4. Funktionen

Kapitelgliederung

4.1 Grundlegende Definitionen

Definition 4.1 (Funktion)

Seien A und B zwei nichtleere Mengen. Eine Funktion f mit ***Definitionsbereich*** *A und* ***Zielbereich*** *(oder* ***Bildbereich****) B ist eine Vorschrift, die jedem Element aus A ein eindeutiges Element aus B zuordnet.*

Definition 4.2 (Eigenschaft von Funktionen)

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

1. ***injektiv**, wenn zu jedem $y \in B$ höchstens ein $x \in A$ mit $f(x) = y$ gehört (d. h. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$),*
2. ***surjektiv**, wenn jedes $y \in B$ als Abbild eines $x \in A$ auftaucht (d. h. $\forall y \in B\, \exists x \in A. f(x) = y$),*
3. ***bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.*

Definition 4.3 (Umkehrfunktion)

*Für eine bijektive Funktion $f : A \to B$ definieren wir die **Umkehrfunktion** $f^{-1} : B \to A$ als $f^{-1}(y) = x$ genau dann wenn $f(x) = y$.*

Definition 4.4 (Rationale Operationen auf Funktionen)

Seien $f, g : A \to \mathbb{R}$ Funktionen und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen $f + g : A \to \mathbb{R}$, $cf : A \to \mathbb{R}$, $fg : A \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{array}{rcl} (f+g)(x) & = & f(x) + g(x), \\ (cf)(x) & = & cf(x), \\ (fg)(x) & = & f(x)g(x). \end{array}$$

Sei $A' = \{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$, dann ist die Funktion $\frac{f}{g} : A' \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Definition 4.5 (**Konkatenation** von Funktionen)

Seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ Funktionen und $f(x) \in B$ für alle $x \in A$. Dann ist die Funktion $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

4.2 Polynome und rationale Funktionen

Polynomfunktionen: Seien $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 .$$

Das größte n mit $a_n \neq 0$ heißt der **Grad des Polynoms**.
Multiplikation von Polynomfunktionen
$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ und
$q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$
Polynomfunktionen vom Grade n und m. Dann ist

$$h(x) = (p \cdot q)(x) = c_{m+n} x^{m+n} + \cdots + c_1 x + c_0$$

eine Polynomfunktion vom Grad $n + m$ und $c_k = \sum_{\substack{0 \leq r \leq n \\ 0 \leq s \leq m \\ r+s=k}} a_r b_s$.

Satz 4.6

Seien $p(x)$ und $q(x)$ Polynome vom Grad n und m mit $m \leq n$. Dann gibt es Polynome $s(x)$ und $r(x)$, so dass

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x).$$

Der Grad von $s(x)$ entspricht der Differenz Grad p - Grad q und Grad $r <$ Grad q.

Satz 4.6

Seien $p(x)$ und $q(x)$ Polynome vom Grad n und m mit $m \leq n$. Dann gibt es Polynome $s(x)$ und $r(x)$, so dass

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x).$$

Der Grad von $s(x)$ entspricht der Differenz Grad p - Grad q und Grad $r <$ Grad q.

Beweisidee
Schrittweise Konstruktion des Polynoms $s(x)$, so dass jeweils der Koeffizient der höchsten Potenz des Restpolynoms zu 0 wird.
Zeigen, dass die resultierende Darstellung eindeutig ist. $\square$

Korollar 4.7

Ein Polynom $p(x)$ lässt sich genau dann ohne Rest durch $q(x) = x - x_1$ teilen ($x_1 \in \mathbb{R}$), wenn x_1 eine Nullstelle von $p(x)$ ist.

$q(x) = x - x_1$ bezeichnet man auch als einen **Linearfaktor**.

Seien $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ und
$q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$
Polynome und $A = \{x \mid q(x) \neq 0\}$.

Dann ist die rationale Funktion $r : A \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$r(x) = \left(\frac{p}{q}\right)(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

4.3 Beschränkte und monotone Funktionen

Definition 4.8 (Beschränkte Funktion)

*Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt **beschränkt**, wenn $|f(x)| \leq K$ für $K \in \mathbb{R}$ und alle $x \in A$.*

Definition 4.9 (Kompaktes Intervall)

*Unter einem **kompakten Intervall** versteht man ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall* $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definition 4.10 (Monotonie von Funktionen)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ *und* $f : A \to \mathbb{R}$ *eine Funktion,*

$$f \text{ heißt } \left\{ \begin{array}{c} \textbf{monoton wachsend} \\ \textbf{streng monoton wachsend} \\ \textbf{monoton fallend} \\ \textbf{streng monoton fallend} \end{array} \right\} \text{ falls } \left\{ \begin{array}{c} f(x) \leq f(x') \\ f(x) < f(x') \\ f(x) \geq f(x') \\ f(x) > f(x') \end{array} \right\}$$

für $x, x' \in A$ *mit* $x < x'$.

Satz 4.11

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ *und* $f : A \to \mathbb{R}$ *eine Funktion. Ist* f *streng monoton, so ist* f *injektiv und die Umkehrfunktion* $f^{-1} : f(A) \to A$ *ist ebenfalls streng monoton (im gleichen Sinne).*

Satz 4.11

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ *und* $f : A \to \mathbb{R}$ *eine Funktion. Ist* f *streng monoton, so ist* f *injektiv und die Umkehrfunktion* $f^{-1} : f(A) \to A$ *ist ebenfalls streng monoton (im gleichen Sinne).*

Beweisidee

Beide Richtungen einzelnen zeigen.

$\Rightarrow$: Aus strenger Monotonie folgt $x \neq x' \to f(x) \neq f(x')$.

$\Leftarrow$: Widerspruchsbeweis unter Nutzung der Beziehung

$$f \circ g = f \circ f^{-1} = id. \qquad \square$$

4.4 Grenzwerte von Funktionen

Definition 4.12 (Berührungspunkt/Häufungspunkt)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$

1. *a heißt **Berührungspunkt** von A, falls in jeder ε-Umgebung von a, d. h. $U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon), \varepsilon > 0$, mindestens ein Punkt von A liegt.*
2. *a heißt **Häufungspunkt**, falls in jeder ε-Umgebung von a unendlich viele Punkte von A liegen.*

Definition 4.13 (Grenzwert einer Funktion)

*Sei $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ ein Berührungspunkt von A. Man definiert dann $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ als **Grenzwert**, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in A$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$ gilt.*

Einige spezielle Grenzwerte:

1. $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = c$ bedeutet: a ist Berührungspunkt von $A \cap (a, \infty)$ und für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in A$, $x_n > a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$
2. $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = c$ bedeutet: a ist Berührungspunkt von $A \cap (-\infty, a)$ und für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in A$, $x_n < a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$ bedeutet: A ist nach oben unbeschränkt und für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$ bedeutet: A ist nach unten unbeschränkt und für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

4.5 Stetige Funktionen

Definition 4.14 (Stetigkeit)

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in A$. Die Funktion f heißt ***stetig im Punkt*** *a, falls $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

f heißt ***stetig*** *(in A), falls f in jedem Punkt aus A stetig ist.*

Satz 4.15 (Operationen auf stetigen Funktionen)

Seien $f, g : A \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in $a \in A$ stetig sind und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen

i) $f + g : A \to \mathbb{R}$

ii) $cf : A \to \mathbb{R}$

iii) $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$

im Punkt a stetig.
Ist $g(a) \neq 0$, so ist auch die Funktion

iv) $\frac{f}{g} : A' \to \mathbb{R}$

in a stetig. Dabei ist $A' = \{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$.

Satz 4.15 (Operationen auf stetigen Funktionen)

Seien $f, g : A \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in $a \in A$ stetig sind und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen

i) $f + g : A \to \mathbb{R}$

ii) $cf : A \to \mathbb{R}$

iii) $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$

im Punkt a stetig.
Ist $g(a) \neq 0$, so ist auch die Funktion

iv) $\frac{f}{g} : A' \to \mathbb{R}$

in a stetig. Dabei ist $A' = \{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$.

Beweisidee
Nutzung der Rechenregeln für Folgen. □

Korollar 4.16

Jede rationale Funktion ist in ihrem Definitionsbereich stetig.

Satz 4.17 (Komposition stetiger Funktionen)

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(A) \subseteq B$. Die Funktion f sei in $a \in A$ und g in $b = f(a) \in B$ stetig. Dann ist die Funktion $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ in a stetig.

Satz 4.17 (Komposition stetiger Funktionen)

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(A) \subseteq B$. Die Funktion f sei in $a \in A$ und g in $b = f(a) \in B$ stetig. Dann ist die Funktion $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ in a stetig.

Beweisidee

Fortsetzung der Stetigkeit der ersten Funktion als Argument der zweiten Funktion. □

Satz 4.18 (Zwischenwertsatz)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (bzw. $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$). Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = 0$.

Satz 4.18 (Zwischenwertsatz)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (bzw. $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$). Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = 0$.

Beweisidee

Konstruktion einer Intervallschachtelung, die die Nullstelle direkt bestimmt oder diese als eindeutigen Wert enthält, der in allen Intervallen liegt. □

Korollar 4.19

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $y \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < y < f(b)$ (bzw. $f(a) > y > f(b)$). Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = y$.

Korollar 4.20

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist auch $J = f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

Satz 4.21 (Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen)

Jede in einem kompakten Intervall stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt ihr Minimum und Maximum an.
D. h. es existiert ein $c \in [a, b]$, sodass $f(c) = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ und ein $d \in [a, b]$, sodass $f(d) = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$.

Satz 4.21 (Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen)

Jede in einem kompakten Intervall stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ist beschränkt und nimmt ihr Minimum und Maximum an.*
D. h. es existiert ein $c \in [a, b]$*, sodass* $f(c) = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ *und ein* $d \in [a, b]$*, sodass* $f(d) = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$.

Beweisidee
Beweis über die Konvergenz von (Teil-)Folgen, die in Verbindung mit der Stetigkeit dazu führt, dass f beschränkt ist und ein Maximum in Intervall annehmen muss. □

Satz 4.22 ($\varepsilon - \delta$ - Definition von Stetigkeit)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ *und* $f : A \to \mathbb{R}$ *eine Funktion.* f *ist genau dann im Punkt* $a \in A$ *stetig, wenn gilt:*
Zu jedem $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $\delta > 0$*, sodass* $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ *für alle* $x \in A$ *mit* $|x - a| < \delta$.

Satz 4.22 ($\varepsilon - \delta$ - Definition von Stetigkeit)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ *und* $f : A \to \mathbb{R}$ *eine Funktion.* f *ist genau dann im Punkt* $a \in A$ *stetig, wenn gilt:*
Zu jedem $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $\delta > 0$*, sodass* $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ *für alle* $x \in A$ *mit* $|x - a| < \delta$.

Beweisidee
Beweis jeweils in eine Richtung:
ε, δ existieren $\Rightarrow$ Stetigkeit: Zu zeigen, dass aus der Konvergenz der x_n gegen a die Konvergenz der $f(x_n)$ gegen $f(a)$ folgt.
Stetigkeit $\Rightarrow$ ε, δ existieren: Widerspruchsbeweis unter der Annahme, es gäbe zu einem ε kein passendes δ. □

Korollar 4.23

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ *stetig im Punkt* $a \in A$ *und* $f(a) \neq 0$*. Dann ist* $f(x) \neq 0$ *für alle* x *in einer Umgebung von* a*. D. h. es existiert ein* $\delta > 0$*, sodass* $f(x) \neq 0$ *für alle* $x \in A$ *mit* $|x - a| < \delta$.

Korollar 4.24

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton (wachsend oder fallend). Sei $J = f(I)$, dann bildet f das Intervall I bijektiv auf J ab und die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Definition 4.25 (Gleichmäßige Stetigkeit)

Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt in A ***gleichmäßig stetig****, wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so dass $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ für alle $x, x' \in A$ mit $|x - x'| < \delta$.*

Satz 4.26 (Stetigkeit auf kompakten Intervallen)

Jede auf einem kompakten Intervall stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist dort gleichmäßig stetig.

Satz 4.26 (Stetigkeit auf kompakten Intervallen)

Jede auf einem kompakten Intervall stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist dort gleichmäßig stetig.

Beweisidee

Widerspruchsbeweis unter Nutzung der Existenz konvergenter Teilfolgen für beschränkte Folgen. $\square$

4.6 Logarithmen und allgemeine Potenzen

Definition der Exponentialfunktion über die Exponentialreihe:

$$\exp(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

1. exp bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_{>0}$ ab
2. exp ist streng monoton wachsend

$\Rightarrow$ Umkehrfunktion $\ln(x) : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ existiert

- $\ln(\exp(x)) = \exp(\ln(x)) = x$
- $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$
- $\ln(x) = \begin{cases} < 0 & \text{für} \quad x \in (0,1) \\ 0 & \text{für} \quad x = 1 \\ > 0 & \text{für} \quad x \in (1,\infty) \end{cases}$

Bisherige Potenzen, die wir für $n \in \mathbb{N}$ betrachtet haben

- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} \ (a \in \mathbb{R})$
- $a^0 = 1 \ (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \ (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \ (a \in \mathbb{R}_{>0})$

Daraus kann man ableiten:

$$a^{\frac{n}{m}} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$$

Definition 4.27 (Exponentialfunktion für allgemeine Basen)

Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ sei die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$\exp_a(x) = \exp(x \ln a).$$

Satz 4.28

Die Funktion $\exp_a(x)$ *ist stetig und es gilt*

i) $\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$

ii) $\exp_a(n) = a^n$ *für alle* $n \in \mathbb{Z}$

iii) $\exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p}$ *für alle* $p \in \mathbb{Z}$ *und* $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Satz 4.28

Die Funktion $\exp_a(x)$ *ist stetig und es gilt*

i) $\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$

ii) $\exp_a(n) = a^n$ *für alle* $n \in \mathbb{Z}$

iii) $\exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p}$ *für alle* $p \in \mathbb{Z}$ *und* $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Beweisidee

Anwendung der Rechenregeln für die Exponentialfunktion. □

Satz 4.29

Für $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ *und* $x, y \in \mathbb{R}$ *gelten folgende Rechenregeln:*

i) $a^x a^y = a^{x+y}$

ii) $(a^x)^y = a^{xy}$

iii) $a^x b^x = (ab)^x$

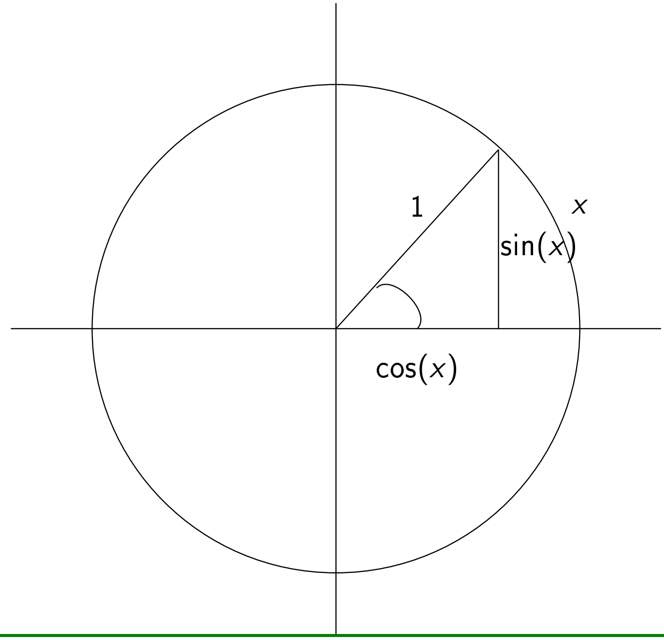
iv) $\left(\frac{1}{a^x}\right) = a^{-x}$

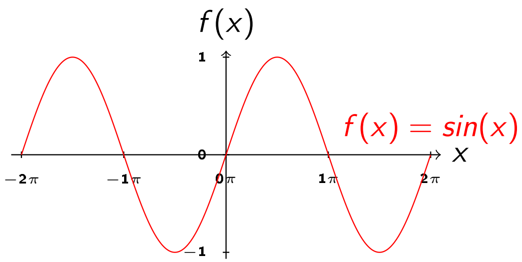
Definition 4.30

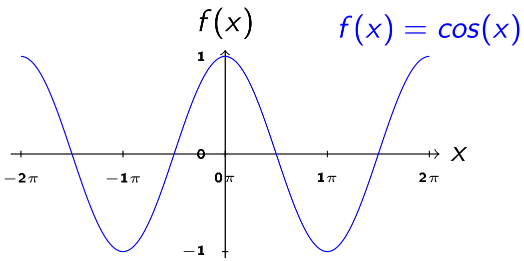
Sei $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$*, dann ist der Logarithmus zur Basis a definiert als*

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

4.7 Trigonometrische Funktionen







Definition 4.31

Für alle $x \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \textit{und} \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Satz 4.32

Die Reihen für $\cos(x)$ *und* $\sin(x)$ *konvergieren absolut für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Satz 4.32

Die Reihen für $\cos(x)$ *und* $\sin(x)$ *konvergieren absolut für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Beweisidee

Beweis unter Nutzung des Quotientenkriteriums. $\square$

Restglied bei Abbruch der Summation nach endlicher Schrittzahl

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n+2}(x), \ \sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+3}(x).$$

Restglied bei Abbruch der Summation nach endlicher Schrittzahl

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n+2}(x), \ \sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+3}(x).$$

Satz 4.33

Für die Restglieder der Cosinus- und Sinus-Reihe gelten die folgenden Abschätzungen

$$\begin{aligned} |r_{2n+2}(x)| &\le \tfrac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} && \textit{für } |x| \le 2n+3 \\ |r_{2n+3}(x)| &\le \tfrac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} && \textit{für } |x| \le 2n+4 \end{aligned}$$

Restglied bei Abbruch der Summation nach endlicher Schrittzahl

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n+2}(x), \ \sin(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+3}(x).$$

Satz 4.33

Für die Restglieder der Cosinus- und Sinus-Reihe gelten die folgenden Abschätzungen

$$|r_{2n+2}(x)| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad \text{für } |x| \le 2n+3$$
$$|r_{2n+3}(x)| \le \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \quad \text{für } |x| \le 2n+4$$

Beweisidee

Abschätzung der unendlichen Summen. □

Definition 4.34 (Periodische Funktion)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt ***periodische Funktion****, wenn es ein $p > 0$ gibt, so dass*

$$f(x) = f(x+p)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Das kleinste $p \in \mathbb{R}_{>0}$ mit der obigen Eigenschaft heißt ***Periode der Funktion*** *f.*

Satz 4.35 (Eigenschaften von sin und cos)

Es gilt:

i) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *(Satz des Pythagoras)*

ii) $\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$

iii) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

iv) $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$
$\sin(x+2\pi) = \sin(x)$

v) $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

vi) $|\sin(x)| \le 1$
$|\cos(x)| \le 1$