Kapitel 1

Grundlagen und Einführung

Die folgenden Notizen fassen die wesentlichen Inhalte der Vorlesung Mathematik für Informatiker 2 zusammen, deren Schwerpunkt die Grundlagen der Analysis sind. Die Notizen sind als Ergänzung der eigenen Mitschrift und entsprechender Lehrbücher zu sehen. Es gibt darüber hinaus zahlreiche Lehrbücher über Analysis, die im Wesentlichen ähnlich aufgebaut sind. Man kann dabei zwischen mathematisch beweisorientierten Lehrbüchern und solchen, die eher anwendungsorientiert sind und weitgehend auf Beweise verzichten, wählen. Wir werden im Rahmen der Vorlesung die mathematischen Grundlagen fundiert einführen und dabei an vielen Stellen auch Beweise nachvollziehen, da diese oftmals Beweistechniken nutzen, die auch in anderen Kontexten angewendet werden können.

Als Lehrbuch zur Ergänzung der Vorlesung ist insbesondere das Buch von Forster [2] geeignet. Umfangreicher und über den Stoff der Vorlesung hinausgehend ist dassind die Bücher von Königsberger [5], Deitmar [1] oder Walter [4]. Eine gute Darstellung großer Teil des behandelten Stoffs findet man auch in dem Skript der Fern-Universität Hagen [3]. Weiterhin beinhaltet auch das alte Skript der Mathematik für Informatiker [6] große Teile des Vorlesungsstoffs. Eher anwendungsorientiert mit zahlreichen Anwendungen aus der Informatik aber dafür weniger Grundlagen und Beweisen sind die Bücher von Teschl [7] und Oberguggenberger/Ostermann [8]. Darüber hinaus gibt es zahlreiche weitere Lehrbücher, die den Vorlesungsstoff (teilweise) abdecken und hier nicht genannt sind.

Im Folgenden werden wir mit einer kurzen Wiederholung einiger Teile aus Mathematik für Informatiker 1 beginnen, die für das weitere Verständnis notwendig sind. Daran anschließend behandeln wir den Körper der reellen Zahlen und danach Folgen und Reihen. Schließlich gehen wir zu Funktionen und deren Differenzierbarkeit über. Danach betrachten wir noch kurz die Lösung allgemeiner Gleichungssysteme und die lokale Approximation von Funktionen durch Potenzreihen. Die Integralrechnung ist Inhalt von Kapitel 8. Dieser Teil enthält auch einen kurzen Ausflug in die Welt der Differenzialgleichungen. Im Kapitel 9 wird die Differentialrechnung von einer auf mehrere Variablen erweitert. Den Abschluss der Vorlesung bildet ein Kapitel über Kombinatorik, das eigentlich nicht zur klassischen Analysis gehört, aber viele praktische Anwendungen innerhalb und außerhalb der Informatik findet.

1.1 Was ist Analysis?

Analysis ist neben der linearen Algebra ein Grundpfeiler der Mathematik. Die Grundlage der Analysis stellt die sogenannte Infinitesimalrechnung (d. h. das Rechnen mit beliebig kleinen Abständen) dar. Sie wurde im 17. Jahrhundert unabhängig voneinander von Gottfried Wilhelm Leibniz und Issac Newton entwickelt. Im Speziellen befasst sich die Analysis mit

- Folgen und Reihen, insbesondere deren Grenzwerten, sowie

- Funktionen reeller Zahlen, insbesondere deren Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integration.

Analysis findet in allen Natur- und Ingenieurwissenschaften Anwendung. Funktionen werden genutzt, um Modelle der Realität zu erzeugen. Beispielsweise können die Fallgesetze der Physik, chemische Reaktionsgleichungen oder Differentialgleichungen für elektrische Schaltkreise mit Hilfe der Analysis modelliert werden. Auch in der Informatik findet die Analysis Anwendung, beispielsweise für die Laufzeitanalyse von Algorithmen oder in der Modellbildung zur Systemanalyse.
Analysis konzentriert sich auf kontinuierliche Beschreibungen von Zusammenhängen. Dies mag auf den ersten Blick nicht zur Informatik passen, die im Wesentlichen von diskreten und oftmals endlichen Darstellungen ausgeht. In der Realität sind aber viele Problemstellungen sehr komplex und sehr groß, so dass selbst endliche Probleme nicht mehr durch vollständiges Ausprobieren aller Alternativen analysiert werden können. In solchen Fällen ist es oft sinnvoll, nicht das diskrete Problem sondern eine kontinuierliche *Approximation* davon zu betrachten. Die Analysis hilft bei der Suche nach *Approximationen* und *Abschätzungen* komplexer diskreter Probleme durch einfache kontinuierliche Darstellungen. Ein weiteres Anwendungsgebiet der Analysis ist die Untersuchung von Grenzprozessen. So stellt sich oft die Frage, wie sich ein System verhält, wenn die Eingabe sehr groß wird oder es für sehr lange Zeit betrieben wird. Die Analysis stellt Methoden zur Verfügung, diese Verhalten durch einfache Funktionen näherungsweise zu berechnen. Schließlich werden Methoden der Analysis eingesetzt, um Funktionswerte zu berechnen. So werden wir zum Beispiel in der Vorlesung die Werte der Sinus- und Cosinus-Funktion durch unendliche Summen darstellen, die es erlauben durch endliche Summation, die Werte im Prinzip beliebig genau zu approximieren.
In der Informatik finden Methoden der Analysis unter anderem in der Computergraphik, der Datenanalyse, der Komplexitätstheorie, der Simulation und beim maschinellen Lernen Anwendung. Weiterhin nutzen viele Natur- und Ingenieurwissenschaften Analysismethoden, so dass Informatikerinnen und Informatiker, die in diesen Anwendungsgebieten arbeiten, ebenfalls damit in Berührung kommen werden.

1.2 Aussagen

Zunächst wollen wir den Begriff der Aussage einführen.

Definition 1.1 (Aussage). *Aussagen sind (schrift)sprachliche Gebilde, denen ein Wahrheitswert wahr* (w) *oder falsch* (f) *zugeordnet werden kann.*

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
f	f	w	f	f	w	w
f	w	w	w	f	w	f
w	f	f	w	f	f	f
w	w	f	w	w	w	w

Tabelle 1.1: Wahrheitstafel für logische Operationen.

Beispiel 1.1 (Aussagen)**.**

1. *Borussia Dortmund war deutscher Fußballmeister 2012.* (w)

2. *Delfine sind Fische.* (f)

3. *Fünf ist eine Primzahl.* (w)

4. *Es gibt unendlich viele Primzahlen.* (w)

5. *Jede gerade natürliche Zahl größer als zwei ist Summe zweier Primzahlen. (?)*

Der Wahrheitswert der letzten Aussage ist unbekannt. Sie wird auch als Goldbachsche Vermutung *bezeichnet und stellt eine unbewiesene Aussage dar. Die folgenden beiden Sätze stellen* keine *Aussagen dar.*

1. *Guten Tag!*

2. *Diese Aussage ist falsch.*

Aussagen können durch Operationen verknüpft werden.

Definition 1.2. *Seien A und B Aussagen, dann bilden auch die folgenden Operationen Aussagen:*

1. ***Negation** von A: Symbolische Schreibweise $(\neg A)$.*
Die Aussage ist wahr, wenn A falsch ist.

2. ***Disjunktion** von A und B: Symbolische Schreibweise $(A \vee B)$.*
Die Aussage ist wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist.

3. ***Konjunktion** von A und B: Symbolische Schreibweise $(A \wedge B)$.*
Die Aussage ist wahr, wenn beide Aussagen wahr sind.

4. ***Implikation** von A und B: Symbolische Schreibweise $(A \Rightarrow B)$.*
Die Aussage ist wahr, wenn A falsch oder B wahr ist.

5. ***Äquivalenz** von A und B: Symbolische Schreibweise $(A \Leftrightarrow B)$.*
Die Aussage ist wahr, wenn beide Aussagen den gleichen Wahrheitswert besitzen.

Aussagen mit identischen Wahrheitswert bezeichnet man als äquivalent. Wir schreiben $A \equiv B$, wenn die Aussagen A und B äquivalent sind.

Beispiel 1.2 (Äquivalente Aussagen)**.**

1. ***Doppelte Negation:*** $\neg(\neg(A)) \equiv A$

2. ***Assoziativität:*** $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ *und* $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$

3. ***Kommutativität:*** $A \vee B \equiv B \vee A$ *und* $A \wedge B \equiv B \wedge A$

4. ***Absorption:*** $A \wedge (A \vee B) \equiv A$

Aussagenlogik ist nicht ausreichend für die Behandlung allgemeiner mathematischer Theorien und wird deshalb zur Prädikatenlogik erweitert. Prädikatenlogik wird in der Vorlesung Logik detailliert behandelt, wir stellen deshalb nur einige Grundlagen vor, die für die Beweisführung genutzt werden.
Prädikatenlogik basiert auf einer grundlegenden Struktur z. B. den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit den Operationen $+$ und $\cdot$, sowie den Relationen $=$ und $\leq$. Damit können wir die Aussagenlogik erweitern und Aussagen wie $1+2=3$ und $n+1 \leq 4$ (n ist eine freie Variable aus einer Grundmenge, hier $\mathbb{N}$) definieren.
Zur Erweiterung der Aussageformen werden der All- und der Existenzquantor verwendet.

Definition 1.3 (Allquantor)**.** *Sei $A(n)$ eine Aussage mit freier Variable n. Die Aussage $\forall n.\, A(n)$ ist* genau dann *wahr,* wenn *$A(n)$ für alle n aus der Grundmenge gilt.*

Definition 1.4 (Existenzquantor)**.** *Sei $A(n)$ eine Aussage mit freier Variable n. Die Aussage $\exists n.\, A(n)$ ist* genau dann *wahr,* wenn *$A(n)$ für mindestens ein n aus der Grundmenge gilt.*

1.3 Mengen

Im Folgenden führen wir den Begriff der Menge ein.

Definition 1.5 (Menge)**.** *Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten* wohlunterscheidbaren *Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche Elemente von M genannt werden, zu einem Ganzen.*

Wir schreiben $m \in M$ ("m ist ein Element der Menge M") oder $m \notin M$ ("m ist kein Element der Menge M").

Erläuterung 1.1. *Es gibt mehrere Möglichkeiten Mengen zu beschreiben:*

- *Aufzählung der Elemente: $M := \{$Samstag, Sonntag, Montag$\}$*

- *Durch Prädikate über die Elemente: $M := \{m \mid A(m)\}$, $m \in M \Leftrightarrow A(m) = w$, wobei A eine Aussage mit freier Variable m ist, z. B. $M := \{m \mid m$ ist ein Datum $\wedge$ m kommt nur in Schaltjahren vor$\} = \{$29. Februar$\}$*

Wir schreiben $M = \emptyset$ für die leere Menge (Menge ohne Elemente).

Definition 1.6 (Mengenrelationen)**.** *Seien A und B Mengen, dann gilt*

1. $A = B$, genau dann wenn $m \in A \Leftrightarrow m \in B$. *Wir schreiben $A \neq B$ für $\neg(A = B)$.*

2. $A \subseteq B$, genau dann wenn $m \in A \Rightarrow m \in B$.

3. $A \subset B$, genau dann wenn $A \subseteq B \wedge A \neq B$.

Definition 1.7 (Potenzmenge)**.** *Sei M eine Menge. Die* Potenzmenge *ist definiert durch $\mathcal{P}(M) := \{M' \mid M' \subseteq M\}$.*

Beispiel 1.3 (Potenzmenge)**.** *Sei $M := \{1, 2, 3\}$, dann gilt:*

$$\mathcal{P} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Mengen können durch bestimmte Operationen verknüpft werden.

Definition 1.8 (Verknüpfung von Mengen)**.** *Seien A und B Mengen. Dann sind die folgenden* Mengenverknüpfungen *definiert:*

- ***Vereinigung:*** $A \cup B := \{m \mid m \in A \vee m \in B\}$
- ***Schnitt:*** $A \cap B := \{m \mid m \in A \wedge m \in B\}$
- ***Differenz:*** $A \setminus B := \{m \mid m \in A \wedge m \notin B\}$
- ***Symmetrische Differenz:*** $A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- ***Kartesische Produkt:*** $A \times B := \{(m, n) \mid m \in A \wedge n \in B\}$

In Abb. 1.1 werden diese Operationen veranschaulicht. Vereinigung und Schnitt lassen sich auch auf mehrere Mengen verallgemeinern. Sei $\mathcal{N}$ eine Menge von Mengen über einer Grundmenge M, dann gilt:

1. $\bigcup\limits_{M' \in \mathcal{N}} M' := \{m \in M \mid \exists M' \in \mathcal{N}.\, m \in M'\}$
2. $\bigcap\limits_{M' \in \mathcal{N}} M' := \{m \in M \mid \forall M' \in \mathcal{N}.\, m \in M'\}$

Sätze in der Mathematik sind fast immer in der Form $A \Rightarrow B$ oder $A \Leftrightarrow B$. Ziel ist es, diese Aussagen nachzuweisen durch

- vollständiges Probieren in einfachen Fällen mit endlich vielen Möglichkeiten
- oder besser durch die Anwendung von Regeln.

Beispiel 1.4 (Regelanwendung)**.**

$$\begin{aligned} A \vee w &\equiv A \vee (A \vee \neg A) \textit{ (Negation)} \\ &\equiv (A \vee A) \vee \neg A \textit{ (Assozitivität)} \\ &\equiv A \vee \neg A \textit{ (Idempotenz)} \\ &\equiv w \textit{ (Negation)} \end{aligned}$$

Die zentralen Forderungen an ein Regelsystem sind:

Korrektheit: Es können nur gültige Aussagen durch Ersetzen abgeleitet werden.

Vollständigkeit: Alle gültigen Aussagen können durch Ersetzen hergeleitet werden.

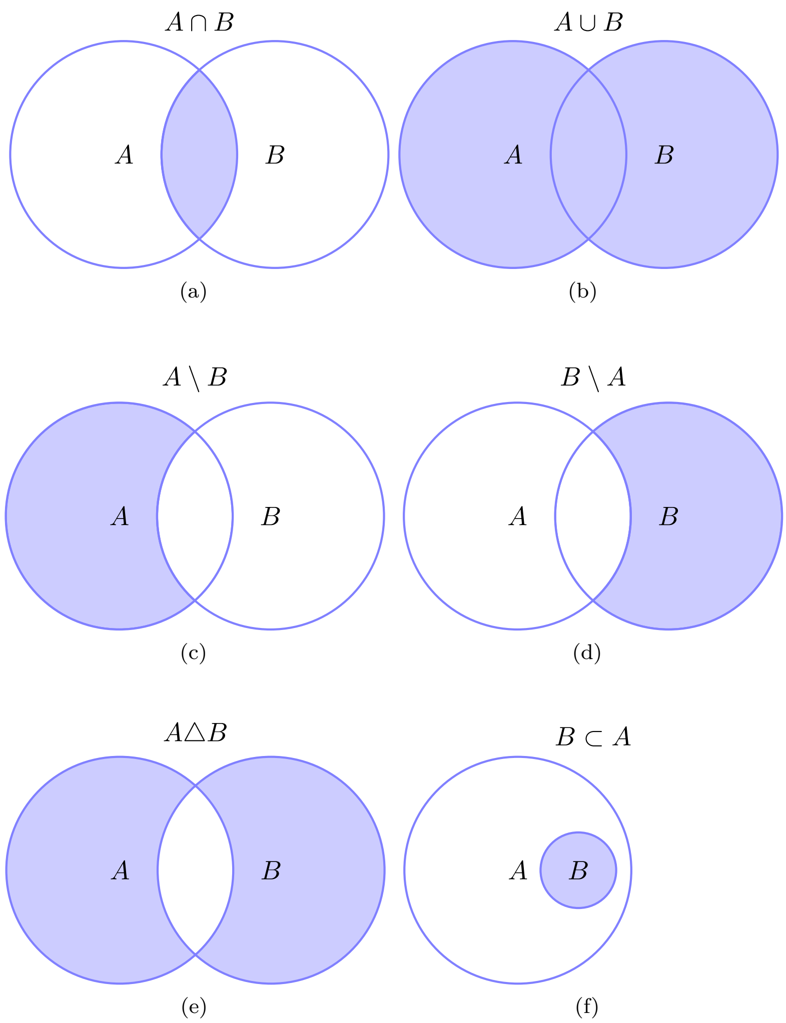

Abbildung 1.1: Graphische Darstellung von Mengenoperationen: (a) Schnitt, (b) Vereinigung, (c) und (d) Differenz, (e) symmetrische Differenz, (f) Teilmenge.

1.4 Natürliche Zahlen

Wir setzen die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ mit den Operationen $+$ und $\cdot$ sowie den Relationen $=$ und $>$ als bekannt voraus und nutzen ferner für $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} n \geq m \quad &\Leftrightarrow \quad (n > m) \vee (n = m) \\ n < m \quad &\Leftrightarrow \quad \neg(n \geq m) \\ n \leq m \quad &\Leftrightarrow \quad \neg(n > m) \end{aligned}$$

Die Menge $\mathbb{N}$ ist mit dem beiden Relationen $=$ und $>$ vollständig geordnet, d. h. für zwei beliebige $n, m \in \mathbb{N}$ gilt entweder $n > m$ oder $n = m$ oder $m > n$.
Mit $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen mit 0.

Erläuterung 1.2 (Beweisprinzip der vollständigen Induktion)**.** *Aussage $A(n)$ gilt für alle $n \geq n_0$, falls folgende zwei Schritte bewiesen wurden:*

1. ***Induktionsanfang:*** *$A(n_0)$ ist richtig*

2. ***Induktionsschritt:*** *Für jedes $n \geq n_0$, für das $A(n)$ wahr ist, ist auch $A(n+1)$ wahr.*

Satz 1.9. *Sei $S(n) := 1 + 2 + 3 + \ldots + n$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:*

$$S(n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Beweis: Induktion über n.

Induktionsanfang $(n = 1)$: $S(1) = 1 = \dfrac{1 \cdot (1+1)}{2}$

Induktionschritt $(n \to n+1)$: Wir nehmen an, dass

$S(n) = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$ gilt und zeigen, dass dann $S(n+1) = \dfrac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$ gilt. Also

$$\begin{aligned} S(n+1) \quad &= \quad \sum_{i=1}^{n+1} i \;=\; \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \;=\; S(n) + n + 1 \\ &= \quad \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n + 1 \;=\; \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}. \end{aligned}$$

$\square$

Einige Operationen und Notationen:

- $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$, falls $m \leq n$
- $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = 0$, falls $m > n$
- $\prod\limits_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$, falls $m \leq n$

- $\prod_{k=m}^{n} a_k = 1$, falls $m > n$
- $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, für $n \geq 1$ sowie $0! = 1$
- $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ für $n \geq k \geq 0$.

Erläuterung 1.3. *Falls es sich aus dem Kontext ergibt, lassen wir $\cdot$ für die Multiplikation weg (d. h. $a \cdot b \equiv ab$).*

1.5 Ganze und rationale Zahlen

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ lassen sich leicht erweitern.

Definition 1.10 (Ganze Zahlen)**.** *Die Menge $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ heißt die* Menge der ganzen Zahlen*.*

Definition 1.11 (Rationale Zahlen)**.** *Die Menge $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\}$ heißt die* Menge der rationalen Zahlen*. Man bezeichnet p als den* Zähler *und q als den* Nenner*.*

Einige Rechenregeln für $\mathbb{Q}$:

- $\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$
- $\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$

Für $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Q}$:

- $a^n = \prod_{k=1}^{n} a$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$
- $a^m \cdot a^n = a^{n+m}$
- $a^n \, b^n = (ab)^n$
- $(a^n)^m = a^{nm} = (a^m)^n$

Eine Ordnung auf $\mathbb{Q}$ ist definiert durch

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} \Leftrightarrow p_1 \, q_2 < p_2 \, q_1 \ \wedge \ q_1, q_2 > 0 \ .$$

Rechenregeln für Ungleichungen, $a, b, c \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}$:

- $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$
- $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$

- $a < b \Leftrightarrow ac < bc$, falls $c > 0$
- $a < b \Leftrightarrow ac > bc$, falls $c < 0$
- $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$, falls $a, b > 0$

Die Regeln können auch für $\geq$ genutzt werden.
Offensichtlich gilt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Die Anzahl der Elemente in allen drei Mengen ist unendlich (dargestellt durch ∞).
Es ist nun naheliegend zu fragen, ob es mehr rationale als natürliche Zahlen gibt? Die Antwort darauf kann man mit der Diagonalisierungsmethode, die auf Georg Cantor (1845–1918) zurückgeht, geben. Mit Hilfe der Diagonalisierung kann man jeder rationalen Zahl eine natürliche Zahl eindeutig zuordnen, indem man folgendes Schema benutzt und den Pfeilen folgend den positiven rationalen Zahlen jeweils eine natürliche Zahl zuordnet.

$$
\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & \cdots \\
& \swarrow & & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

Offensichtlich werden alle rationalen Zahlen dem Schema folgend aufgezählt. Der Ansatz lässt sich einfach erweitern, sodass auch negative rationale Zahlen berücksichtigt werden. Damit zeigt sich, dass beide Mengen im Prinzip gleich mächtig sind. Man spricht von abzählbar unendlichen Mengen.
Daraus ergibt sich natürlich sofort die Frage, ob $\mathbb{Q}$ die Menge aller Zahlen umfasst? Die Griechen (Pythagoras ca. 570-480 v. Chr.) waren davon überzeugt und glaubten damit auch, dass es ein $q \in \mathbb{Q}$ gibt, sodass $q^2 = 2$ oder anders ausgedrückt, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Euklid (ca. 300 v. Chr.) konnte zeigen, dass dies nicht der Fall ist und damit Zahlen existieren, die nicht zu $\mathbb{Q}$ gehören.

Satz 1.12. *Es gibt kein $d \in \mathbb{Q}$, sodass $d^2 = 2$.*

Beweis: Offensichtlich gilt $d^2 = 1^2 + 1^2$ (Satz des Pythagoras). Falls $d \in \mathbb{Q}$, dann gilt $d = \frac{p}{q} \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$.
Beobachtung: p und q sind nicht beide gerade Zahlen, da man sonst gemeinsame Faktoren kürzen könnte.
Annahme: Sei p^2 eine gerade Zahl.
Dann ist p ebenfalls eine gerade Zahl. Daraus folgt, dass eine Zahl $r \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $p = 2r$ gilt. Damit gilt auch $p^2 = 4r^2 = 2q^2 \Rightarrow 2r^2 = q^2$. Damit muss auch q eine gerade Zahl sein. Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, sodass p und q nicht existieren können.
Falls p ungerade und q gerade ist, so gilt $q = 2r$ und damit $p^2 = 2 \cdot (2r)^2 \Rightarrow p^2 = 8r^2$, womit auch p gerade sein müsste, was ebenfalls im Widerspruch zu unserer Annahme steht. $\square$