9. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

Kapitelgliederung

9.1 Grundlagen des $\mathbb{R}^n$

Definition 9.1 (Kartesisches Produkt)

Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ beliebige Mengen. Die Menge

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$$

*wird **kartesisches Produkt** genannt.*
*Ihre Elemente $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ heißen **n-Tupel** und jeder Eintrag a_i $(i = 1, \ldots n)$ **Komponente**.*
Zwei n-Tupel a und b sind gleich, wir schreiben $a = b$, wenn $a_i = b_i$ für alle $i = 1, \ldots n$

Definition 9.2

*Die Menge $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots n\}$ heißt n-**dimensionaler Euklidischer Raum**. Die n-Tupel $x \in \mathbb{R}^n$ werden auch als **Vektoren** bezeichnet.*

Wir interpretieren Vektoren als Spaltenvektoren

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n)^T,$$

der hochgestellte Postfix T beschreibt, dass der Vektor transponiert wird

Definition 9.3 (Operatoren für Vektoren)

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)^T$ *Addition*
2. $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)^T$ *Skalarmultiplikation*
3. $x^T y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ *Skalarprodukt*
4. $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ *Euklidische Norm*
5. $d(x, y) = \|x - y\|$ *Abstand von x und y*
6. $x \leq y \Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n. x_i \leq y_i$ *kleiner gleich*
7. $x < y \Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n. x_i < y_i$ *kleiner*

Definition 9.4

Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann wird

$$\mathcal{U}_\varepsilon(x) = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\tilde{x} - x\| < \varepsilon\}$$

*eine ε-**Umgebung** von x genannt. Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ein Element $x \in \mathbb{R}^n$*

- ***innerer Punkt** vom M, wenn ein $\varepsilon > 0$ mit $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \subset M$ existiert;*
- ***Randpunkt** vom M, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ Elemente $\tilde{x}, \hat{x} \in \mathcal{U}_\varepsilon(x)$ existieren mit $\tilde{x} \in M$ und $\hat{x} \notin M$;*
- ***isolierter Punkt** von M, wenn ein $\varepsilon > 0$ mit $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap M = \{x\}$ existiert;*
- ***Häufungspunkt** von M, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Element $\tilde{x} \in \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap M$ mit $\tilde{x} \neq x$ existiert.*

Definition 9.4 (Fortsetzung)

Die Menge aller inneren Punkte von M wird mit $\mathring{M}$ oder $int(M)$, die Menge aller Randpunkte mit ∂M bezeichnet.
*Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **offen**, wenn jeder Punkt von M ein innerer Punkt ist, und sie heißt **abgeschlossen**, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.*

Definition 9.5 (Normkonvergenz)

Eine Folge (x_k) *mit* $x_k \in \mathbb{R}^n$ *für* $k \in \mathbb{N}$ *ist* ***konvergent*** *gegen* $a \in \mathbb{R}^n$ *genau dann wenn* $\lim_{k\to\infty} \|x_k - a\| = 0$.

Satz 9.6

Im $\mathbb{R}^n$ *ist Normkonvergenz gleichbedeutend mit komponentenweiser Konvergenz, also*

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - \tilde{x}\| = 0 \Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n. \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = \tilde{x}_i \ .$$

Satz 9.6

Im $\mathbb{R}^n$ *ist Normkonvergenz gleichbedeutend mit komponentenweiser Konvergenz, also*

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - \tilde{x}\| = 0 \Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n. \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = \tilde{x}_i \ .$$

Beweisidee

Nutzung des folgenden Lemmas:

Lemma 9.7

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ *und* $\|\cdot\|$ *die Euklidische Norm. Es gilt*

$$0 \leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \leq \|x\| \leq \sqrt{n}\max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \ .$$

$\square$

9.2 Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$

Definition 9.8 (Grenzwert im $\mathbb{R}^n$)

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Funktion und a ein Häufungspunkt von M. Dann heißt $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |f(x) - b| < \varepsilon$ für alle $x \in M \setminus \{a\}$ mit $\|x - a\| < \delta$ der Grenzwert von f in a.

Definition 9.9 (Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$)

*Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **stetig in** $y \in M \Leftrightarrow$ für jede Folge (x_k) mit $x_k \in \mathbb{R}^n$, die gegen y konvergiert, konvergiert $f(x_k)$ gegen $f(y)$.*
*Ist f in jedem $x \in M$ stetig, so heißt f **stetig auf** M.*

9.3 Partielle Ableitungen

Definition 9.10 (Partielle Ableitung)

Seien $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $e^{(k)}$ der k-te Einheitsvektor für $k = 1, \ldots, n$ im $\mathbb{R}^n$ mit $e_k^{(k)} = 1$ und $e_i^{(k)} = 0$ für $i \neq k$. Der Grenzwert

$$\begin{aligned} & \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h \cdot e^{(i)}) - f(x)}{h} \\ = & \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h} \\ =: & \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} =: f_{x_i}(x) =: \mathcal{D}_i f(x) \end{aligned}$$

*heißt **partielle Ableitung (1. Ordnung) von** f **nach** x_i **an der Stelle** $x \in M$, sofern er existiert.*

Definition 9.10 (Fortsetzung)

Der aus den partiellen Ableitungen 1. Ordnung gebildete Vektor

$$\nabla f(x) := \text{grad } f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)^T$$

wird ***Gradient*** *genannt.*
Sind diese partiellen Ableitungen stetig, dann ist f in x ***stetig partiell differenzierbar*** *und wir schreiben $f \in C^1$.*

Definition 9.11 (Partielle Ableitung zweiter Ordnung)

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Wenn die n partiellen Ableitungen 1. Ordnung existieren und stetig sind, dann werden für $i, j = 1, \ldots, n$ die Ausdrücke

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j x_i} := \frac{\partial f_{x_i}(x)}{\partial x_j} := f_{x_i x_j}(x)$$

partielle Ableitungen 2. Ordnung von f *nach x_i und x_j an der Stelle $x \in M$ genannt.*

Definition 9.11 (Fortsetzung)

Die aus den partiellen Ableitungen 2. Ordnung gebildete quadratische Matrix

$$\nabla^2 f(x) := H(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

heißt ***Hesse-Matrix****.*
Sind die partiellen Ableitungen stetig, so schreiben wir $f \in C^2$.

Satz 9.12 (Satz von Schwarz)

(Ohne Beweis)
Ist $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ in C^2, dann $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}\ \forall i, j = 1, \ldots, n$

9.4 Minima and Maxima

Definition 9.13

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$

a) *$x^* \in M$ heißt **globale Minimalstelle** von f, falls*
$\forall x \in M . f(x^*) \leq f(x)$.
*Der Wert $f(x^*)$ wird dann **globales Minimum** genannt.*

b) *$x^* \in M$ heißt **lokale Minimalstelle** von f, falls*
$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x^*) \cap M . f(x^*) \leq f(x)$.
*Der Wert $f(x^*)$ wird dann **lokales Minimum** genannt.*

c) *Entsprechend spricht man von **Maximalstellen** und **Maxima**, wenn die Ungleichungen umgekehrt werden.*

Satz 9.14 (Notwendiges Kriterium)

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ für offenes $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Ist $x^* \in M$ lokale Extremalstelle von f und ist f in x^* partiell differenzierbar, so ist $\nabla f(x^*) = (0, 0, \ldots, 0)^T$.

Satz 9.14 (Notwendiges Kriterium)

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ für offenes $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Ist $x^* \in M$ lokale Extremalstelle von f und ist f in x^* partiell differenzierbar, so ist $\nabla f(x^*) = (0, 0, \ldots, 0)^T$.

Beweisidee
Untersuche f an der Extremstelle unter der Annahme, dass alle bis auf eine Variable konstant sind. $\square$

Satz 9.15

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ mit offenem $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Wenn die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung existieren und stetig sind und außerdem $\nabla f(x^*) = (0, 0, \dots, 0)^T$ für ein $x^* \in M$ gilt, dann ist x^* eine

a) *lokale Minimalstelle, wenn $x^T \cdot \nabla^2 f(x^*) x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*
b) *lokale Maximalstelle, wenn $x^T \cdot \nabla^2 f(x^*) x < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*

Ist $x^T \nabla^2 f(x^*) x$ für mindestens ein x_1 negativ und ein x_2 positiv, so liegt kein Extremum vor.