8. Integralrechnung

technische universität dortmund
LS Informatik 4 & 11

Kapitelgliederung

technische universität dortmund
LS Informatik 4 & 11

Definition 8.1 (Zerlegung)

Gegeben seien ein Intervall $[a,b] \in \mathbb{R}$ und eine endliche Anzahl von Punkten $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

*Dann heißt $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ eine **Zerlegung** von $[a,b]$ und $|Z| := \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \ldots, n\}$ das **Feinheitsmaß** der Zerlegung Z.*

*Eine Zerlegung heißt **äquidistant**, wenn die Intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ für $i = 1, \ldots, n$ alle gleich groß sind.*

technische universität dortmund
LS Informatik 4 & 11

Definition 8.2 (Unter- und Obersumme)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt $(\forall x \in [a,b]. |f(x)| \le K < \infty)$ und Z eine Zerlegung auf $[a,b]$. Wir nennen

$$s(Z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \text{ die \textbf{Untersumme} und}$$

$$S(Z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \text{ die \textbf{Obersumme}}$$

von f bezüglich der Zerlegung Z.

Definition 8.3 (Verfeinerung und Überlagerung)

Eine Zerlegung $\tilde{Z}$ wird eine ***Verfeinerung*** *von Zerlegung Z genannt (in Zeichen: $Z \leq \tilde{Z}$) wenn $\tilde{Z}$ alle Punkte von Z enthält.*

Eine Zerlegung $\hat{Z}$, die genau die Punkte von Z und $\tilde{Z}$ enthält, soll ***Überlagerung*** *von Z und $\tilde{Z}$ heißen und mit $\hat{Z} = Z + \tilde{Z}$ bezeichnet werden.*

Lemma 8.4

Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ beschränkt mit $|f(x)| \leq K$ und Z eine Zerlegung von $[a, b]$. Die Zerlegung $\tilde{Z}$ entstehe aus Z durch Hinzunahme eines zusätzlichen Punktes. Dann gilt:

a) $s(Z) \leq s(\tilde{Z}) \leq s(Z) + 2K|Z|$

b) $S(Z) \geq S(\tilde{Z}) \geq S(Z) - 2K|Z|$

Lemma 8.4

Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ beschränkt mit $|f(x)| \leq K$ und Z eine Zerlegung von $[a, b]$. Die Zerlegung $\tilde{Z}$ entstehe aus Z durch Hinzunahme eines zusätzlichen Punktes. Dann gilt:

a) $s(Z) \leq s(\tilde{Z}) \leq s(Z) + 2K|Z|$

b) $S(Z) \geq S(\tilde{Z}) \geq S(Z) - 2K|Z|$

Beweisidee
Abschätzung des zusätzlichen Flächeninhaltes bei der Teilung eines Intervalls. □

Satz 8.5

Jede Untersumme ist kleiner oder gleich jeder Obersumme.

Satz 8.5

Jede Untersumme ist kleiner oder gleich jeder Obersumme.

Beweisidee
Seien Z und $\tilde{Z}$ zwei beliebige Zerlegungen. Dann gilt

$$s(Z) \underset{8.4}{\overset{\text{Lem.}}{\leq}} s(Z+\tilde{Z}) \underset{8.2}{\overset{\text{Def.}}{\leq}} S(Z+\tilde{Z}) \underset{8.4}{\overset{\text{Lem.}}{\leq}} S(\tilde{Z})$$

$\square$

Definition 8.6 (Riemann-Integral)

Die Funktion $f(x)$ sei auf $[a,b]$ beschränkt. Man nennt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{s(Z) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } [a,b]\}$$

*das **untere (Riemann-)Integral** und*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\{S(Z) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } [a,b]\}$$

*das **obere (Riemann-)Integral**.*

Definition 8.6 (Riemann-Integral (Fortsetzung))

*Sind unteres und oberes Riemann-Integral gleich, dann heißt $f(x)$ über $[a,b]$ **(Riemann-)integrierbar** und*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \sup_{Z \text{ Zerlegung von } [a,b]} s(Z) = \inf_{Z \text{ Zerlegung von } [a,b]} S(Z)$$

*heißt das **(Riemann-)Integral** von f über $[a,b]$.*

*Man nennt a (bzw. b) die **untere** (bzw. **obere**) **Integrationsgrenze** und x die **Integrationsvariable**.*

Satz 8.7

Es gilt $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ *bzw.* $\sup_Z s(Z) \leq \inf_Z S(Z)$.

Satz 8.7

Es gilt $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ *bzw.* $\sup_Z s(Z) \le \inf_Z S(Z)$.

Beweisidee

Für zwei beliebige Zerlegungen Z und $\tilde{Z}$ gilt nach Satz 8.5 stets $s(Z) \le S(\tilde{Z})$.
Also gilt für ein beliebig fixiertes $\tilde{Z}$ auch $\sup_Z s(Z) \le S(\tilde{Z})$.

Da $\tilde{Z}$ beliebig, kann es derart gewählt werden, dass $S(\tilde{Z}) = \inf_Z S(Z)$.

Folglich $\sup_Z s(Z) \le \inf_Z S(Z)$. □

Satz 8.8

Sei f auf $[a,b]$ beschränkt und Z_n eine Folge von Zerlegungen mit $|Z_n| \to 0$ für $n \to \infty$. Dann gilt

a) $\lim_{n\to\infty} s(Z_n) = \sup_Z s(Z)$ *und*

b) $\lim_{n\to\infty} S(Z_n) = \inf_Z S(Z)$

Satz 8.8

Sei f auf $[a,b]$ beschränkt und Z_n eine Folge von Zerlegungen mit $|Z_n| \to 0$ für $n \to \infty$. Dann gilt

a) $\lim_{n\to\infty} s(Z_n) = \sup_Z s(Z)$ *und*

b) $\lim_{n\to\infty} S(Z_n) = \inf_Z S(Z)$

Beweisidee

Definition der passenden Zerlegung und Nutzung von Lemma 8.4 zur Bestimmung des Grenzwerts. □

Satz 8.9 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)

Sei $f(x)$ auf $[a,b]$ beschränkt.

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0. \exists Z(\varepsilon) : S(Z) - s(Z) < \varepsilon$$

Satz 8.9 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)

Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ beschränkt.

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0. \exists Z(\varepsilon) : S(Z) - s(Z) < \varepsilon$$

Beweisidee

$\Rightarrow$: wähle passende Zerlegungen, die um höchsten $\epsilon/2$ vom Supremum bzw. Infumum abweichen und zeige, dass dann $S(Z) - s(z) < \epsilon$.

$\Leftarrow$: da zu jedem ϵ eine passende Zerlegung existiert, kann der Grenzwert für $\epsilon \to 0$ betrachtet werden. □

Satz 8.10 (Integrierbarkeit stetiger und monotoner Funktionen)

a) *f stetig auf $[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$.*

b) *f auf $[a, b]$ monoton $\Rightarrow f \in R[a, b]$.*

technische universität dortmund
LS Informatik 4 & 11

Satz 8.10 (Integrierbarkeit stetiger und monotoner Funktionen)

a) *f stetig auf $[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$.*

b) *f auf $[a, b]$ monoton $\Rightarrow f \in R[a, b]$.*

Beweisidee

zu a) Herleitung aus der $\epsilon - \delta$ Definition für Stetigkeit unter Nutzung der gleichmäßigen Stetigkeit.
zu b) Nachweis, dass bei einer äquidistanten Zerlegung, die immer weiter verfeinert wird, die Differenz zwischen $S(Z_n)$ und $s(Z_n)$ gegen 0 konvergiert. □

Definition 8.11 ((Riemannsche) Zwischensumme)

Sei f auf $[a, b]$ beschränkt, $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $\tilde{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ für $i = 1, \ldots, n$. Man nennt

$$\sigma(Z, \tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\tilde{x}_i)$$

die ***(Riemannsche) Zwischensumme*** *von f auf $[a, b]$.*

Lemma 8.12

Sei f auf $[a, b]$ beschränkt. Für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es Zwischenpunkte $\tilde{x}$ und $\hat{x}$ mit

a) $s(Z) \leq \sigma(Z, \tilde{x}) \leq s(Z) + \varepsilon$ *und*
b) $S(Z) - \varepsilon \leq \sigma(Z, \hat{x}) \leq S(Z)$

Lemma 8.12

Sei f auf $[a, b]$ beschränkt. Für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es Zwischenpunkte $\tilde{x}$ und $\hat{x}$ mit

a) $s(Z) \leq \sigma(Z, \tilde{x}) \leq s(Z) + \varepsilon$ *und*
b) $S(Z) - \varepsilon \leq \sigma(Z, \hat{x}) \leq S(Z)$

Beweisidee
Wähle jeweils Werte aus den Intervallen der Zerlegung, deren Funktionswerte sich um maximal $\epsilon/(b-a)$ vom Minimum bzw. Maximum unterscheiden □

Satz 8.13

Sei f auf $[a, b]$ beschränkt, Z_n eine Folge von Zerlegungen mit $|Z_n| \to 0$ für $n \to \infty$ mit passenden Zwischenpunkten $\tilde{x}^{(n)}$. Es gilt

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \text{ Jede Riemansche Zwischensumme konvergiert.}$$

In diesem Fall sind alle Grenzwerte gleich und sie haben den Wert

$$\lim_{n \to \infty} \sigma\left(Z_n, \tilde{x}^{(n)}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =: I$$

<u>Beweisidee zu Satz 8.13</u>

$\Rightarrow$: da $s(Z_n)$ und $S(Z_n)$ konvergieren, kann das Sandwich-Theorem genutzt werden.

$\Leftarrow$: Konstruktion konvergenter Teilfolgen, die gegen das untere und obere Riemann-Integral konvergieren.
Da auch nach Voraussetzung die Mischung der beiden Folgen zwei konvergente Teilfolgen besitzt und selbst konvergiert, müssen Teilfolgen und Folge gegen den selben Grenzwert konvergieren .

Satz 8.14

Sind die Funktionen f und g auf $[a,b]$ integrierbar, so ist auch die Funktion $\alpha f + \beta g$ für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Satz 8.14

Sind die Funktionen f und g auf $[a,b]$ integrierbar, so ist auch die Funktion $\alpha f + \beta g$ für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Beweisidee

Herleitung des Integrals über die Zwischensummen. □

Satz 8.15

Seien f und g integrierbar auf $[a,b]$. Dann gilt:

a) $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$, $|f(x)|$ *sind integrierbar auf* $[a,b]$.

b) *Falls $f \le g$ für alle $x \in [a,b]$, dann* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

c) $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

Satz 8.15

Seien f und g integrierbar auf $[a,b]$. Dann gilt:

a) $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$, $|f(x)|$ *sind integrierbar auf* $[a,b]$.

b) *Falls $f \le g$ für alle $x \in [a,b]$, dann* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

c) $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

Beweisidee

Herleitung jeweils aus der Darstellung der Integrale über Ober- und Untersummen (für *a*)) oder Zwischensummen (für *b*)). □

Satz 8.16 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f \in R[a,b]$ und $m \leq f(x) \leq M$ für $x \in [a,b]$. Dann ist

a) $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$

b) *Ist $f(x)$ auf $[a,b]$ zudem stetig, dann existiert ein $\tilde{x} \in (a,b)$ mit* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\tilde{x})$

Satz 8.16 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f \in R[a,b]$ und $m \leq f(x) \leq M$ für $x \in [a,b]$. Dann ist

a) $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$

b) *Ist $f(x)$ auf $[a,b]$ zudem stetig, dann existiert ein $\tilde{x} \in (a,b)$ mit* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\tilde{x})$

Beweisidee

Teil $a)$ durch Intgeration der Ungleichung

Teil $b)$ unter Nutzung des Zwischenwertsatzes (Korollar 4.19), um zu zeigen, dass jeder Wert zwischen m und M angenommen wird. □

Satz 8.17 (Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $p(x) \geq 0$ für $x \in [a,b]$ und $p(x)$ sowie $f(x) \cdot p(x)$ integrierbar auf $[a,b]$.
Wenn $m \leq f(x) \leq M$ auf $[a,b]$ ist, dann gilt

$$m \int\limits_a^b p(x)\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x \leq M \int\limits_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$$

Satz 8.17 (Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $p(x) \geq 0$ für $x \in [a,b]$ und $p(x)$ sowie $f(x) \cdot p(x)$ integrierbar auf $[a,b]$.
Wenn $m \leq f(x) \leq M$ auf $[a,b]$ ist, dann gilt

$$m \int\limits_a^b p(x)\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x \leq M \int\limits_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweisidee

Analog zu Satz 8.16. □

Satz 8.18

Sei f auf $[a,b]$ beschränkt und $a<c<b$. Es gilt:

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow f \in R[a,c] \text{ und } f \in R[c,b]\ .$$

In diesem Fall ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Satz 8.18

Sei f auf $[a,b]$ beschränkt und $a<c<b$. Es gilt:

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow f \in R[a,c] \text{ und } f \in R[c,b]\ .$$

In diesem Fall ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Beweisidee

Auswahl passender Zerlegungen für die Intervalle. □

Definition 8.19

Für $a<b$ und $f \in R[a,b]$ wird $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ sowie $\int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für $c \in [a,b]$ festgelegt.

Satz 8.20

Sei $f \in R[a,b]$ und $[c,d] \subseteq [a,b]$. Dann gilt

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = F(d) - F(c)\ .$$

wobei $F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ ist.

Satz 8.20

Sei $f \in R[a,b]$ und $[c,d] \subseteq [a,b]$. Dann gilt

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = F(d) - F(c)\,.$$

wobei $F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ ist.

Beweisidee
Nutzung Satz 8.18 Teil 2. □

8.2 Der Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung

Satz 8.21

Sei $f \in R[a,b]$ eine stetige Funktion und $c \in [a,b]$. Für $x \in [a,b]$ sei dann

$$F(x) = \int_c^x f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a,b]$.

Satz 8.21

Sei $f \in R[a,b]$ eine stetige Funktion und $c \in [a,b]$. Für $x \in [a,b]$ sei dann

$$F(x) = \int_c^x f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a,b]$.

Beweisidee
Einsetzen der Definition der Ableitung und zeigen, dass der Grenzwert für $h \to 0$ gerade $f(x)$ ist. □

Definition 8.22 (Stammfunktion)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $F(x)$ mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x)$ auf $[a,b]$ soll ***Stammfunktion*** *oder* ***unbestimmtes Integral*** *von $f(x)$ heißen. Wir schreiben dafür $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Satz 8.23 (Fundamentalsatz der Differnetial- und Integralrechnung)

Ist $F(x)$ auf $[a,b]$ stetig differenzierbar, so gilt

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

und für $x, c \in [a,b]$ entsprechend

$$F(x) = F(c) + \int_c^x F'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

technische universität dortmund
LS Informatik 4 & 11

Satz 8.23 (Fundamentalsatz der Differnetial- und Integralrechnung)

Ist $F(x)$ auf $[a,b]$ stetig differenzierbar, so gilt

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

und für $x, c \in [a,b]$ entsprechend

$$F(x) = F(c) + \int_c^x F'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Beweisidee
Zeige, dass $H(x) = F(x) - G(x)$ eine Konstante für alle $x \in [a,b]$, woraus der Satz gefolgert werden kann. $\square$

8.3 Die Technik des Integrierens

Notation

$$F(x)\Big|_a^b := \Big[F(x)\Big]_a^b := F(b) - F(a).$$

Satz 8.24 (Partielle Integration)

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei auf $[a, b]$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Satz 8.24 (Partielle Integration)

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei auf $[a, b]$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Beweisidee
Umkehrung der Produktregel der Differenziation. □

Satz 8.25 (Substitutionsregel)

Sei f stetig auf $\langle a, b\rangle$ und g : stetig differenzierbar auf $\langle \alpha, \beta\rangle$, wobei $< a, b >:= [\min\{a, b\},\ \max\{a, b\}]$ und

- $g(\langle \alpha, \beta\rangle) \subseteq \langle a, b\rangle$ *sowie*
- $g(\alpha) = a, g(\beta) = b.$

Dann ist $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t.$

Satz 8.25 (Substitutionsregel)

Sei f stetig auf $\langle a, b\rangle$ und g : stetig differenzierbar auf $\langle\alpha, \beta\rangle$, wobei $< a, b >:= [\min\{a, b\}, \max\{a, b\}]$ und

- $g(\langle\alpha, \beta\rangle) \subseteq \langle a, b\rangle$ *sowie*
- $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$.

Dann ist $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t$.

Beweisidee
Umkehrung der Kettenregel der Differenziation. □

Satz 8.26 (Nützliche Substitutionsregeln)

1. $\int f(ax + b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax + b)$ *für* $F'(x) = f(x)$.
2. $\int f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f^2(x)$.
3. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|$.

Satz 8.26 (Nützliche Substitutionsregeln)

1. $\int f(ax + b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax + b)$ *für* $F'(x) = f(x)$.
2. $\int f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f^2(x)$.
3. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|$.

Beweisidee
Ableiten der rechten Seiten. □

Satz 8.27

Jede rationale Funktion ist elementar integrierbar.

8.4 Uneigentliche Integrale

Definition 8.28 (unbeschränkter Integrationsbereich)

Sei f auf $[a, \infty)$ erklärt und über jedes $[a, c]$ für $a < c < \infty$ integrierbar. Man legt fest:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Wenn der Grenzwert existiert, dann existiert das uneigentliche Integral und es wird ***konvergent*** *genannt (andernfalls* ***divergent****). Entsprechend definieren wir für ein Intervall $(-\infty, a]$*

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c \to -\infty} \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Definition 8.28 (Fortsetzung)

und für $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$, wobei beide Integrale auf der rechten Seite existieren müssen.

Definition 8.29 (Integration unbeschränkter Funktionen)

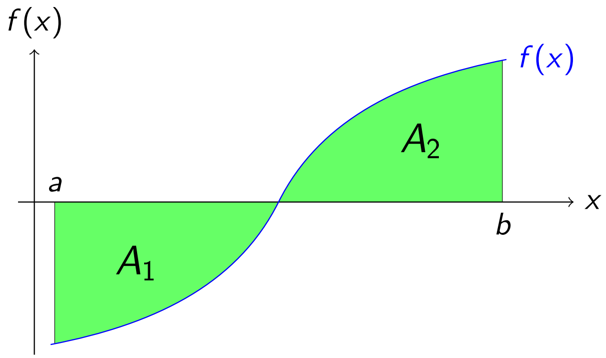
1. *Sei $f \in R[c, b]$ für jedes c mit $a < c < b$ und $\lim_{x \searrow a} |f(x)| = \infty$. Man definiert $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c \searrow a} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, falls der Grenzwert existiert.*
2. *Sei $f \in R[a, c]$ für jedes c mit $a < c < b$ und $\lim_{x \nearrow b} |f(x)| = \infty$. Man definiert $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, falls der Grenzwert existiert.*
3. *Sei $f \in R[c, d]$ für alle c, d mit $a < c < d < b$ und $\lim_{x \searrow a} |f(x)| = \infty$ sowie $\lim_{x \nearrow b} |f(x)| = \infty$. Man definiert unter Rückführung auf die Fälle 1.) und 2.) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $(a < c < b)$ falls beide uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite existieren.*

8.5 Anwendungen

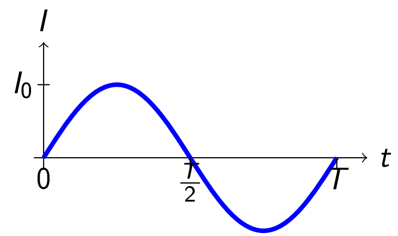
Wichtige Anwendungen der Integralrechnung:

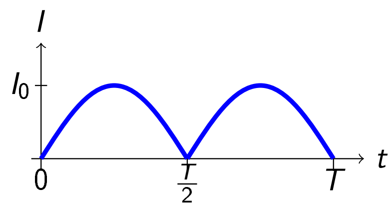
1. Summieren (Flächenberechnung)
2. Mitteln (Mittelwertsatz)
3. Rekonstruieren (von Funktionen aus der Änderungsrate)

Beispiel Summieren:



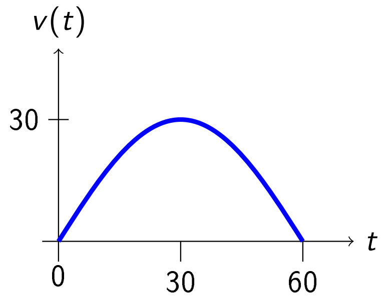
Beispiel Mitteln:

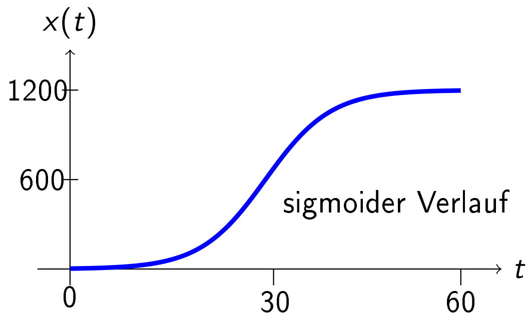




Wie groß ist der Mittelwert?

Beispiel Rekonstruieren:





Wie berechnet man aus der Geschwindigkeit die zurückgelegte Strecke?

8.6 Exkurs: Differentialgleichungen

Definition 8.30

Eine Gleichung der Form $f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots) = 0$ heißt ***gewöhnliche Differentialgleichung*** *(DGL). Die Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung heißt die* ***Ordnung der DGL****.*

Lösung einer homogenen Differentialgleichung (Trennung der Variablen)

$$x'(t) = a(t) \cdot x(t) \Leftrightarrow \frac{dx}{\mathrm{d}t} = a(t) \cdot x(t) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x(t)} = a(t) \cdot \mathrm{d}t$$

Beide Seiten integrieren

$$\begin{array}{lclclcll} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{y} & = & \int\limits_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s & \Leftrightarrow & \ln y|_{x_0}^{x} & = & \int\limits_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s & \Leftrightarrow \\ \ln \frac{x}{x_0} & = & A(t) - A(t_0) & \Leftrightarrow & x(t) & = & x_0 \cdot e^{A(t) - A(t_0)} & \end{array}$$

Lösung des inhomogenen Systems (durch Variation der Konstanten)

$$x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$$

Idee: in homogener Lösung Konstante x_0 zur Funktion $x_0(t)$ machen und behaupten, dass $\underbrace{x(t) = x_0(t) \cdot \varphi(t)}_{(*)}$ mit

$$\varphi(t) \overset{\varphi'(t)=a(t)\cdot\varphi(t)}{=} \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right) = e^{A(t)-A(t_0)}$$

Lösung nichtlinearer DGLs

$$x'(t) = a(t)g(x(t))$$

g ist stetig und nichtlinear

1. Trennung der Variablen

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(t)g(x) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = a(t)\mathrm{d}t$$

Integration auf beiden Seiten

$$G(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s =: F(t)$$

$G(x)$ nach x auflösen (d.h. $x(t) = G^{-1}(F(t))$), falls möglich

Lösung nichtlinearer DGLs

$$x'(t) = a(t)g(x(t))$$

g ist stetig und nichtlinear

2. Numerische Lösung
   $x'(t) = f(t, x(t))$ ein Punkt in der Ebene (t, x).

   Anfangswert $t_0, x(t_0)$ bekannt, Steigung $f(t_0, x(t_0))$ bekannt

   Berechne (approximiere) $x(t_0 + h) \approx x(t_0) + f(t_0, x_0)$

   Erster Term der Taylor-Reihe (!)

Richtungsfeld und Isokline