6. Lösungen von Gleichungen

Problemstellungen:

Nullstellenberechnung: $f(x) = 0$

Fixpunktberechnung: $f(x) = x$ $(\Rightarrow g(x) = f(x) - x = 0)$

Gleichungslösung: $f(x) = g(x)$ $(\Rightarrow h(x) = f(x) - g(x) = 0)$

Bestimmung von $x \in A$, so dass $f(x) = 0$

- Für lineare oder quadratische Funktionen:
  Berechnung mit vorgegebener Formel (analytische Berechnung)
- Für Polynome:
  Nullstelle raten (bzw. numerisch berechnen) und Division durch Nullstelle $\Rightarrow$ Polynom niedrigeren Grades
- Für allgemeine Funktionen:
  Iterative Berechnung: Bestimme eine Folge x_n, so dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ (Konvergenz)
  übliche Annahme: $f(x)$ stetig im "Suchintervall"
  - Nullstelle kann nur bis zu einer bestimmten Genauigkeit bestimmt werden (z.B. durch Rundungsfehler)
  - Verfahren sind nicht für alle Funktionen und Startpunkte konvergent

Regula-falsi-Verfahren

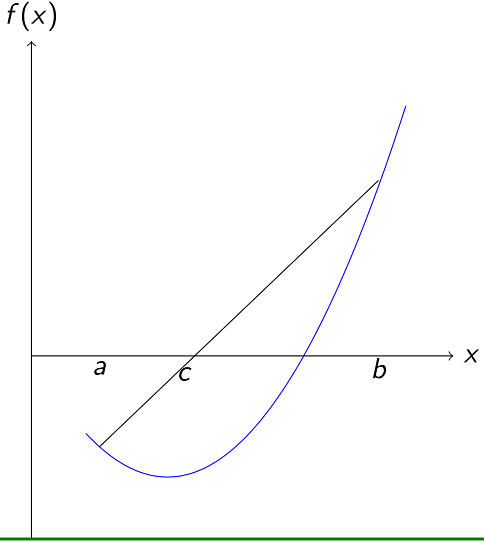
Seien

- $a, b \in A$ $(a < b)$,
- f sei stetig auf (a, b) und
- $f(a) < 0 < f(b)$
  (ähnliches Vorgehen für $f(a) > 0 > f(b)$)

dann hat f eine Nullstelle im Intervall (a, b) (Satz 4.18):
Algorithmus:

1. $c = b - f(b)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$
2. falls $|f(c)| < \epsilon$ Abbruch, c ist Approximation einer Nullstelle,
   sonst falls $f(c) < 0$ setze $a = c$, sonst $b = c$
   fahre bei 1. fort

Nutzung der Sekante zur Approximation der Nullstelle



Newton-Verfahren

Seien

- $a, b \in A$ $(a < b)$,
- f sei in $[a, b]$ stetig differenzierbar mit
  $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$

Algorithmus:

1. wähle $x_0 \in [a, b]$, $n = 0$
2. $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
3. falls $|f(x_{n+1})| < \epsilon$ Abbruch x_{n+1} ist Approximation der Nullstelle
   sonst $n = n + 1$ und fahre bei 2. fort

Konvergenz nicht für alle Funktionen und Startwerte garantiert
deshalb Test auf Divergenz (z.B. falls $x_{n+1} \notin [a, b]$)

Newton-Verfahren
(Nutzung der Tangente zur Approximation der Nullstelle)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$