3. Folgen und Reihen

Kapitelgliederung

3.1 Folgen und Grenzwerte

Definition 3.1 (Folge)

*Unter einer **Folge** versteht man eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Jedem $n \in \mathbb{N}$ wird ein $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet. Man schreibt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(a_1, a_2, \ldots)$.*

n **Index** der Folge

a_n **Glieder** der Folge

$f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge, dann ist
$\|f\| := \sup\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ die **Norm** der Folge.

$f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge, dann ist
$\|f\| := \sup\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ die **Norm** der Folge.

Definition 3.2 (konvergente Folgen)

*Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent gegen** $a \in \mathbb{R}$, falls gilt: zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$*

$f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge, dann ist
$\|f\| := \sup\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ die **Norm** der Folge.

Definition 3.2 (konvergente Folgen)

*Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent gegen** $a \in \mathbb{R}$, falls gilt: zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$*

Beachte, dass n_0 von ε abhängt!

Falls f gegen a konvergiert, so nennt man a den **Grenzwert** von f und schreibt:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$

Eine Folge die gegen 0 konvergiert, heißt **Nullfolge**.

Falls f gegen a konvergiert, so nennt man a den **Grenzwert** von f und schreibt:

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$

Eine Folge die gegen 0 konvergiert, heißt **Nullfolge**.

Satz 3.3

Der Grenzwert einer Folge ist, falls er existiert, eindeutig.

Falls f gegen a konvergiert, so nennt man a den **Grenzwert** von f und schreibt:

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$

Eine Folge die gegen 0 konvergiert, heißt **Nullfolge**.

Satz 3.3

Der Grenzwert einer Folge ist, falls er existiert, eindeutig.

Beweisidee

Die Annahme, dass zwei Grenzwerte existieren wird zum Widerspruch geführt indem gezeigt wird, dass der Abstand der beiden Grenzwerte zu groß ist und die Folge nur gegen einen von ihnen konvergieren kann. □

Definition 3.4 (Beschränkte Folge)

*Eine Folge $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **nach oben** (bzw. **nach unten**) **beschränkt**, falls es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $a_n \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (bzw. $a_n \geq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Die Folge heißt **beschränkt**, falls $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Definition 3.5 (Bestimmt divergente Folge)

*Eine Folge $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **bestimmt divergent** gegen ∞, falls ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_0$, $a_n > 0$ und $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0}$ gegen 0 konvergiert.*

Definition 3.5 (Bestimmt divergente Folge)

*Eine Folge $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **bestimmt divergent** gegen ∞, falls ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_0$, $a_n > 0$ und $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0}$ gegen 0 konvergiert.*

Entsprechend kann man bestimmt Divergenz gegen $-\infty$ definieren.

Satz 3.6

Jede konvergente Folge f ist beschränkt.

Satz 3.6

Jede konvergente Folge f ist beschränkt.

Beweisidee

Ab einem vorgegebenem Index n_0 weichen alle Glieder der Folge um nicht mehr als ein vorgegebenes ϵ vom Grenzwert ab.

Damit kann kein Glied größer als eines der Glieder mit Indizes kleiner n_0 oder der Grenzwert plus dem vorgegebenen ϵ sein.

Durch diese Schritte wurde ein Grenzwert definiert. □

Satz 3.6

Jede konvergente Folge f ist beschränkt.

Beweisidee

Ab einem vorgegebenem Index n_0 weichen alle Glieder der Folge um nicht mehr als ein vorgegebenes ϵ vom Grenzwert ab.

Damit kann kein Glied größer als eines der Glieder mit Indizes kleiner n_0 oder der Grenzwert plus dem vorgegebenen ϵ sein.

Durch diese Schritte wurde ein Grenzwert definiert. □

Die Umkehrung des Satzes gilt natürlich nicht!

3.2 Rechenregeln für konvergente Folgen

Definition 3.7 (Rechenregeln für Folgen)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen und $c \in \mathbb{R}$.
Dann definieren wir:

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. $c \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$
4. $\dfrac{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}{(b_n)_{n\in\mathbb{N}}} = \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *falls $(b_n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$*

Satz 3.8 (Grenzwerte kombinierter Folgen)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen und $c \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) + \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)}$ *falls $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Satz 3.8 (Grenzwerte kombinierter Folgen)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen und $c \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) + \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)}$ *falls $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Beweisidee

Jeweils geschickter Einsatz der Definition des Grenzwertes von Folgen.

□

Satz 3.9

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n$.
Dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Satz 3.9

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n$.
Dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Beweisidee
Nachweis, dass der Grenzwert der Differenzfolge $c_n = b_n - a_n$ größer gleich 0 ist. $\square$

Satz 3.9

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n$.
Dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Beweisidee
Nachweis, dass der Grenzwert der Differenzfolge $c_n = b_n - a_n$ größer gleich 0 ist. $\square$

Vorsicht, der Satz gilt nicht, wenn $\leq$ durch $<$ ersetzt wird!

Satz 3.10 (Sandwich-Theorem)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$.
Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$,
dann ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Satz 3.10 (Sandwich-Theorem)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$.

Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$,

dann ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Beweisidee

Vorgabe von n_0 und ϵ für die Folgen a_n und c_n. Daraus Ableitung eines passenden n_0' und ϵ' für Folge b_n. □

3.3 Monotone Folgen und Teilfolgen

Definition 3.11 (Monotone Folge)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

- ***monoton wachsend**, falls $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,*
- ***streng monoton wachsend**, falls $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,*
- ***monoton fallend**, falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und*
- ***streng monoton fallend**, falls $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Definition 3.12 (Teilfolge)

*Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ eine aufsteigende unendliche Folge natürlicher Zahlen, dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ eine **Teilfolge** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Satz 3.13

Jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Satz 3.13

Jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Beweisidee

Das ϵ, n_0-Kriterium gilt auch, wenn nur ein Teil der Folgenglieder betrachtet werden. $\square$

Satz 3.14 (Divergenzkriterium)

Besitzt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

i) eine divergente Teilfolge oder

ii) zwei konvergente Teilfolgen $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty}(a_{n_k}) \neq \lim\limits_{l\to\infty}(a_{n_l})$

so ist die Folge divergent.

Satz 3.14 (Divergenzkriterium)

Besitzt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

i) eine divergente Teilfolge oder

ii) zwei konvergente Teilfolgen $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty}(a_{n_k}) \neq \lim\limits_{l\to\infty}(a_{n_l})$

so ist die Folge divergent.

Beweisidee

i) folgt aus Satz 3.13 und bei ii) kann der Grenzwert nicht eindeutig sein, wenn die Folge konvergent wäre. $\square$

Satz 3.15 (Konvergenzkriterium)

Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent. Genauer formuliert:

i) *Ist $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, so ist f konvergent und es gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

ii) *Ist $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, so ist f konvergent und es gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Satz 3.15 (Konvergenzkriterium)

Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent. Genauer formuliert:

i) *Ist $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, so ist f konvergent und es gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

ii) *Ist $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, so ist f konvergent und es gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Beweisidee

Beschränkte Folgen haben ein Supremum bzw. Infimum. Es wird gezeigt, dass das Supremum (Infimum) dem Grenzwert bei monotonen Folgen entspricht. □

Satz 3.16

Jede Folge enthält eine monotone Teilfolge.

Satz 3.16

Jede Folge enthält eine monotone Teilfolge.

Beweisidee

Betrachte Menge N_1 von nicht kleiner werdenden Elementen. Falls N_1 unbeschränkt, dann ist dies die monotone Teilfolge, ansonsten wir eine monoton fallende Folge rekursiv erzeugt. □

Satz 3.17 (Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Satz 3.17 (Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweisidee

Folgt aus den Sätzen 3.15 und 3.16. $\square$

Definition 3.18 (Häufungspunkt)

*Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt a **Häufungspunkt**, wenn es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt und $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.*

Definition 3.19 (Cauchy-Folge)

*Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Cauchy-Folge**, wenn gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - a_{n_0}| < \varepsilon.$$

Satz 3.20

i) *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*
ii) *Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.*
iii) *Besitzt die Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge, so ist sie selbst konvergent.*

Satz 3.20

i) *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*
ii) *Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.*
iii) *Besitzt die Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge, so ist sie selbst konvergent.*

Beweisidee

i) aus der ε, n_0 Bedingung abgeleitet.
ii) Ab n_0 kann kein Folgenglied größer als $a_{n_0} + \varepsilon$ sein, damit kann kein Folgenglied größer als $\max\left(\max_{n \leq n_0}(a_n), a_{n_0} + \varepsilon\right)$ sein.
iii) Herleitung der ε, n_0 Bedingung für die Folgenglieder, die nicht zur konvergenten Teilfolge gehören.

□

Satz 3.21

Jede Cauchy-Folge ist konvergent.

Satz 3.21

Jede Cauchy-Folge ist konvergent.

Beweisidee

Folgt aus den vorherigen Sätzen. □

Korollar 3.22

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

3.4 Ein Algorithmus zur Wurzelberechnung

Satz 3.23

Seien $a > 0$ und $x_1 > 0$ reelle Zahlen.
Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert als $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$.
Dann konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{a}$ (d. h. $x^2 = a$).

Satz 3.23

Seien $a > 0$ und $x_1 > 0$ reelle Zahlen.
Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert als $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$.
Dann konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{a}$ (d. h. $x^2 = a$).

Beweisidee
In 4 Schritten:
i) zeige $x_n > 0$.
ii) zeige $x_n^2 \geq a$ für $n > 1$.
iii) zeige $x_{n+1} \leq x_n$ für $n > 1$.
iv) zeige: Grenzwert der Folge ist gerade die gesuchte Wurzel. □

3.5 Reihen

Definition 3.24 (Reihe)

Man nennt den formalen Ausdruck

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots$ *mit* $a_k \in \mathbb{R}$ *eine (unendliche)* ***Reihe*** *und*

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *die* ***n-te Teilsumme****.*

Wenn die Folge der Teilsummen konvergiert, dann heißt die Reihe ***konvergent****. Eine nicht konvergente Reihe heißt* ***divergent****.*

Konvergiert sogar $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$*, so nennt man die Reihe* ***absolut konvergent****.*

Korollar 3.25 (Cauchy-Konvergenzkriterium)

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergiert genau dann, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *gibt, sodass* $\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon$ *für alle* $n \geq m \geq n_0$*.*

Satz 3.26

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *mit* $a_k \geq 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$ *konvergiert genau dann, wenn die Folge der Teilsummen beschränkt ist.*

Satz 3.26

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *mit* $a_k \geq 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$ *konvergiert genau dann, wenn die Folge der Teilsummen beschränkt ist.*

Beweisidee

s_n ist monoton wachsend, so dass Satz 3.15 gilt.
Bei unbeschränkten Teilsummen gilt offensichtlich $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, so dass die Reihe divergent ist. □

Satz 3.27 (Rechnen mit konvergenter Reihe)

i) Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergente Reihen, so sind auch* $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$ *konvergent, und es gilt:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ und}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

ii) Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent und* $c \in \mathbb{R}$, *dann gilt:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Satz 3.27 (Fortsetzung)

iii) Für jedes $l \in \mathbb{N}$ *mit* $l > 1$ *gilt:*

$$\sum_{k=l}^{\infty} a_k \text{ konvergent } \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent.}$$

iv) Sind die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergent und gilt*

$a_k \leq b_k \forall k \in \mathbb{N}$, *so gilt* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Satz 3.27 (Fortsetzung)

iii) Für jedes $l \in \mathbb{N}$ *mit* $l > 1$ *gilt:*

$$\sum_{k=l}^{\infty} a_k \text{ konvergent } \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent.}$$

iv) Sind die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergent und gilt*

$a_k \leq b_k \forall k \in \mathbb{N}$, *so gilt* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Beweisidee

Wie bei der Grenzwertbestimmung konvergenter Folgen. □

Satz 3.28 (Leibniz Kriterium)

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge reeller nicht negativer Zahlen mit $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$.

Satz 3.28 (Leibniz Kriterium)

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge reeller nicht negativer Zahlen mit $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$.

Beweisidee

Betrachte die Teilfolgen mit positivem und negativem Vorzeichen und zeige die Konvergenz gegen einen identischen Grenzwert. □

3.6 Absolut konvergente Reihen

Satz 3.29

Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, so konvergiert sie auch im gewöhnlichen Sinne.

Satz 3.29

Wenn die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergiert, so konvergiert sie auch im gewöhnlichen Sinne.*

Beweisidee

Nutzung der Dreiecksungleichung. □

Satz 3.30 (Majorantenkriterium)

Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ *eine konvergente Reihe mit ausschließlich nicht-negativen Gliedern und* $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *eine Folge mit* $|a_k| \leq c_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$, *dann konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut.*

technische universität dortmund
LS Informatik 4 & 11

Satz 3.30 (Majorantenkriterium)

Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ *eine konvergente Reihe mit ausschließlich nicht-negativen Gliedern und* $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *eine Folge mit* $|a_k| \leq c_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$, *dann konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut.*

Beweisidee

Nutzung der ε, n_0 Bedingung für die Partialsummen und der Rechenregeln für konvergente Reihen. □

Satz 3.31 (Minorantenkriterium)

Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ *eine divergente Reihe mit ausschließlich nicht-negativen Gliedern und* $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *eine Folge mit* $a_k \geq c_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$. *Dann divergiert die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Satz 3.31 (Minorantenkriterium)

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ *eine divergente Reihe mit ausschließlich nicht-negativen Gliedern und* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge mit* $a_k \geq c_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$*. Dann divergiert die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$*.*

Beweisidee
Ähnlich zum Majorantenkriterium. □

Satz 3.32 (Wurzelkriterium)

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe. Gibt es ein* $c \in \mathbb{R}$ *und* $q \in \mathbb{R}$ *mit* $0 \leq q < 1$*, sodass* $|a_k| \leq c \cdot q^k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$*, dann ist die Reihe absolut konvergent.*

Satz 3.32 (Wurzelkriterium)

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe. Gibt es ein* $c \in \mathbb{R}$ *und* $q \in \mathbb{R}$ *mit* $0 \leq q < 1$*, sodass* $|a_k| \leq c \cdot q^k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$*, dann ist die Reihe absolut konvergent.*

Beweisidee
Nutzung der geometrischen Reihe als Majorante. □

Satz 3.33 (Quotientenkriterium)

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe mit* $a_k \neq 0$ *für alle* $k \geq n_0$*. Es gebe eine reelle Zahl* $q \in \mathbb{R}$ *mit* $0 < q < 1$*, sodass* $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q$ *für alle* $k \geq n_0$*, dann ist die Reihe absolut konvergent.*

Satz 3.33 (Quotientenkriterium)

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe mit* $a_k \neq 0$ *für alle* $k \geq n_0$*. Es gebe eine reelle Zahl* $q \in \mathbb{R}$ *mit* $0 < q < 1$*, sodass* $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q$ *für alle* $k \geq n_0$*, dann ist die Reihe absolut konvergent.*

Beweisidee
Nutzung der geometrischen Reihe als Majorante (wie im Wurzelkriterium). □

Satz 3.34 (Umordnung)

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine absolut konvergente Reihe. Dann konvergiert jede Umordnung der Glieder der Reihe gegen den selben Grenzwert.*

Satz 3.34 (Umordnung)

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine absolut konvergente Reihe. Dann konvergiert jede Umordnung der Glieder der Reihe gegen den selben Grenzwert.*

Beweisidee
Darstellung der Umordnung als bijektive Abbildung und Berechnung von zwei Teilsummen für gegebenes ε, n_0, eine mit allen Indizes $1, \ldots, n_0$ und eine für die restlichen Indizes. □

3.7 Die Exponentialreihe

Satz 3.35 (Exponentialreihe)

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Exponentialreihe

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

absolut konvergent.

Satz 3.35 (Exponentialreihe)

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Exponentialreihe

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

absolut konvergent.

Beweisidee
Mit Hilfe des Quotientenkriteriums. □

Satz 3.36 (Cauchy-Produkt)

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergente Reihen. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$. Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$ absolut konvergent.

Satz 3.36 (Cauchy-Produkt)

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergente Reihen. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$. Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$ absolut konvergent.

Beweisidee
Beweis über zwei Indexmengen, von denen eine alle Indizes umfasst und die zweite nur einen Teil der Indizes umfasst. Nachweis, dass die Differenz der beiden Reihen gegen 0 konvergiert. □

Satz 3.37 (Eigenschaften der Exponentialreihe)

Für die Exponentialreihe $\exp(x)$ *gelten folgende Eigenschaften:*

i) $\forall x, y \in \mathbb{R}.\ \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}.\ \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

iii) $\forall x \in \mathbb{R}.\ \exp(x) > 0$

iv) $\forall n \in \mathbb{Z}.\ \exp(n) = e^n$

Satz 3.37 (Eigenschaften der Exponentialreihe)

Für die Exponentialreihe $\exp(x)$ *gelten folgende Eigenschaften:*

i) $\forall x, y \in \mathbb{R}.\ \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}.\ \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

iii) $\forall x \in \mathbb{R}.\ \exp(x) > 0$

iv) $\forall n \in \mathbb{Z}.\ \exp(n) = e^n$

Beweisidee

i) Nutzung der Ergebnisse für das Cauchy-Produkt.
ii) Nutzung von *i*) und Berechnung von $exp(x) \cdot exp(-x)$.
iii) Einsetzen in die Reihenformel für $x > 0$ und Nutzung von *ii*) für $x < 0$.
iv) per Induktion. □

3.8 Potenzreihen

Definition 3.38

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ *eine Folge und* $x \in \mathbb{R}$, *dann ist eine Potenzreihe* $P(x)$ *wie folgt definiert:*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

mit $a_k \in \mathbb{R}$.

Definition 3.38

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge und $x \in \mathbb{R}$, dann ist eine Potenzreihe $P(x)$ wie folgt definiert:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

mit $a_k \in \mathbb{R}$.

Alternative Darstellung:

$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$

Satz 3.39 (Konvergenz von Potenzreihen)

Konvergiert eine Potenzreihe $P(x)$ in einem Punkt $x_0 \neq 0$, so konvergiert sie in jedem Punkt x mit $|x| < |x_0|$ absolut.

technische universität dortmund
LS Informatik 4 & 11

Satz 3.39 (Konvergenz von Potenzreihen)

Konvergiert eine Potenzreihe $P(x)$ in einem Punkt $x_0 \neq 0$, so konvergiert sie in jedem Punkt x mit $|x| < |x_0|$ absolut.

Beweisidee

Beweis mit Hilfe des Wurzelkriteriums. □

technische universität dortmund
LS Informatik 4 & 11

Satz 3.39 (Konvergenz von Potenzreihen)

Konvergiert eine Potenzreihe $P(x)$ in einem Punkt $x_0 \neq 0$, so konvergiert sie in jedem Punkt x mit $|x| < |x_0|$ absolut.

Beweisidee

Beweis mit Hilfe des Wurzelkriteriums. □

Konvergenzradius einer Potenzreihe $r = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \text{ konvergiert}\}$.