7. Der Satz von Taylor

Satz 7.1 (Taylorsche Formel)

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine in A $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion und $a \in A$. Dann gilt für alle $x \in A$:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$$

wobei es zu jedem $x \in A \setminus \{a\}$ (mindestens) ein $y \in (\min(x,a), \max(x,a))$ gibt, sodass $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

Satz 7.1 (Taylorsche Formel)

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine in A $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion und $a \in A$. Dann gilt für alle $x \in A$:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$$

wobei es zu jedem $x \in A \setminus \{a\}$ (mindestens) ein $y \in (\min(x,a), \max(x,a))$ gibt, sodass $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

Beweisidee

$R_n(x)$ ist $n+1$ mal differenzierbar, so dass für jede Ableitung der zweite Mittelwertsatz (Satz 5.19) angewendet werden kann. □

Definition 7.2 (Taylor-Reihe)

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion in $a \in A$. Dann heißt

$$T[f,a](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die ***Taylor-Reihe*** *von f im* ***Entwicklungspunkt*** *a.*

Definition 7.2 (Taylor-Reihe)

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion in $a \in A$. Dann heißt

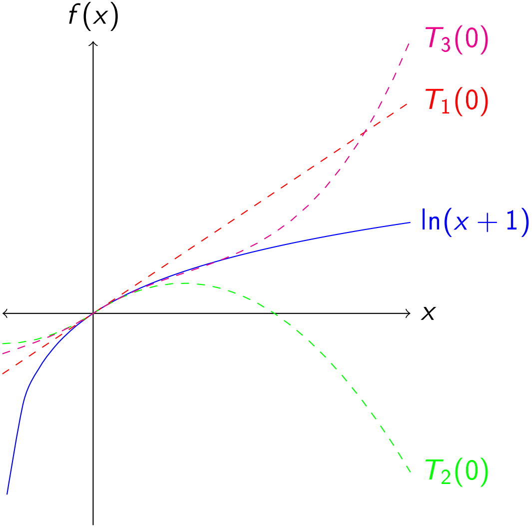
$$T[f,a](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die ***Taylor-Reihe*** *von f im* ***Entwicklungspunkt*** *a.*

Taylor-Polynom vom Grad n im **Entwicklungspunkt** a:

$$T_n[f,a](x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$f(x) = \ln(x+1)$ und die Taylor-Polynome $T_n(0,x)$ für $n = 1, 2, 3$



$f(x) = \cos(x)$ und die Taylor-Polynome $T_n(0, x)$ für $n = 2, 4, 6$