch a' Grenzwerte sind, muss ein n_0 existieren, sodass für alle $n \geq n_0$ $|a_n - a| < \varepsilon$ und $|a_n - a'| < \varepsilon$. Damit gilt aber dann auch

$$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a_n - a| + |a_n - a'| < 2\varepsilon.$$

Dies ist eine Widerspruch zu unserer Annahme, sodass $a = a'$ gelten muss. $\square$

Konvergenz einer Folge kann man sehr gut geometrisch auf der Zahlengeraden veranschaulichen, wie die folgende Graphik zeigt. Alle Werte a_n liegen für $n \geq n_0$ in einem Intervall der Länge 2ε um den Punkte a.



Beispiel 3.3.

- *Die konstante Folge $a, a, \ldots$ konvergiert gegen a.*
- *Für die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$. Für $\varepsilon > 0$ wählen wir $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ ($\lceil x \rceil$ ist die nächste Zahl aus $\mathbb{Z}$, die größer oder gleich x ist).*
- *Die Folge $a_n = (-1)^n$ divergiert.*
  Beweis: *Angenommen die Folge würde gegen a konvergieren, dann gibt es nach Definition für $\varepsilon = 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Es gilt aber*

$$\begin{aligned} 2 &= |a_{n+1} - a_n| \\ &= |(a_{n+1} - a) + (a - a_n)| \\ &\leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a| \\ &< 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch, der zeigt, dass die Annahme falsch ist. $\square$

Definition 3.4. *Eine Folge $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt* nach oben *(bzw.* nach unten*)* beschränkt*, falls es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $a_n \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (bzw. $a_n \geq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Die Folge heißt* beschränkt*, falls $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Definition 3.5. *Eine Folge $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt* bestimmt divergent *gegen ∞, falls ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_0$, $a_n > 0$ und $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N},n\geq n_0}$ gegen 0 konvergiert.*

Bemerkung: Entsprechend kann man bestimmt Divergenz gegen $-\infty$ definieren.

Satz 3.6. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis: Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Daraus folgt $|a_n| = |a + a_n - a| \leq |a| + |a_n - a| \leq |a| + 1$ für alle $n \geq n_0$. Setze $K := \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, |a| + 1)$, dann ist $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ □

Bemerkung : Die Umkehrung des Satzes gilt natürlich nicht, da z. B. $a_n = (-1)^n$ beschränkt, aber nicht konvergent ist.

Beispiel 3.4. *Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = x^n$, deren Verhalten vom Wert $x \in \mathbb{R}$ abhängt:*

1. *Falls $|x| < 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.*
2. *Falls $x = 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} x^n = 1$.*
3. *Falls $x = -1$ divergiert die Folge.*
4. *Falls $|x| > 1$ divergiert die Folge und ist unbeschränkt.*

Die Beweise sollen zur Übung durchgeführt werden.

3.2 Rechenregeln für konvergente Folgen

Definition 3.7 (Rechenregeln für Folgen)**.** *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen und $c \in \mathbb{R}$. Dann definieren wir:*

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
2. $c \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
3. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und*
4. $\dfrac{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}{(b_n)_{n\in\mathbb{N}}} = (\dfrac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *falls $(b_n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Satz 3.8 (Grenzwerte kombinierter Folgen)**.** *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt :*

i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n)$

ii) $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty}(a_n)$

iii) $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n)$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)}$ *falls* $b_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Beweis: Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

i) Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, dann ist auch $\varepsilon/2 > 0$. Da beide Folgen konvergent sind, gibt es $n_a, n_b \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_a$ sowie $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_b$ Damit gilt für $n \geq n_{ab} = \max(n_a, n_b)$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ii) Ergibt sich aus *iii)*, wenn wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als konstante Folge auffassen.

iii) Nach Satz 3.6 sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Sei $K_a \geq a_n$ und $K_b \geq b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ sowie $\mathrm{K} = \max(K_a, K_b)$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, dann gilt auch $\frac{\varepsilon}{2K} > 0$. Da beide Folgen konvergieren, gibt es $n_a, n_b \in \mathbb{N}$ sodass:
$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K}$ für $n \geq n_a$
$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2K}$ für $n \geq n_b$
Sei $n_{ab} = \max(n_a, n_b)$. Dann gilt für alle $n \geq n_{ab}$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &= |a_n(b_n - b) + (a_n - a) \cdot b| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| \\ &< K \cdot \tfrac{\varepsilon}{2K} + \tfrac{\varepsilon}{2K} \cdot K \qquad = \varepsilon \end{aligned}$$

iv) Da $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$, können wir den Beweis auf Fall *iii)* zurückführen, falls $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ für $n \to \infty$ und $b \neq 0$.

Wegen $b \neq 0$ ist $\frac{|b|}{2} > 0$ und es gibt ein $n_b \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_b$ $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ ist. Daraus folgt $|b_n| > \frac{|b|}{2}$.

Zu einem vorgegebenen ε gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|b_n - b| < \frac{\varepsilon|b|^2}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt auch für $n \geq \max(n_b, n_0)$

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| &= \frac{|b_n - b|}{|b_n| \cdot |b|} &= \frac{1}{|b_n| \cdot |b|} \cdot |b_n - b| \\ &< \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{\varepsilon|b^2|}{2} &= \varepsilon \end{aligned}$$

Da $|b_n| \cdot |b| > |b|\frac{|b|}{2}$ ist $(|b_n| \cdot |b|)^{-1} < \frac{2}{|b|^2}$ und die im vorletzten Schritt durchgeführte Ersetzung ist korrekt.

Damit wurde $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{1}{b_n}\right| = \frac{1}{b}$ gezeigt.

□

Beispiel 3.5. *Sei* $a_n = \dfrac{3n^2 + 13n}{n^2 - 2}$ *mit* $n \in \mathbb{N}$.

Wegen $a_n = \dfrac{3n^2 + 13n}{n^2 - 2} = \dfrac{3 + \frac{13}{n}}{1 - \frac{2}{n^2}}$ *und da* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ *folgt aus 3.8.iii), dass*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Damit gilt nach 3.8.i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{13}{n}\right)=3$ *sowie* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n^2}\right)=1$ *und schließlich nach 3.8.iv)*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3-\frac{13}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{2}{n^2})}=\frac{3}{1}=3.$$

Satz 3.9. *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zwei konvergente Folgen mit* $a_n\leq b_n$*. Dann gilt auch* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leq\lim\limits_{n\to\infty}b_n$*.*

Beweis: Sei $c_n=b_n-a_n$. Es genügt zu zeigen $\lim\limits_{n\to\infty}c_n\geq 0$, da c_n nach Satz 3.8 konvergent ist und $c_n\geq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ nach Voraussetzung gilt. Angenommen $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=-\varepsilon$ für $\varepsilon>0$. Dann gäbe es ein n_0, sodass für alle $n\geq n_0$

$$|c_n-(-\varepsilon)|=|c_n+\varepsilon|<\varepsilon.$$

Dies würde bedeuten, dass $c_n<0$, was nach Annahme nicht gelten kann. □

Vorsicht: Aus $a_n<b_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ folgt nicht $\lim\limits_{n\to\infty}a_n<\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ wie zum Beispiel $a_n=0$ und $b_n=\frac{1}{n}$ für $n=1,2\ldots$ zeigt.
Der folgende Satz erweitert Satz 3.9.

Satz 3.10 (Sandwich-Theorem)**.** *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen mit* $a_n\leq b_n\leq c_n$*. Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent und* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n$*. Dann ist auch* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent und es gilt* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n$*.*

Der Beweis sollte zur Übung ausformuliert werden.

3.3 Monotone Folgen und Teilfolgen

Ein zentraler Aspekt bei der Analyse von Folgen ist die Untersuchung, ob eine Folge konvergiert oder divergiert. Dies kann man offensichtlich nicht durch einfaches "Ausprobieren" feststellen, da Konvergenz bzw. Divergenz vom Verhalten für $n\to\infty$ abhängt. Deshalb werden Kriterien für die Konvergenz oder Divergenz von Folgen hergeleitet und aus diesen Verfahren zur Analyse konkreter Folgen abgeleitet.

Definition 3.11 (Monotone Folge)**.** *Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt*

- monoton wachsend*, falls* $a_n\leq a_{n+1}$ *für alle* $n\in\mathbb{N}$
- streng monoton wachsend*, falls* $a_n<a_{n+1}$ *für alle* $n\in\mathbb{N}$*,*
- monoton fallend*, falls* $a_n\geq a_{n+1}$ *für alle* $n\in\mathbb{N}$
- streng monoton fallend*, falls* $a_n>a_{n+1}$ *für alle* $n\in\mathbb{N}$

Definition 3.12 (Teilfolge)**.** *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge und* $n_1<n_2<n_3<\ldots$ *eine aufsteigende unendliche Folge natürlicher Zahlen, dann heißt* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}=a_{n_1},a_{n_2},\ldots$ *eine* Teilfolge *der Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Für eine Teilefolge werden also nur einzelne Glieder der Folge berücksichtigt, ohne deren Reihenfolge zu ändern. Der folgende Satz zeigt, dass sich die Konvergenz von Folgen auf Teilfolgen überträgt.

Satz 3.13. *Jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.*

Beweis: Für jedes $\varepsilon > 0$ so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Damit liegen nur endlich viele Glieder von (a_n) außerhalb von $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ und damit auch nur endlich viele Glieder von a_{n_k}. Da jedes a_{n_k} auch ein a_n ist, gibt es ein $k_0 \leq n_0$, so dass $|a - a_{n_k}| < \varepsilon$ für $k \geq k_0$. □

Mit Hilfe von Teilfolgen kann man die Divergenz von Folgen nachweisen.

Satz 3.14 (Divergenzkriterium)**.** *Besitzt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

i) eine divergente Teilfolge oder

ii) zwei konvergente Teilfolgen $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty}(a_{n_k}) \neq \lim\limits_{l\to\infty}(a_{n_l})$

so ist die Folge divergent.

Beweis: Im Fall *i)* kann die Folge nach Satz 3.13 nicht konvergent sein.
In Fall *ii)* würde, falls die Folge konvergent wäre, nach Satz 3.13 gelten

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \neq \lim_{l\to\infty} a_{n_l} = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

was der Eindeutigkeit des Grenzwerts widerspricht. □

Beispiel 3.6. *Sei $(-1)^n$ die untersuchte Folge. Es gibt es zwei Teilfolgen $(-1)^{2n}$ und $(-1)^{2n+1}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{2n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{2n+1} = -1$, so dass die Folge divergent ist.*

Satz 3.15 (Konvergenzkriterium)**.** *Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent. Genauer formuliert:*

i) Ist $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, so ist f konvergent und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

ii) Ist $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, so ist f konvergent und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis: *i)* Sei $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge. Da f nach oben beschränkt, existiert ein Supremum $a \in \mathbb{R}$ (nach Satz 2.19). Damit gilt $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq a_{n+1} \leq ... \leq a$. Es bleibt zu zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gilt. Wähle dazu $\varepsilon > 0$. Da a kleinste obere Schranke ist, ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke. Somit gibt es ein n_0 mit $a - \varepsilon < a_{n_0}$. Da die Folge monoton ist gilt $a_{n_0} \leq a_n$ für $n \geq n_0$ und da a obere Schranke ist gilt $a_n < a$, sodass $a - a_n \leq a - a_{n_0} < \varepsilon$. Damit ist das Konvergenzkriterium erfüllt.
Der Beweis für *ii)* ist analog zu führen. □

Satz 3.16. *Jede Folge enthält eine monotone Teilfolge.*

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge. Wir betrachten die Menge $N_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}. m > n \Rightarrow a_m \geq a_n\}$ und unterscheiden

1. N_1 ist unbeschränkt.
Dann ist $N_1 = \{n_1, n_2, \dots\}$ und $n_1 < n_2 < \dots$ und die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend da $a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k}$ nach Konstruktion von N_1.

2. N_1 ist beschränkt oder leer.
Wir bestimmen eine monoton fallende Teilfolge $(a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ rekursiv.
Für $k = 1$: $m_1 = \begin{cases} 1 & falls \quad N_1 = \emptyset \\ \max(N_1) + 1 & falls \quad N_1 \neq \emptyset \end{cases}$
Für $k > 1$: $m_1, \dots, m_{k-1}$ sind bekannt, $m_1 < m_2 < \dots < m_{k-1}$ und $a_{m_1} \geq a_{m_2} \geq \dots \geq a_{m_{k-1}}$. Ferner ist $m_{k-1} \notin N_1$ da $m_{k-1} > m_1$ und $m_1 > \max(N_1)$. Nach Definition von N_1 existiert ein $m_k > m_{k-1}$, sodass $a_{m_k} < a_{m_{k-1}}$ (sonst würde m_{k-1} zu N_1 gehören). Dieses m_k wählen wir als nächstes Glied der Folge und fahren fort. Auf diese Weise erhalten wir eine monoton fallende Folge.

□

Der folgende Satz ergibt sich aus den beiden vorherigen und ist sehr bekannt, weshalb er explizit formuliert wird.

Satz 3.17 (Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis: Nach Satz 3.16 enthält die Folge eine monotone Teilfolge (die natürlich auch beschränkt ist, wenn die ursprüngliche Folge beschränkt ist) und nach Satz 3.15 ist jede beschränkte monotone Folge konvergent. □

Unter der Umgebung oder besser ε-Umgebung eines Punktes x verstehen wir die Menge aller alle Punkte y mit $|x - y| < \varepsilon$. In einer ε-Umgebung des Grenzwertes einer konvergenten Folge liegen ab einem bestimmten Index n_0 alle Glieder der Folge. Wenn wir Punkte betrachten in deren Umgebung zwar unendlich viele Folgenglieder liegen, außerhalb der Umgebung aber ebenfalls unendlich viele Folgeglieder, so kommen wir zur Definition des Häufungspunkts.

Definition 3.18 (Häufungspunkt). *Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt a* Häufungspunkt*, wenn es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt und $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.*

Beispiel 3.7.

- *Die Folge $a_n = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$ ist unbeschränkt und besitzt den Häufungspunkt 0.*
- *Die Folge $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ ist beschränkt und besitzt die Häufungspunkte -1 und 1.*

Mit Hilfe der Definition und des Satzes von Bolzano-Weierstraß kann man die Aussage formulieren, dass jede beschränkte Folge reeller Zahlen mindestens einen Häufungspunkt besitzt.
Eine besondere Rolle bei der Charakterisierung konvergenter Folgen spielen die im Folgenden definierten Cauchy-Folgen, die es erlauben, konvergente Folgen zu charakterisieren, ohne den expliziten Grenzwert zu nutzen.

Definition 3.19 (Cauchy-Folge)**.** *Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* Cauchy-Folge*, wenn gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 . |a_n - a_{n_0}| < \varepsilon.$$

Die folgenden beiden Sätze zeigen den Zusammenhang zwischen konvergenten Folgen und Cauchy-Folgen.

Satz 3.20.

i) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

ii) Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.

iii) Besitzt die Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge, so ist sie selbst konvergent.

Beweis:

i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, sei $\varepsilon > 0$ und sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Definiere $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$. Nach Definition existiert n_0, sodass $|a_n - a| < \varepsilon'$ für alle $n \geq n_0$ und damit

$$|a_n - a_{n_0}| = |a_n - a + a - a_{n_0}| \leq |a_n - a| + |a_{n_0} - a| < \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon.$$

ii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Dann gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein n_0, sodass $|a_n - a_{n_0}| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Daraus folgt für $n \geq n_0$:

$$|a_n| = |a_{n_0} + (a_n - a_{n_0})| \leq |a_{n_0}| + |a_n - a_{n_0}| < |a_{n_0}| + 1.$$

Wähle $K = \max\{|a_1|, \dots |a_{n_0-1}|, |a_{n_0}| + 1\}$, so gilt $|a_n| \leq K$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

iii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Sei $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3}$. Es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_k} - a| < \varepsilon'$ für alle $k \geq k_0$. Ferner gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_{n_0}| < \varepsilon'$ für alle $n \geq n_0$. Sei $n \geq n_0$, dann gilt

$$a_n - a = (a_n - a_{n_0}) + (a_{n_0} - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a),$$

wobei $k \geq k_0$ und $n_k \geq n_0$ gewählt wird. Damit gilt dann

$$|a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_0}|}_{\text{Cauchy}} + \underbrace{|a_{n_0} - a_{n_k}|}_{\text{Cauchy}} + \underbrace{|a_{n_k} - a|}_{\text{konv. Teilfolge}} < \varepsilon' + \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon.$$

□

Satz 3.21. *Jede Cauchy-Folge ist konvergent.*

Beweis: Nach Satz 3.20.*ii*) ist jede Cauchy-Folge beschränkt. Damit enthält sie nach Satz 3.17 eine konvergente Teilfolge und ist damit nach Satz 3.20.*iii*) selbst konvergent. □

Wenn wir Satz 3.20.*i*) und Satz 3.21 zusammen benutzen erhalten wir folgendes Korollar.

Korollar 3.22. *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Damit kann die Konvergenz einer Folge auch dadurch gezeigt werden, dass gezeigt wird, dass es sich um eine Cauchy-Folge handelt. Dieser Nachweis hat den Vorteil, dass der Grenzwert nicht bekannt sein muss.

Beispiel 3.8. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert als $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Die Folge ist keine Cauchy-Folge und damit divergent.*
Beweis: *Wir betrachten die Differenz*

$$a_{2n} - a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ Summanden}} = \frac{1}{2}.$$

Wäre $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so müsste es zu jedem $\varepsilon > 0$ (also auch zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ geben, sodass $|a_n - a_{n_0}| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und somit auch $|a_{2n_0} - a_{n_0}| < \frac{1}{2}$ gelten. Nach obiger Abschätzung gilt dies aber nicht und f ist keine Cauchy-Folge.

Beispiel 3.9. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert als*

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge und damit konvergent.
Beweis: *Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle n_0, sodass $\frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$. Wir zeigen $|a_n - a_{n_0}| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Für $n \geq n_0$ gilt*

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{n_0}(a_n - a_{n_0}) = (-1)^{n_0} \sum_{k=n_0+1}^{n} \tfrac{(-1)^{k-1}}{k} \\
&\overset{\text{da } ((-1)^{n_0})^2=1}{=} \tfrac{1}{n_0+1} - \tfrac{1}{n_0+2} + \cdots + \tfrac{(-1)^{n-1+n_0}}{n} \\
&= \begin{cases} \left(\tfrac{1}{n_0+1} - \tfrac{1}{n_0+2}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n}\right) & \text{falls } n - n_0 \text{ gerade} \\ \left(\tfrac{1}{n_0+1} - \tfrac{1}{n_0+2}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{n-2} - \tfrac{1}{n-1}\right) + \tfrac{1}{n} & \text{falls } n - n_0 \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Jeder Term in der Klammer ist positiv! Also gilt $(-1)^{n_0}(a_n - a_{n_0}) \geq 0$. Damit gilt auch

$$
\begin{aligned}
|a_n - a_{n_0}| &= (-1)^{n_0}(a_n - a_{n_0}) \\
&= \tfrac{1}{n_0+1} - \left[\tfrac{1}{n_0+2} - \tfrac{1}{n_0+3} + \cdots - \tfrac{(-1)^{n-1+n_0}}{n}\right] \\
&= \tfrac{1}{n_0+1} - \underbrace{(-1)^{n_0+1}(a_n - a_{n_0+1})}_{\geq 0} \\
&\leq \tfrac{1}{n_0+1} & < \varepsilon
\end{aligned}
$$

Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge und konvergent.

3.4 Ein Algorithmus zur Wurzelberechnung

Sei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl deren Quadratwurzel wir bestimmen wollen. D. h. wir suchen x mit $x^2 = a \Rightarrow x = \frac{a}{x}$. Sei $x' = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$ ($x' = x$ gilt für $x = \frac{a}{x}$). Wir zeigen nun, dass man daraus eine konvergente Folge ableiten kann, die $\sqrt{a}$ als Grenzwert besitzt. Der Algorithmus ist ein Beispiel für den Einsatz von Folgen, nämlich die Approximation eines Grenzwertes durch Berechnung einer endlichen Anzahl von Gliedern. Es zeigt sich, dass dies ein probates Mittel sein kann, Werte, die nicht exakt vorliegen, effizient mit einem Rechner zu approximieren.

Satz 3.23. *Seien $a > 0$ und $x_1 > 0$ reelle Zahlen. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert als $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{a}$ (d. h. $x^2 = a$).*

Beweis:

1. Per Induktion kann man zeigen $x_n > 0$, sodass $\frac{a}{x_n}$ definiert ist.

2. Es gilt $x_n^2 \geq a$ für $n > 1$, da

$$\begin{aligned} x_n^2 - a &= \tfrac{1}{4}\left(x_{n-1} + \tfrac{a}{x_{n-1}}\right)^2 - a \\ &= \tfrac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 + 2a + \tfrac{a^2}{x_{n-1}^2}\right) - a \\ &= \tfrac{1}{4}\left(x_{n-1} - \tfrac{a}{x_{n-1}}\right)^2 \qquad \geq 0. \end{aligned}$$

3. Es gilt $x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n > 1$:

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= x_n - \tfrac{1}{2}(x_n + \tfrac{a}{x_n}) \\ &= \tfrac{1}{2x_n} \cdot \underbrace{(x_n^2 - a)}_{\text{nach vorheriger Abschätzung } \geq 0} \qquad \geq 0 \end{aligned}$$

4. Nach 2. und 3. ist $(x_n)_{n\geq 1}$ eine monoton fallende Folge, die nach 1. durch 0 nach unten beschränkt ist. Nach Satz 3.15 ist die Folge damit konvergent. Wir müssen noch zeigen, dass der Grenzwert der Wurzel entspricht.

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Mult. mit } 2x_n} 2x_{n+1}x_n = x_n^2 + a$$

Da $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = x$ gilt $\lim_{n\to\infty} 2x_{n+1}x_n = 2x^2$ und $\lim_{n\to\infty} x_n^2 + a = x^2 + a$ und damit $2x^2 = x^2 + a \Rightarrow x^2 = a$. Die Eindeutigkeit von x folgt aus Satz 2.20

□

Wir schauen uns die Geschwindigkeit der Konvergenz an. Dazu sei der relative Fehler definiert als ω. Es gilt $x_n = \sqrt{a}\,(1 + \omega_n)$. Offensichtlich gilt $\omega_n \geq 0$ für $n > 1$ (da $x_n^2 > a$ wie aus dem Beweis von Satz 3.23 folgt). Einsetzen in die Gleichung

$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ und Kürzen von $\sqrt{a}$ liefert

$$\begin{aligned}
1+\omega_{n+1} &= \tfrac{x_{n+1}}{\sqrt{a}} = \tfrac{1}{2\sqrt{a}}\left(x_n + \tfrac{a}{x_n}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(1+\omega_n + \tfrac{1}{1+\omega_n}\right) \\
\Rightarrow \omega_{n+1} &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{(1+\omega_n)^2+1}{1+\omega_n}\right) - 1 \\
&= \tfrac{(1+\omega_n)^2+1-2(1+\omega_n)}{2(1+\omega_n)} \\
&= \tfrac{\omega_n^2+2\omega_n+2-2-2\omega_n}{2(1+\omega_n)} \\
&= \tfrac{\omega_n^2}{2(1+\omega_n)} \qquad\qquad \leq \tfrac{1}{2}\min(\omega_n, \omega_n^2)
\end{aligned}$$

Die Konvergenz ist sehr schnell. Für größere Werte von ω_n halbiert sich der Fehler, für kleine Werte von ω_n verdoppelt sich in jedem Schritt die Anzahl der richtig berechneten Dezimalstellen ungefähr. Ein weiterer Vorteil des Verfahrens ist die Robustheit bzgl. des Anfangswertes. Man kann mit beliebigem $x_0 > 0$ beginnen und erhält eine konvergente Folge. Dadurch kann eine einmal berechnete Lösung auch durch weitere Iterationsschritte verbessert werden.
Das Verfahren ist erweiterbar, da die Rekursion $x_{n+1} = \frac{1}{k}((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}})$ eine Folge definiert, die gegen $\sqrt[k]{a}$ konvergiert. (Beweis zur Übung)

3.5 Reihen

Neben Folgen sind Reihen eine weiteres Hilfsmittel, um Probleme durch Näherungsberechnung zu lösen. Im Prinzip könnte man Reihen als spezielle Folgen betrachten. Ihre spezielle Form und große praktische Bedeutung führt dazu, dass wir sie separat vorstellen werden.

Definition 3.24 (Reihe)**.** *Man nennt den formalen Ausdruck*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots \ \ mit\ a_k \in \mathbb{R}$$

eine (unendliche) Reihe *und* $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *die* n-te Teilsumme.
Wenn die Folge der Teilsummen konvergiert, dann heißt die Reihe konvergent. *Eine nicht konvergente Reihe heißt* divergent.
Konvergiert sogar $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$*, so nennt man die Reihe* absolut konvergent.

Beispiel 3.10. *Die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *nennt man* harmonische Reihe. *Diese Reihe ist, wie wir bereits in Beispiel 3.8 gesehen haben, divergent.*

Die Summation kann bei Reihen auch mit $k = 0$ beginnen, falls dies für die entsprechenden Beispiele zu einer einfacheren Darstellung führt. Da die Konvergenz einer Reihe über die Konvergenz der Teilsummen definiert ist, können wir aus Korollar 3.22 folgendes Konvergenzkriterium ableiten:

Korollar 3.25 (Cauchy-Konvergenzkriterium). *Die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergiert genau dann, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *gibt, sodass* $|\sum_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon$ *für alle* $n \geq m \geq n_0$.

Es gilt offensichtlich $s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k$.

Ein notwendiges (aber nicht hinreichendes) Kriterium für die Konvergenz einer Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Dies folgt aus dem Cauchy-Konvergenzkriterium mit $n = m$.

Beispiel 3.11. *Die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ *ist divergent, da die Reihenglieder nicht gegen 0 konvergieren.*

Satz 3.26. *Eine Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *mit* $a_k \geq 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$ *konvergiert genau dann, wenn die Folge der Teilsummen beschränkt ist.*

Beweis: Da $a_k \geq 0$ ist $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ monoton wachsend, und es gilt Satz 3.15, womit gezeigt wird, dass die Reihe konvergent ist, wenn die Folge der Teilsummen beschränkt ist.

Wenn die Folge der Teilsummen unbeschränkt ist, so gilt offensichtlich $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ und die Reihe ist divergent. □

Beispiel 3.12. *Die geometrische Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ *konvergiert für* $|a| < 1$ *gegen den Grenzwert* $\frac{1}{1-a}$.

Wir zeigen $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ *per Induktion.*

Induktionsanfang $n = 0$***:*** $a^0 = 1 = \frac{1-a}{1-a}$

Induktionsschritt $n \to n+1$***:*** *Es gelte* $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$, *dann gilt auch* $\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + \frac{a^{n+1}-a^{n+2}}{1-a} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}$. *Da* $\lim_{n\to\infty} \frac{1-a^{n+2}}{1-a} = \frac{1}{1-a}$ *folgt der Grenzwert.*

Beispiel 3.13. *Die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ *konvergiert für* $n > 1$, *wie wir nun zeigen werden, indem wir zeigen, dass die Teilsummen durch* $\frac{1}{1-2^{-n+1}}$ *beschränkt sind.*

Zu $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $k_0 \leq 2^{m+1} - 1$ und damit gilt

$$
\begin{aligned}
s_{k_0} &\leq \sum_{k=1}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{k^n} \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \cdots + \left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{k^n}\right) \\
&\leq \sum_{i=0}^{m} 2^i \cdot \frac{1}{(2^i)^n} = \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^i \\
&= \underbrace{\sum_{i=0}^{m} \left(2^{-n+1}\right)^i}_{\text{geometrische Reihe}}
\end{aligned}
$$

Damit gilt auch

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m} \left(2^{-n+1}\right)^i = \frac{1}{1-2^{-n+1}}.$$

Beispiel 3.14. *Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergiert und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1$. Um den Grenzwert herzuleiten nutzen wir folgende Identität $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit lautet die n-te Teilsumme*

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$.

Um festzustellen, ob eine Reihe konvergiert, gibt es Konvergenzkriterien, von denen wir nun einige kennen lernen. Zuerst betrachten wir aber das Rechnen mit konvergenten Reihen und zeigen dabei, dass die Kombination zweier konvergenter Reihen mit den definierten Operationen zu einer konvergenten Reihe führt.

Satz 3.27 (Rechnen mit konvergenter Reihe)**.**

i) Seien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, so sind auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$ konvergent, und es gilt:
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ und
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k - \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

ii) Ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent und $c \in \mathbb{R}$, dann gilt: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

iii) Für jedes $l \in \mathbb{N}$ mit $l > 1$ gilt: $\sum\limits_{k=l}^{\infty} a_k$ konvergent $\Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

iv) *Sind die Reihen* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergent und gilt* $a_k \leq b_k \forall k \in \mathbb{N}$*, so gilt* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Beweis: Der Beweis nutzt Satz 3.8 zur Bestimmung der Grenzwerte kombinierter Folgen.

i) Seien $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ und $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$, dann gilt für den Grenzwert der Folge $s_n + t_n$:
$\lim\limits_{n\to\infty} s_n + \lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} (s_n + t_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

ii) Da $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ gilt nach Satz 3.8.ii) $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot s_n = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} s_n = c \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

iii) Sei $s'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{l-1+k} = \sum\limits_{k=l}^{n+l-1} a_k$. s'_n ist die n-te Teilsumme der Reihe $\sum\limits_{k=l}^{\infty} a_k$. Es gilt

$$s'_n = s_{l-1+n} - \sum_{k=1}^{l-1} a_k = s_{l-1+n} - r.$$

Damit konvergiert s'_n wenn s_n konvergiert nach Satz 3.8.i) (r als Konstante konvergiert).
Sei nun $n \geq l$, dann gilt $s_n = s'_{1-l+n} + r$, sodass nach Satz 3.8.i) s_n konvergiert wenn s'_n konvergiert und die Aussage bewiesen ist.

iv) Werden s_n und t_n wie im Beweis zu i) definiert, folgt aus $a_k \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $s_n \leq t_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, woraus mithilfe von Satz 3.9 die Behauptung folgt.

□

Die Bestimmung des Grenzwertes einer Reihe ist oft nicht leicht. Man nutzt deshalb verschiedene Kriterien. Oft wird eine gegebene Reihe in Beziehung zu einer Reihe gesetzt, deren Konvergenzverhalten bekannt ist. Mit dem Leibniz-Kriterium lernen wir im folgenden Satz ein Kriterium kennen, um die Konvergenz einer Reihe mit alterniereden Gliedern (d. h. Gliedern mit wechselnden Vorzeichen) zu beweisen.

Satz 3.28 (Leibniz Kriterium). *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Folge reeller nicht negativer Zahlen mit* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. *Dann konvergiert die alternierende Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$.

Beweis: Für die Summe der Teilsummen gilt $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$.
Da $s_{2n+2} - s_{2n} = -a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq 0$, gilt: $s_2 \geq s_4 \geq s_6 \geq \ldots$.
Entsprechend gilt wegen $s_{2n+3} - s_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0 \quad s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \ldots$ und wegen $s_{2n+1} - s_{2n} = -a_{2n+1} \leq 0$ gilt $s_{2n+1} \leq s_{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Damit ist die Folge $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und die Folge $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Da $s_{2n} \geq s_1$ und $s_{2n+1} - s_2 \leq 0$ sind beide Folgen beschränkt und es existieren die Grenzwerte $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$ und $S' = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1}$.

Es gilt $S = S'$, da $S - S' = \lim_{n\to\infty}(s_{2n} - s_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$.
Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben, dann gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, sodass $|s_{2n} - S| < \varepsilon$ für $n \geq n_1$ und $|s_{2n+1} - S| < \varepsilon$ für $n \geq n_2$. Sei $n_{12} = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$ dann gilt $|s_n - S| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_{12}$. Damit ist die Konvergenz bewiesen. □

Beispiel 3.15. *Die alternierende harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ *konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium*

3.6 Absolut konvergente Reihen

Viele Konvergenzkriterien setzen voraus, dass die betrachteten Reihen absolut konvergieren. Wie der folgende Satz formal zeigt, ist die absolute Konvergenz stärker als die gewöhnliche Konvergenz.

Satz 3.29. *Wenn die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergiert, so konvergiert sie auch im gewöhnlichen Sinne.*

Beweis: Aus der Dreiecksungleichung für Beträge folgt: $\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k|$. Damit gilt $\sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon \Rightarrow \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$, sodass die Konvergenzbedingung für die Reihe erfüllt ist, wenn die Bedingung für absolute Konvergenz erfüllt ist. □

Wichtige Konvergenzkriterien basieren auf dem Vergleich einer Reihe mit einer anderen Reihe, deren Konvergenz oder Divergenz bekannt ist.

Satz 3.30 (Majorantenkriterium)**.** *Sei* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *eine konvergente Reihe mit ausschließlich nicht-negativen Gliedern und* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge mit* $|a_k| \leq c_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$, *dann konvergiert die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut.*

Beweis: Zu einem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\left|\sum_{k=m}^{n} c_k\right| < \varepsilon$ für alle $n \geq m \geq n_0$. Nach Satz 3.27.*iv*) gilt damit auch $\sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} c_k < \varepsilon$ für alle $n \geq m \geq n_0$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ erfüllt damit das Cauchy-Kriterium. □

Der Satz impliziert folgenden Divergenz-Kriterium.

Satz 3.31 (Minorantenkriterium)**.** *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ *eine divergente Reihe mit ausschließlich nicht-negativen Gliedern und* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge mit* $a_k \geq c_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$. *Dann divergiert die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beweis: Beweis zur Übung. □

Beispiel 3.16. *Die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a}{k^2 \cdot \sqrt{k}}$ *konvergiert, da* $\frac{a}{k^2 \cdot \sqrt{k}} \leq \frac{a}{k^2}$ *und wir bereits gezeigt haben, dass* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ *für* $n > 1$ *konvergiert. Damit konvergiert natürlich auch* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a}{k^n} = a \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$.

Die beiden folgenden Konvergenzkriterien basieren auf der Anwendung des Majorantenkriteriums auf die geometrische Reihe, wie man aus den Beweisen ablesen kann.

Satz 3.32 (Wurzelkriterium)**.** *Sei* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe. Gibt es ein* $c \in \mathbb{R}$ *und* $q \in \mathbb{R}$ *mit* $0 \leq q < 1$, *sodass* $|a_k| \leq c \cdot q^k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$, *dann ist die Reihe absolut konvergent.*

Beweis: Die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ ist für $|q| < 1$ konvergent (wie gezeigt). Damit ist auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c \cdot q^k$ konvergent.
Sei nun $c_k = c \cdot q^k$, sodass Satz 3.30 angewendet werden kann. □

Hinreichend für das Wurzelkriterium ist die Existenz von $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$.

Beispiel 3.17. *Wir betrachten die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{k}\right)^k$ *mit* $0 \leq x < 1$.
Es gilt $\sqrt[k]{\left(x + \frac{1}{k}\right)^k} = \left(x + \frac{1}{k}\right)$ *und* $\lim\limits_{k\to\infty} \left(x + \frac{1}{k}\right) = x < 1$. *Damit konvergiert die Reihe.*

Satz 3.33 (Quotientenkriterium)**.** *Sei* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe mit* $a_k \neq 0$ *für alle* $k \geq n_0$. *Es gebe eine reelle Zahl* $q \in \mathbb{R}$ *mit* $0 < q < 1$, *sodass* $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q$ *für alle* $k \geq n_0$, *dann ist die Reihe absolut konvergent.*

Beweis: Für $k \geq n_0 + 1$ gilt $\left|\frac{a_k}{a_{n_0}}\right| = \left|\frac{a_k}{a_{k-1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}\right| \cdots \left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right| \leq q^{k-n_0}$
Dann ist $|a_k| \leq |a_{n_0}| \cdot q^{k-n_0} = \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} \cdot q^k = c \cdot q^k$
Nach Satz 3.32 ist die Reihe konvergent. □

Der Beweis des Quotientenkriteriums mithilfe des Wurzelkriteriums zeigt, dass das Wurzelkriterium stärker als das Quotientenkriterium ist (d. h. mithilfe des Wurzelkriteriums kann die Konvergenz zusätzlicher Reihen nachgewiesen werden).
Hinreichend für das Quotientenkriterium ist die Existenz des Grenzwertes $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q < 1$.
Falls beim Quotientenkriterium $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q > 1$ gilt, so ist die Reihe divergent. Für $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$ kann man keine Aussage über Konvergenz oder Divergenz machen.

Beispiel 3.18. *Die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ *ist absolut konvergent für alle* $x \in \mathbb{R}$.
Für $x = 0$*: trivial*
Für $x \neq 0$*: Setze* $a_k := \frac{x^k}{k!} \neq 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$.

$$\left.\begin{array}{l} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{x}{k+1}\right| = \frac{|x|}{k+1} \\ \lim\limits_{k\to\infty} \frac{|x|}{k+1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{Konvergenz}$$

Wir betrachten nun die Auswirkungen der Umordnung der Reihenglieder auf das Ergebnis der Summation. Im endlichen Fall ist es offensichtlich, dass die Umordnung der Summanden zu keiner Ergebnisänderung führt. Bei unendlichen Reihen gilt dies nur eingeschränkt, wie wir im folgenden Satz und dem danach folgenden Beispiel sehen werden.

Satz 3.34 (Umordnung)**.** *Sei* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine absolut konvergente Reihe. Dann konvergiert jede Umordnung der Glieder der Reihe gegen den selben Grenzwert.*

Beweis: Sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Abbildung, die jedem $n_1 \in \mathbb{N}$ genau ein $n_2 \in \mathbb{N}$ zuordnet, sodass jedem $n_2 \in \mathbb{N}$ genau ein $n_1 \in \mathbb{N}$ zugeordnet wird (bijektive Abbildung).
Sei $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = A$. Wir zeigen, dass auch $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} = A$ gilt.
Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \left|A - \sum\limits_{k=1}^{n_0-1} a_k\right| = \left|\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$
Wähle n_1 so groß, dass $\{1, 2, \ldots, n_0\} \subseteq \{\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n_1)\}$.
Dann gilt für alle $m \geq n_1$ $(\geq n_0)$:

$$\left|\sum_{k=1}^{m} a_{\tau(k)} - A\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{m} a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{n_0-1} a_k - A\right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Damit konvergiert die umgeordnete Reihe gegen den selben Grenzwert. □

Der vorherige Satz gilt nicht, wenn wir statt absoluter Konvergenz nur Konvergenz fordern, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 3.19. *Die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ *ist, wie gezeigt wurde, konvergent, aber nicht absolut konvergent, da* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *divergiert.*
Es gibt eine Umordnung τ*, sodass* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\tau(k)-1}}{\tau(k)} = \infty$.
Wir ordnen dazu die Glieder mit ungeraden Indizes $2^{n-1}+1$ *bis* $2^n - 1$ *hintereinander an und danach den geraden Index* $2n$*. Also*

$$1, 2, 3, 4, (5, 7), 6, (9, 11, 13, 15), 8, \ldots$$

In dieser Ordnung kommen alle Indizes vor, es gilt aber:

$$\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} > \frac{2^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4}$$

für $n \geq 2$. Von diesem Wert wird $(2n)^{-1}$ abgezogen, sodass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\tau(k)-1}}{\tau(k)} \geq 1 - \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2n} \right) = \infty.$$

3.7 Die Exponentialreihe

Satz 3.35 (Exponentialreihe)**.** *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die* Exponentialreihe

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

absolut konvergent.

Beweis: Mit Hilfe des Quotientenkriterium (Satz 3.33) gilt für $k \geq n_0 = 2\lceil x \rceil$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{x^k} \right| = \frac{|x|}{k+1} < \frac{1}{2}.$$

□

Die Exponentialreihe definiert die Eulersche Zahl
$e = \exp(1) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 2,71828\ldots$
Es gibt weitere Darstellungen der Eulerschen Zahl z. B. $e = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ oder $e = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.
Die Exponentialreihe definiert die Exponentialfunktion $\exp(x)$, für die es zahlreiche Anwendungen in den Naturwissenschaften und auch in Gesellschafts- und Wirtschaftwissenschaften gibt. Es werden mithilfe der Exponentialreihe Wachstums- und Zerfallsprozesse beschrieben. Die Exponentialreihe erlaubt die Approximation der Werte der Exponentialfunktion durch endliche Summation.

Satz 3.36 (Cauchy-Produkt)**.** *Seien $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergente Reihen. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $c_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$. Dann ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k \right)$ absolut konvergent.*

Beweis: Wir definieren $c_n := \sum\limits_{\substack{k+l=n \\ k,l \in \mathbb{N}_0}} a_k \cdot b_l$ und
$C_N := \sum\limits_{n=0}^{N} c_n = \sum\limits_{n=0}^{N} \sum\limits_{\substack{k+l=n \\ k,l \in \mathbb{N}_0}} a_k \cdot b_l$.
Die beiden folgenden Mengen beinhalten Paare (k, l)

$$Q_N := \{(k, l) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid k \leq N, l \leq N\},$$

$$\Delta_N := \{(k, l) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid k + l \leq N\}.$$

Die Mengen werden in Abbildung 3.1 dargestellt. Offensichtlich gilt $Q_{\lfloor N/2 \rfloor} \subset \Delta_N \subset Q_N$ für $N \geq 2$.

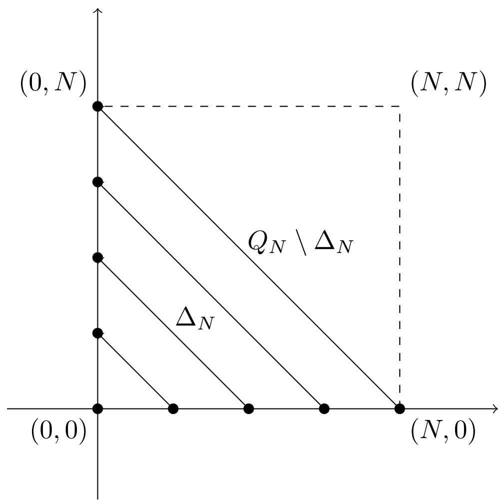


Abbildung 3.1: Darstellung der Mengen Q_N und Δ_N.

Multiplikation der Teilsummen $A_N := \sum\limits_{n=0}^{N} a_n$ und $B_N := \sum\limits_{n=0}^{N} b_n$ liefert

$$A_N \cdot B_N = \sum_{k,l \in Q_N} a_k \cdot b_l.$$

Da $\Delta_N \subset Q_N$ gilt $A_N B_N - C_N = \sum\limits_{k,l \in Q_N \setminus \Delta_N} a_k \cdot b_l$.

Für die Teilsummen $A_N^* := \sum\limits_{n=0}^{N} |a_n|$ und $B_N^* := \sum\limits_{n=0}^{N} |b_n|$ erhält man

$$A_N^* B_N^* = \sum_{k,l \in Q_N} |a_k| \cdot |b_l|.$$

Ferner folgt $Q_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \subset \Delta_N \;\Rightarrow\; Q_N \setminus \Delta_N \subset Q_N \setminus Q_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}$, womit gilt

$$|A_N B_N - C_N| \leq \sum_{k,l \in Q_N \setminus Q_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}} |a_k||b_l| = A_N^* B_N^* - A_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^* B_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^*.$$

Da beide Reihen absolut konvergent sind, konvergiert $A_N^* B_N^*$, ist also ein Cauchy-Folge, sodass für $N \to \infty$ die obige Differenz gegen 0 konvergiert und damit auch

$$\lim_{N\to\infty} C_N = \lim_{N\to\infty} A_N B_N = \lim_{N\to\infty} A_N \cdot \lim_{N\to\infty} B_N.$$

Damit wurde gezeigt, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert. Die absolute Konvergenz folgt aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot |b_{n-k}| \;. \qquad \square$$

Der folgende Satz leitet einige Eigenschaften von $\exp(x)$ her und nutzt dazu Cauchy-Produkte.

Satz 3.37 (Eigenschaften der Exponentialreihe)**.** *Für die Exponentialreihe* $\exp(x)$ *gelten folgende Eigenschaften:*

i) $\forall x, y \in \mathbb{R}.\ \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}.\ \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

iii) $\forall x \in \mathbb{R}.\ \exp(x) > 0$

iv) $\forall n \in \mathbb{Z}.\ \exp(n) = e^n$

Beweis:

i) Wir bilden das Cauchy-Produkt der beiden absolut konvergenten Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$. Für c_n gilt dann

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}(x+y)^n.$$

Die einzelnen Umformungen folgen aus dem binomischen Lehrsatz, den wir in der Vorlesung nicht explizit behandelt haben. Der Beweis für die Schritte sollte deshalb zur Übung durchgeführt werden. Wir haben nach obiger Umformung

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y).$$

ii) Aufgrund von *i)* gilt

$$\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1.$$

Daraus folgt $\exp(x) \neq 0$ und $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

iii) Für $x \geq 0$ gilt

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots \geq 1 > 0,$$

da $\frac{x^k}{k!} > 0$.
Für $x < 0$ folgt $-x > 0$ und damit $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0$, wie aus *i)* und *ii)* folgt.

iv) Wir zeigen per Induktion über n, dass $\exp(n) = e^n$ gilt.
Induktionsanfang $n = 0 : \exp(0) = 1 = e^0$.
Induktionsschritt $n \to n+1$: Sei $exp(n) = e^n$ und $exp(1) = e$ (nach Definition), nach *i)* gilt

$$\exp(n+1) = \exp(n) \cdot \exp(1) = e^n \cdot e^1 = e^{n+1}.$$

Damit ist der Beweis für $n \geq 0$ komplett. Mittels *ii)* gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}.$$

Damit ist der Satz für alle $n \in \mathbb{Z}$ bewiesen.

□

Teil *iv*) lässt sich auf $x \in \mathbb{R}$ ausdehnen. Es ist dann $\exp(x) = \exp(n+\delta) = e^n \cdot \exp(\delta)$ mit $\delta = x - n$, $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$. Diese Darstellung kann man nutzen, um reellwertige Exponenten für eine allgemeine Basis, nicht nur der Basis e, zu definieren. Wir werden dies später in Abschnitt 4.6 etwas weiter vertiefen.

3.8 Potenzreihen

Potenzreihen sind eine wichtige Klasse von Reihen, die einige angenehme Eigenschaften haben, sodass sie sich einfach handhaben lassen. Gleichzeitig kann man mit Hilfe von Potenzreihen viele Funktionen approximieren, wie wir später noch sehen werden. An dieser Stelle werden nur die ersten Grundlagen der Potenzreihen eingeführt. In Kapitel 7 werden einige weitere Ergebnisse zur Approximation von Funktionen mit Potenzreihen vorgestellt.

Definition 3.38. *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge und $x \in \mathbb{R}$, dann ist eine* Potenzreihe *$P(x)$ wie folgt definiert:*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

mit $a_k \in \mathbb{R}$.

In der Literatur findet man zum Teil auch die Darstellung

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

für Potenzreihen. In dieser Darstellung bezeichnet man x_0 als Entwicklungspunkt. Beide Darstellungen sind äquivalent, wenn wir $x' = x - x_0$ wählen.
Ein Beispiel für eine Potenzreihe ist die im letzten Abschnitt definierte Exponentialreihe mit $a_k = (k!)^{-1}$. x wird auch als Parameter der Potenzreihe bezeichnet. Interessant ist die Frage, für welche x die Potenzreihe konvergiert. Bei der Exponentialreihe haben wir gezeigt, dass diese für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Satz 3.39 (Konvergenz von Potenzreihen)**.** *Konvergiert eine Potenzreihe $P(x)$ in einem Punkt $x_0 \neq 0$, so konvergiert sie in jedem Punkt x mit $|x| < |x_0|$ absolut.*

Beweis: Da $P(x_0)$ konvergiert, gibt es ein S mit $|a_n x_0^n| \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist aber

$$\left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x^n} \right| = |a_n x^n| \cdot \left| \left(\frac{x_0}{x} \right)^n \right| \leq S$$

und damit auch

$$|a_n x^n| \leq q^n S \text{ mit } q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1.$$

Die Reihe konvergiert damit absolut nach dem Wurzelkriterium (Satz 3.32). □

Der Konvergenzradius einer Potenzreihe P ist definiert durch

$$r = \sup \{ x \in \mathbb{R} \mid P(x) \text{ konvergiert} \}. \tag{3.8.1}$$

Dann ist $P(x)$ absolut konvergent für alle $|x| < r$ und divergent für $|x| > r$.

Beispiel 3.20. *Wir haben bereits die geometrische Reihe* $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ *kennen gelernt und gezeigt, dass die Reihe für* $|x| < 1$ *absolut gegen den Grenzwert* $(1-x)^{-1}$ *konvergiert. Damit ist der Konvergenzradius* $r = 1$*. Es ist zu beachten, dass die geometrische Reihe für* $x = 1$ *divergiert.* r *ist also das Supremum und nicht das Maximum der obigen Menge für diese Reihe.*

Potenzreihen werden uns in Kapitel 7 noch einmal in Form von Taylor-Reihen begegnen. Diese Reihen erlauben es Funktionen, die sich nicht exakt berechnen lassen, zu approximieren und sind deshalb von großer praktischer Bedeutung.