4. Funktionen

Kapitelgliederung

4.1 Grundlegende Definitionen
4.2 Polynome und rationale Funktionen
4.3 Beschränkte und monotone Funktionen
4.4 Grenzwerte von Funktionen
4.5 Stetige Funktionen
4.6 Logarithmen und allgemeine Potenzen
4.7 Trigonometrische Funktionen

4.1 Grundlegende Definitionen

Definition 4.1 (Funktion)

Seien A und B zwei nichtleere Mengen. Eine Funktion f mit ***Definitionsbereich*** *A und* ***Zielbereich*** *(oder* ***Bildbereich****) B ist eine Vorschrift, die jedem Element aus A ein eindeutiges Element aus B zuordnet.*

Definition 4.2 (Eigenschaft von Funktionen)

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

1. ***injektiv**, wenn zu jedem $y \in B$ höchstens ein $x \in A$ mit $f(x) = y$ gehört (d. h. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$),*
2. ***surjektiv**, wenn jedes $y \in B$ als Abbild eines $x \in A$ auftaucht (d. h. $\forall y \in B\, \exists x \in A. f(x) = y$),*
3. ***bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.*

Definition 4.3 (Umkehrfunktion)

Für eine bijektive Funktion $f : A \to B$ definieren wir die ***Umkehrfunktion*** *$f^{-1} : B \to A$ als $f^{-1}(y) = x$ genau dann wenn $f(x) = y$.*

Definition 4.4 (Rationale Operationen auf Funktionen)

Seien $f, g : A \to \mathbb{R}$ *Funktionen und* $c \in \mathbb{R}$. *Dann sind die Funktionen* $f + g : A \to \mathbb{R}$, $cf : A \to \mathbb{R}$, $fg : A \to \mathbb{R}$ *definiert durch*

$$\begin{array}{lcl} (f+g)(x) & = & f(x) + g(x), \\ (cf)(x) & = & cf(x), \\ (fg)(x) & = & f(x)g(x). \end{array}$$

Sei $A' = \{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$, *dann ist die Funktion* $\frac{f}{g} : A' \to \mathbb{R}$ *definiert durch*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Definition 4.5 (**Konkatenation** von Funktionen)

Seien $f : A \to \mathbb{R}$ *und* $g : B \to \mathbb{R}$ *Funktionen und* $f(x) \in B$ *für alle* $x \in A$. *Dann ist die Funktion* $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ *definiert durch* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

4.2 Polynome und rationale Funktionen

Polynomfunktionen: Seien $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Das größte n mit $a_n \neq 0$ heißt der **Grad des Polynoms**.
Multiplikation von Polynomfunktionen
$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ und
$q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$
Polynomfunktionen vom Grade n und m. Dann ist

$$h(x) = (p \cdot q)(x) = c_{m+n} x^{m+n} + \cdots + c_1 x + c_0$$

eine Polynomfunktion vom Grad $n + m$ und $c_k = \sum\limits_{\substack{0 \leq r \leq n \\ 0 \leq s \leq m \\ r+s=k}} a_r b_s$.

Satz 4.6

Seien $p(x)$ *und* $q(x)$ *Polynome vom Grad* n *und* m *mit* $m \leq n$*. Dann gibt es Polynome* $s(x)$ *und* $r(x)$*, so dass*

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x).$$

Der Grad von $s(x)$ *entspricht der Differenz Grad p - Grad q und Grad* $r <$ *Grad* q*.*

Satz 4.6

Seien $p(x)$ und $q(x)$ Polynome vom Grad n und m mit $m \leq n$. Dann gibt es Polynome $s(x)$ und $r(x)$, so dass

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x).$$

Der Grad von $s(x)$ entspricht der Differenz Grad p - Grad q und Grad $r <$ Grad q.

Beweisidee

Schrittweise Konstruktion des Polynoms $s(x)$, so dass jeweils der Koeffizient der höchsten Potenz des Restpolynoms zu 0 wird.
Zeigen, dass die resultierende Darstellung eindeutig ist. $\square$

Korollar 4.7

Ein Polynom $p(x)$ lässt sich genau dann ohne Rest durch $q(x) = x - x_1$ teilen ($x_1 \in \mathbb{R}$), wenn x_1 eine Nullstelle von $p(x)$ ist.

$q(x) = x - x_1$ bezeichnet man auch als einen **Linearfaktor**.

Seien $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ und
$q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$
Polynome und $A = \{x \mid q(x) \neq 0\}$.

Dann ist die rationale Funktion $r : A \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$r(x) = \left(\frac{p}{q}\right)(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

4.3 Beschränkte und monotone Funktionen

Definition 4.8 (Beschränkte Funktion)

Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt ***beschränkt****, wenn $|f(x)| \leq K$ für $K \in \mathbb{R}$ und alle $x \in A$.*

Definition 4.9 (Kompaktes Intervall)

*Unter einem **kompakten Intervall** versteht man ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall* $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definition 4.10 (Monotonie von Funktionen)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ *und* $f : A \to \mathbb{R}$ *eine Funktion,*

$$f \text{ heißt } \left\{ \begin{array}{c} \textbf{monoton wachsend} \\ \textbf{streng monoton wachsend} \\ \textbf{monoton fallend} \\ \textbf{streng monoton fallend} \end{array} \right\} \text{ falls } \left\{ \begin{array}{c} f(x) \leq f(x') \\ f(x) < f(x') \\ f(x) \geq f(x') \\ f(x) > f(x') \end{array} \right\}$$

für $x, x' \in A$ *mit* $x < x'$.

Satz 4.11

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist f streng monoton, so ist f injektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(A) \to A$ ist ebenfalls streng monoton (im gleichen Sinne).

Satz 4.11

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist f streng monoton, so ist f injektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(A) \to A$ ist ebenfalls streng monoton (im gleichen Sinne).

Beweisidee

Beide Richtungen einzelnen zeigen.

$\Rightarrow$: Aus strenger Monotonie folgt $x \neq x' \to f(x) \neq f(x')$.

$\Leftarrow$: Widerspruchsbeweis unter Nutzung der Beziehung

$$f \circ g = f \circ f^{-1} = id.$$

□

4.4 Grenzwerte von Funktionen

Definition 4.12 (Berührungspunkt/Häufungspunkt)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$

1. *a heißt **Berührungspunkt** von A, falls in jeder ε-Umgebung von a, d. h. $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon), \varepsilon > 0$, mindestens ein Punkt von A liegt.*
2. *a heißt **Häufungspunkt**, falls in jeder ε-Umgebung von a unendlich viele Punkte von A liegen.*

Definition 4.13 (Grenzwert einer Funktion)

Sei $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ ein Berührungspunkt von A. Man definiert dann $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ als ***Grenzwert****, falls für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in A$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c$ gilt.*

Einige spezielle Grenzwerte:

1. $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = c$ bedeutet: a ist Berührungspunkt von $A \cap (a, \infty)$ und für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in A$, $x_n > a$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c$
2. $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = c$ bedeutet: a ist Berührungspunkt von $A \cap (-\infty, a)$ und für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in A$, $x_n < a$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$ bedeutet: A ist nach oben unbeschränkt und für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c$.
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c$ bedeutet: A ist nach unten unbeschränkt und für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c$.

4.5 Stetige Funktionen

Definition 4.14 (Stetigkeit)

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in A$. Die Funktion f heißt ***stetig im Punkt*** *a, falls $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

f heißt ***stetig*** *(in A), falls f in jedem Punkt aus A stetig ist.*

Satz 4.15 (Operationen auf stetigen Funktionen)

*Seien $f, g : A \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in $a \in A$ stetig sind und sei $c \in \mathbb{R}$.
Dann sind auch die Funktionen*

i) $f + g : A \to \mathbb{R}$

ii) $cf : A \to \mathbb{R}$

iii) $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$

im Punkt a stetig.
Ist $g(a) \neq 0$, so ist auch die Funktion

iv) $\frac{f}{g} : A' \to \mathbb{R}$

in a stetig. Dabei ist $A' = \{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$.

Satz 4.15 (Operationen auf stetigen Funktionen)

Seien $f, g : A \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in $a \in A$ stetig sind und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen

i) $f + g : A \to \mathbb{R}$

ii) $cf : A \to \mathbb{R}$

iii) $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$

im Punkt a stetig.
Ist $g(a) \neq 0$, so ist auch die Funktion

iv) $\frac{f}{g} : A' \to \mathbb{R}$

in a stetig. Dabei ist $A' = \{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$.

Beweisidee

Nutzung der Rechenregeln für Folgen. $\square$

Korollar 4.16

Jede rationale Funktion ist in ihrem Definitionsbereich stetig.

Satz 4.17 (Komposition stetiger Funktionen)

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ *und* $g : B \to \mathbb{R}$ *Funktionen mit* $f(A) \subseteq B$. *Die Funktion* f *sei in* $a \in A$ *und* g *in* $b = f(a) \in B$ *stetig. Dann ist die Funktion* $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ *in* a *stetig.*

Satz 4.17 (Komposition stetiger Funktionen)

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(A) \subseteq B$. Die Funktion f sei in $a \in A$ und g in $b = f(a) \in B$ stetig. Dann ist die Funktion $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ in a stetig.

Beweisidee

Fortsetzung der Stetigkeit der ersten Funktion als Argument der zweiten Funktion. $\square$

Satz 4.18 (Zwischenwertsatz)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion mit* $f(a) < 0$ *und* $f(b) > 0$ *(bzw.* $f(a) > 0$ *und* $f(b) < 0$*). Dann existiert ein* $c \in (a, b)$ *mit* $f(c) = 0$*.*

Satz 4.18 (Zwischenwertsatz)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion mit* $f(a) < 0$ *und* $f(b) > 0$ *(bzw.* $f(a) > 0$ *und* $f(b) < 0$*). Dann existiert ein* $c \in (a, b)$ *mit* $f(c) = 0$*.*

Beweisidee

Konstruktion einer Intervallschachtelung, die die Nullstelle direkt bestimmt oder diese als eindeutigen Wert enthält, der in allen Intervallen liegt. □

Korollar 4.19

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $y \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < y < f(b)$ (bzw. $f(a) > y > f(b)$). Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = y$.

Korollar 4.20

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist auch $J = f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

Satz 4.21 (Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen)

Jede in einem kompakten Intervall stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ist beschränkt und nimmt ihr Minimum und Maximum an.*
D. h. es existiert ein $c \in [a, b]$*, sodass* $f(c) = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ *und ein* $d \in [a, b]$*, sodass* $f(d) = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$*.*

Satz 4.21 (Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen)

Jede in einem kompakten Intervall stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ist beschränkt und nimmt ihr Minimum und Maximum an.*
D. h. es existiert ein $c \in [a, b]$*, sodass* $f(c) = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ *und ein* $d \in [a, b]$*, sodass* $f(d) = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$*.*

Beweisidee

Beweis über die Konvergenz von (Teil-)Folgen, die in Verbindung mit der Stetigkeit dazu führt, dass f beschränkt ist und ein Maximum in Intervall annehmen muss. □

Satz 4.22 ($\varepsilon - \delta$ - Definition von Stetigkeit)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f ist genau dann im Punkt $a \in A$ stetig, wenn gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in A$ mit $|x - a| < \delta$.

Satz 4.22 ($\varepsilon - \delta$ - Definition von Stetigkeit)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f ist genau dann im Punkt $a \in A$ stetig, wenn gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in A$ mit $|x - a| < \delta$.

Beweisidee

Beweis jeweils in eine Richtung:
ε, δ existieren $\Rightarrow$ Stetigkeit: Zu zeigen, dass aus der Konvergenz der x_n gegen a die Konvergenz der $f(x_n)$ gegen $f(a)$ folgt.
Stetigkeit $\Rightarrow$ ε, δ existieren: Widerspruchsbeweis unter der Annahme, es gäbe zu einem ε kein passendes δ. $\square$

Korollar 4.23

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $a \in A$ und $f(a) \neq 0$. Dann ist $f(x) \neq 0$ für alle x in einer Umgebung von a. D. h. es existiert ein $\delta > 0$, sodass $f(x) \neq 0$ für alle $x \in A$ mit $|x - a| < \delta$.

Korollar 4.24

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton (wachsend oder fallend). Sei $J = f(I)$, dann bildet f das Intervall I bijektiv auf J ab und die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Definition 4.25 (Gleichmäßige Stetigkeit)

Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt in A ***gleichmäßig stetig****, wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so dass $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ für alle $x, x' \in A$ mit $|x - x'| < \delta$.*

Satz 4.26 (Stetigkeit auf kompakten Intervallen)

Jede auf einem kompakten Intervall stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ist dort gleichmäßig stetig.*

Satz 4.26 (Stetigkeit auf kompakten Intervallen)

Jede auf einem kompakten Intervall stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ist dort gleichmäßig stetig.*

Beweisidee
Widerspruchsbeweis unter Nutzung der Existenz konvergenter Teilfolgen für beschränkte Folgen. $\square$

4.6 Logarithmen und allgemeine Potenzen

Definition der Exponentialfunktion über die Exponentialreihe:

$$\exp(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

1. exp bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_{>0}$ ab
2. exp ist streng monoton wachsend

$\Rightarrow$ Umkehrfunktion $\ln(x) : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ existiert

- $\ln(\exp(x)) = \exp(\ln(x)) = x$
- $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$
- $\ln(x) = \begin{cases} < 0 & \text{für} \quad x \in (0,1) \\ 0 & \text{für} \quad x = 1 \\ > 0 & \text{für} \quad x \in (1,\infty) \end{cases}$

Bisherige Potenzen, die wir für $n \in \mathbb{N}$ betrachtet haben

- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} \; (a \in \mathbb{R})$
- $a^0 = 1 \; (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \; (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \; (a \in \mathbb{R}_{>0})$

Daraus kann man ableiten:

$$a^{\frac{n}{m}} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$$

Definition 4.27 (Exponentialfunktion für allgemeine Basen)

Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ *sei die Funktion* $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiert als*

$$\exp_a(x) = \exp(x \ln a).$$

Satz 4.28

Die Funktion $\exp_a(x)$ *ist stetig und es gilt*

i) $\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$

ii) $\exp_a(n) = a^n$ *für alle* $n \in \mathbb{Z}$

iii) $\exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p}$ *für alle* $p \in \mathbb{Z}$ *und* $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Satz 4.28

Die Funktion $\exp_a(x)$ *ist stetig und es gilt*

$$i)\ \exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

$$ii)\ \exp_a(n) = a^n \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}$$

$$iii)\ \exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p} \text{ für alle } p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

Beweisidee

Anwendung der Rechenregeln für die Exponentialfunktion. □

Satz 4.29

Für $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gelten folgende Rechenregeln:

i) $a^x a^y = a^{x+y}$

ii) $(a^x)^y = a^{xy}$

iii) $a^x b^x = (ab)^x$

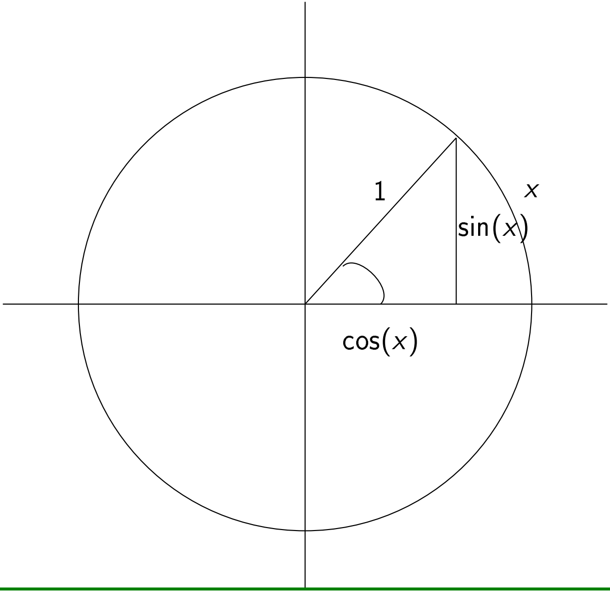
iv) $\left(\frac{1}{a^x}\right) = a^{-x}$

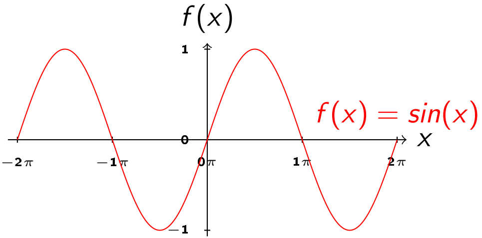
Definition 4.30

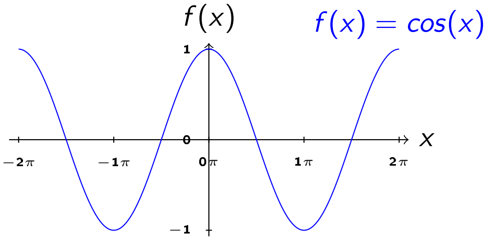
Sei $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$*, dann ist der Logarithmus zur Basis a definiert als*

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

4.7 Trigonometrische Funktionen


1
x
$\sin(x)$
$\cos(x)$


f(x)
1
0
−1
x
−2π
−1π
0π
1π
2π
f(x) = sin(x)


f(x)
f(x) = cos(x)
1
0
−1
x
−2π
−1π
0π
1π
2π

Definition 4.31

Für alle $x \in \mathbb{R}$ *sind die Funktionen* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiert als*

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \text{ und } \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Satz 4.32

Die Reihen für $\cos(x)$ *und* $\sin(x)$ *konvergieren absolut für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Satz 4.32

Die Reihen für $\cos(x)$ *und* $\sin(x)$ *konvergieren absolut für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Beweisidee

Beweis unter Nutzung des Quotientenkriteriums. $\square$

Restglied bei Abbruch der Summation nach endlicher Schrittzahl

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n+2}(x), \; \sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+3}(x).$$

Restglied bei Abbruch der Summation nach endlicher Schrittzahl

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n+2}(x), \ \sin(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+3}(x).$$

Satz 4.33

Für die Restglieder der Cosinus- und Sinus-Reihe gelten die folgenden Abschätzungen

$$|r_{2n+2}(x)| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad \text{für } |x| \le 2n+3$$
$$|r_{2n+3}(x)| \le \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \quad \text{für } |x| \le 2n+4$$

Restglied bei Abbruch der Summation nach endlicher Schrittzahl

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n+2}(x), \ \sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+3}(x).$$

Satz 4.33

Für die Restglieder der Cosinus- und Sinus-Reihe gelten die folgenden Abschätzungen

$$\begin{aligned} |r_{2n+2}(x)| &\leq \tfrac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad \text{für } |x| \leq 2n+3 \\ |r_{2n+3}(x)| &\leq \tfrac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \quad \text{für } |x| \leq 2n+4 \end{aligned}$$

Beweisidee

Abschätzung der unendlichen Summen. □

Definition 4.34 (Periodische Funktion)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt ***periodische Funktion****, wenn es ein $p > 0$ gibt, so dass*

$$f(x) = f(x + p)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Das kleinste $p \in \mathbb{R}_{>0}$ mit der obigen Eigenschaft heißt ***Periode der Funktion*** *f.*

Satz 4.35 (Eigenschaften von sin und cos)

Es gilt:

i) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *(Satz des Pythagoras)*

ii) $\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$

iii) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

iv) $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$
$\sin(x+2\pi) = \sin(x)$

v) $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

vi) $|\sin(x)| \leq 1$
$|\cos(x)| \leq 1$