10. Abzählende Kombinatorik

Kapitelgliederung

10.1 Grundlagen

Satz 10.1 (Summen- und Produktregel)

Seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Dann gilt

a) $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$ *falls* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *für alle* $i \neq j$.

b) $\left|\times_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$.

Satz 10.1 (Summen- und Produktregel)

Seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Dann gilt

a) $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$ *falls* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *für alle* $i \neq j$.

b) $\left|\times_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$.

Beweisidee

Teil a) trivial. Teil b) vollständige Induktion. $\square$

10.2 Prinzip des doppelten Abzählens

Satz 10.2 (Prinzip des doppelten Abzählens)

Sei $R \subseteq A \times B$ eine Relation über endliche Mengen A und B. Für $x \in A$ bezeichne $a(x)$ die Anzahl der mit x in Relation stehenden $y \in B$ und $b(y)$ die mit y in Relation stehenden $x \in A$. Dann gilt

$$\sum_{x \in A} a(x) = \sum_{y \in B} b(y) .$$

Satz 10.2 (Prinzip des doppelten Abzählens)

Sei $R \subseteq A \times B$ eine Relation über endliche Mengen A und B. Für $x \in A$ bezeichne $a(x)$ die Anzahl der mit x in Relation stehenden $y \in B$ und $b(y)$ die mit y in Relation stehenden $x \in A$. Dann gilt

$$\sum_{x \in A} a(x) = \sum_{y \in B} b(y)\,.$$

Beweisidee

Nutzung der charakteristischen Funktion der Relation. $\square$

10.3 Schubfachprinzip

Satz 10.3 (Schubfachprinzip; engl. pigeonhole principle)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen endlichen Mengen X und Y mit $|X| > |Y|$. Dann existiert ein $y \in Y$, so dass für $x_1, x_2 \in X$ $(x_1 \neq x_2)$ $f(x_1) = f(x_2) = y$.

Satz 10.3 (Schubfachprinzip; engl. pigeonhole principle)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen endlichen Mengen X und Y mit $|X| > |Y|$. Dann existiert ein $y \in Y$, so dass für $x_1, x_2 \in X$ $(x_1 \neq x_2)$ $f(x_1) = f(x_2) = y$.

Beweisidee

Annahme, dass es nur ein x für jedes y gibt wird zum Widerspruch geführt. $\square$

10.4 Auswahl von k aus n Elementen

Definition 10.4

Für $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $k \in \mathbb{N}$ $(n \geq k)$ *wird der Ausdruck*

$$\binom{n}{k} := \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{(sprich: „}n\text{ über }k\text{“)}$$

als ***Binomialkoeffizient*** *bezeichnet. Für* $k = 0$ *wird*

$$\binom{n}{0} := 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ *festgelegt.* □

Satz 10.5 (Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten)

Es gilt

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

für $k, n \in \mathbb{N}_0$.

Satz 10.5 (Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten)

Es gilt

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

für $k, n \in \mathbb{N}_0$.

Beweisidee

Auflösen der Definition des Binomialkoeffizienten. □

Satz 10.6

Die Anzahl der Möglichkeiten für die Auswahl von k Elementen aus einer n-elementigen Menge ist

$$\binom{n}{k}$$

für $k, n \in \mathbb{N}_0$.

Satz 10.6

Die Anzahl der Möglichkeiten für die Auswahl von k Elementen aus einer n-elementigen Menge ist

$$\binom{n}{k}$$

für $k, n \in \mathbb{N}_0$.

Beweisidee

Fallunterscheidung, für $n = 0$, $k = 0$ und die restlichen Fälle. Im letzten Fall Darstellung der Anzahl als rekursive Funktion. □

Satz 10.7

Die Anzahl der Möglichkeiten für die Auswahl von k Elementen einer n-elementigen Menge für $k, n \in \mathbb{N}_0$ ist:

	Anordnung im k-Tupel	*keine Anordnung*
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Satz 10.7

Die Anzahl der Möglichkeiten für die Auswahl von k Elementen einer n-elementigen Menge für $k, n \in \mathbb{N}_0$ ist:

	Anordnung im k-Tupel	*keine Anordnung*
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Beweisidee

Herleitung der unterschiedlichen Möglichkeiten des Elementauswahl. □

10.5 Prinzip der Inklusion / Exklusion

Satz 10.8

Seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Dann gilt

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| .$$