2. Reelle Zahlen

Kapitelgliederung

2.1 Der Körper der reellen Zahlen

Definition 2.1 (Gruppe)

*Sei G eine Menge und $\circ$ eine Verknüpfung auf G (d. h. $\forall x, y \in G.\ x \circ y \in G$ und $x \circ y$ ist eindeutig). Das Paar $(G, \circ)$ heißt eine **Gruppe**, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

1. $\forall x, y, z \in G.\ (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$. *(Assoziativität)*
2. *Es gibt ein Element $n \in G$ mit der Eigenschaft* $\forall x \in G.\ n \circ x = x \circ n = x$ *(Existenz des **neutralen Elements**).*
3. *Zu jedem $x \in G$ gibt es genau ein $\bar{x} \in G$ mit der Eigenschaft* $x \circ \bar{x} = \bar{x} \circ x = n$ *(Existenz des **inversen Elements**).*

*Falls zusätzlich $\forall x, y \in G.\ x \circ y = y \circ x$ (Kommutativität) gilt, spricht man von einer **kommutativen** (oder **abelschen**) Gruppe.*

Definition 2.2 (Körper)

Auf einer Menge G sind zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:

1. *$(G,+)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0*
2. *$(G\setminus\{0\},\cdot)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 1*
3. *$\forall x,y,z\in G.\ x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$*
   und $(x+y)\cdot z=(x\cdot z)+(y\cdot z)$ (Distributivgesetze)

*In diesem Fall wird $(G,+,\cdot)$ ein **Körper** genannt.*

2.2 Anordnungsaxiome

Definition 2.3 (Ordnung)

*Sei M eine Menge und ν eine Relation auf M (d. h. eine Teilmenge von $M\times M$). Für $(x,y)\in\nu$ schreiben wir $x\nu y$. Die Relation ν heißt eine **Ordnung** und (M,ν) ist eine **geordnete** Menge, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *$\forall x\in M.\ x\nu x$ (Reflexivität)*
2. *$\forall x,y\in M.\ x\nu y\wedge y\nu x\ \Rightarrow\ x=y$ (Antisymmetrie)*
3. *$\forall x,y,z\in M.\ x\nu y\ \wedge\ y\nu z\ \Rightarrow\ x\nu z$ (Transititivität)*

Gilt darüber hinaus

4. *$\forall x,y\in M.\ x\nu y\ \vee\ y\nu x$,*

*so heißt ν eine **lineare** (oder **totale**) **Ordnung** und (M,ν) eine **linear** (oder **total**) **geordnete Menge**.*

Definition 2.4 ($\mathbb{R}$ als linear geordneter Körper)

Wir definieren eine lineare Ordnung $\leq$ ("kleiner oder gleich") auf $\mathbb{R}$, sodass $(\mathbb{R},\leq)$ eine linear geordnete Menge mit folgenden Eigenschaften ist:

1. *$\forall x,y,z\in\mathbb{R}.$ falls $x\leq y\ \Rightarrow\ x+z\leq y+z$*
   (Verträglichkeit mit der Addition)
2. *$\forall x,y,z\in\mathbb{R}.$ falls $x\leq y\ \wedge\ 0\leq z\ \Rightarrow\ xz\leq yz$*
   (Verträglichkeit mit der Multiplikation)

*Die Beziehung $x\leq y$ heißt **Ungleichung**.*

Definition 2.5

Seien $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $y \geq x$ *("größer oder gleich") bedeutet* $x \leq y$
2. $x < y$ *("kleiner") bedeutet* $x \leq y \ \wedge \ x \neq y$
3. $x > y$ *("größer") bedeutet* $x \geq y \ \wedge \ x \neq y$
4. y *heißt **nichtnegativ** (bzw. positiv) wenn* $0 \leq y$ *(bzw.* $0 < y$*)*
5. x *heißt **nichtpositiv** (bzw. negativ) wenn* $x \leq 0$ *(bzw.* $x < 0$*).*

Satz 2.6

Für je zwei Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Beziehungen:
$x < y$, $x = y$, $x > y$.

Satz 2.6

Für je zwei Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Beziehungen:
$x < y$, $x = y$, $x > y$.

Beweisidee

Beweis in zwei Schritten:

1. Mindestens eine der drei Beziehungen trifft zu.
2. Höchstens eine der drei Beziehungen trifft zu.

□

Satz 2.7

Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $a < b \ \Rightarrow \ a + c < b + c$ *(Verträglichkeit mit der Addition)*
2. $a \leq b \wedge c \leq d \ \Rightarrow \ a + c \leq b + d$
   $a < b \wedge c \leq d \ \Rightarrow \ a + c < b + d$
3. $a < b \wedge 0 < c \ \Rightarrow \ ac < bc$ *(Verträglichkeit mit der Multiplikation)*
4. $0 \leq a \leq b \wedge 0 \leq c \leq d \ \Rightarrow \ ac \leq bd$
   $0 \leq a < b \wedge 0 < c \leq d \ \Rightarrow \ ac < bd$
5. $a \leq b \wedge c < 0 \ \Rightarrow \ ac \geq bc$
   $a < b \wedge c < 0 \ \Rightarrow \ ac > bc$
6. $0 < a \ \Rightarrow \ 0 < \frac{1}{a}$
   $0 < a < b \ \Rightarrow \ \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
7. $0 < 1$

Beweisidee
Herleitung aus den Rechenregeln.
Zum Beispiel Beweis von 1.:
Nach Definition von $<$ gilt $a < b \Rightarrow a \leq b$.
Also folgt aufgrund der Verträglichkeit mit der Addition $a + c \leq b + c$.
Gleichheit kann nicht gelten, da aus $a + c = b + c$ auch $a = b$ folgt, was aber $a < b$ widerspricht. $\square$

2.3 Betrag und Dreiecksungleichung

Definition 2.8 (Betrag)

Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

*der **(Absolut-)Betrag** von x.*

Satz 2.9

Der Absolutbetrag hat folgende Eigenschaften

1. $\forall x \in \mathbb{R}.\ |x| \geq 0 \ \wedge\ (|x| = 0 \ \Rightarrow\ x = 0)$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}.\ |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}.\ |x + y| \leq |x| + |y|$ *(Dreiecksungleichung)*

Satz 2.9

Der Absolutbetrag hat folgende Eigenschaften

1. $\forall x \in \mathbb{R}.\ |x| \geq 0 \ \wedge\ (|x| = 0 \ \Rightarrow\ x = 0)$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}.\ |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}.\ |x + y| \leq |x| + |y|$ *(Dreiecksungleichung)*

Beweisidee

1. folgt aus der Definition
2. mit Fallunterscheidung positiv/negativ
3. Nutzung von Satz 2.7.2. □

Satz 2.10

Für $a, x, \varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ gilt:

1. $|x| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ x < \varepsilon$ *und* $-\varepsilon < x \ \Leftrightarrow\ -\varepsilon < x < \varepsilon$
2. $|x - a| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$
3. *Die Aussagen 1. und 2. gelten auch, wenn $<$ durch $\leq$ ersetzt wird.*

Satz 2.10

Für $a, x, \varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ gilt:

1. $|x| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ x < \varepsilon$ *und* $-\varepsilon < x \ \Leftrightarrow\ -\varepsilon < x < \varepsilon$
2. $|x - a| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$
3. *Die Aussagen 1. und 2. gelten auch, wenn $<$ durch $\leq$ ersetzt wird.*

Beweisidee

Nutzung der Rechenregeln. □

Satz 2.11 (Bernoullische Ungleichung)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

Satz 2.11 (Bernoullische Ungleichung)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

Beweisidee
Induktion über n. $\square$

Archimedisches Axiom

Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x < n$.

Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $n \cdot x > y$ ist.

Ein Körper, in dem das archimedische Axiom gilt, heißt archimedisch geordnet.

2.4 Darstellung von Zahlen im Rechner

Definition 2.12 (Stellenwertsystem)

Seien $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ Ziffern, dann ist $p = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i \in \mathbb{N}_0$ und es existiert eine Darstellung $b_0, b_1, \ldots, b_m \in \{0, 1\}$, sodass $p = \sum_{i=0}^{m} b_i \cdot 2^i \in \mathbb{N}_0$

- Darstellung von natürlichen/ganzen Zahlen durch Zeichenketten fester Länge
- Vorzeichenbit erlaubt die Darstellung von ganzen Zahlen
- Vorgegebene Länge definiert darstellbaren Zahlenbereich

Man unterscheidet Festkomma- und Gleitkommadarstellung

Festkommadarstellung
(feste Anzahl von Stellen vor und nach dem Komma)

- $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+m} \in \{0, 1\}$, so dass
  $x = \sum_{i=-n}^{m} a_{i+n} \cdot 2^i \in \mathbb{R}$
- eigentlich nur $x \in \mathbb{Q}$ darstellbar, da $x = \frac{\sum_{i=0}^{m+n} a_i \cdot 2^i}{2^n} \in \mathbb{Q}$
- vorgegebene Länge definiert darstellbaren Zahlenbereich
- zusätzliches Vorzeichenbit erlaubt die Darstellung negativer Zahlen

Gleitkommadarstellung

$x = M \cdot b^E$ mit $b^{-1} \leq |M| < 1$, $E \in \mathbb{Z}$

es gilt

- $M = \pm 0.m_1 m_2 \ldots m_t = \pm \sum_{j=1}^{t} m_j \cdot b^{-j}$ und
  $E = \pm e_{s-1} \ldots e_1 e_0 = \pm \sum_{j=0}^{s-1} e_j \cdot b^j$
- M heißt Mantisse, E heißt Exponent, b heißt Basis

Jedes darstellbare x gehört zu $\mathbb{Q}$

Aber nicht jedes $x \in \mathbb{Q}$ ist darstellbar

Standardisierte Darstellung der IEEE:

- Single precision $t = 24$ und $E \in [-125, 128]$
  größte darstellbare Zahl $x_{\max} \approx 3.40 \cdot 10^{38}$
  kleinste positive darstellbare Zahl $x_{\min} \approx 1.18 \cdot 10^{-38}$
- Double precision $t = 53$ und $E \in [-1021, 1024]$
  größte darstellbare Zahl $x_{\max} \approx 1.80 \cdot 10^{308}$
  kleinste positive darstellbare Zahl $x_{\min} \approx 2.23 \cdot 10^{-308}$
- Zusätzlich spezielle Symbole $\pm INF$ oder NaN
- Spezielle Software erlaubt die Nutzung frei definierbarer Darstellungen

Jede Zahl muss durch eine darstellbare Zahl dargestellt (bzw. approximiert) werden

- Sei $x = a \cdot 2^e$ mit $0.5 \leq a < 1$ und $x_{min} \leq x \leq x_{max}$
- Seien u, v zwei benachbarte darstellbare Zahlen mit $u \leq x \leq v$
- Sei $u = 2^e \cdot \sum_{i=1}^{t} b_i \cdot 2^{-i}$ (wir nehmen zur Vereinfachung an, dass $2^{-t} + \sum_{i=1}^{t} b_i \cdot 2^{-i}$ keinen Überlauf erzeugt),
- dann ist $v = 2^e \cdot \left(\sum_{i=1}^{t} b_i \cdot 2^{-i} + 2^{-t}\right)$, so dass
- $u - v = 2^{e-t}$ und $|rd(x) - x| \leq \frac{1}{2}(v - u) = 2^{e-t-1}$ mit $rd(x)$optimale Darstellung von x
- relative Fehler $\frac{|rd(x)-x|}{x} \leq \frac{2^{e-t-1}}{a \cdot 2^e} \leq 2^{-t}$
  (relative Maschinengenauigkeit eps)

Rundungsfehler treten bei jeder Berechnung auf

2.5 Intervalle

Definition 2.13 (Erweiterung von $\mathbb{R}$)

$\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *heißt* ***erweiterte reelle Zahlengerade***
Es gilt $-\infty < \infty$ *und* $-\infty < x < \infty$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$

a) Abgeschlossene Intervalle
Seien $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$, dann ist $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

b) Offene Intervalle
Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, dann ist $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
(Man schreibt manchmal auch $]a, b[$ statt (a, b))

c) Halboffene Intervalle
Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$:
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

d) Uneigentliche Intervalle
Sei $a \in \mathbb{R}$:
$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

Definition 2.14 (Länge eines Intervalls)

Für ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ *bezeichnet* $|[a, b]| = b - a$ *die* ***Länge des Intervalls****.*

Definition kann auf offene, halboffene und uneigentliche Intervalle übertragen werden.

Einige weitere weitere Bezeichnungen:

- $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- $\mathbb{R}_{\neq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
- $\hat{\mathbb{R}}_{>0} := \{x \in \hat{\mathbb{R}} \mid x > 0\}$
- $\hat{\mathbb{R}}_{\geq 0} := \{x \in \hat{\mathbb{R}} \mid x \geq 0\}$
- $\hat{\mathbb{R}}_{\neq 0} := \{x \in \hat{\mathbb{R}} \mid x \neq 0\}$

Intervalle definieren Mengen!

Definition 2.15 (Beschränkte Menge)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer.

*A heißt **nach oben** (bzw. **nach unten**) **beschränkt**, wenn es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $x \leq K$ (bzw. $x \geq K$) für alle $x \in A$.*

*Man nennt K dann **obere** (bzw. **untere**) **Schranke** von A.*

*Die Menge A wird **beschränkte Menge** genannt, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.*

Definition 2.16 (Supremum und Infimum)

Sei $A \subset \mathbb{R}$ nichtleer.
*Eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ heißt **Supremum** (bzw. **Infimum**) von A, wenn K die kleinste obere (bzw. größte untere) Schranke von A ist.*
*Dabei heißt K **kleinste obere Schranke**, falls gilt*

i) K ist eine obere Schranke von A,

ii) für jede obere Schranke K' von A gilt $K \leq K'$

*und **größte untere Schranke**, falls gilt*

i) K ist eine untere Schranke von A,

ii) für jede untere Schranke K' von A gilt $K \geq K'$.

Satz 2.17 (Eindeutigkeit des Supremums/Infimums)

Jede nichtleere Teilmenge A von $\mathbb{R}$ hat höchstens ein Supremum und höchsten ein Infimum. D. h. das Supremum (bzw. Infimum) von A ist, falls vorhanden, eindeutig und wird mit $\sup(A)$ (bzw. $\inf(A)$) bezeichnet.

Satz 2.17 (Eindeutigkeit des Supremums/Infimums)

Jede nichtleere Teilmenge A von $\mathbb{R}$ hat höchstens ein Supremum und höchsten ein Infimum. D. h. das Supremum (bzw. Infimum) von A ist, falls vorhanden, eindeutig und wird mit $\sup(A)$ (bzw. $\inf(A)$) bezeichnet.

Beweisidee

Zwei obere/untere Schranken, die nicht gleich sind, müssen in Relation $>$ stehen. □

Wir sagen: $[a, b] \subset [c, d]$, falls $c \leq a \wedge d \geq b \wedge (a \neq c \vee d \neq b)$

Wir sagen: $[a, b] \subset [c, d]$, falls $c \leq a \wedge d \geq b \wedge (a \neq c \vee d \neq b)$

Definition 2.18 (Intervallschachtelung)

Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_1, I_2, I_3, \ldots$ heißt ***Intervallschachtelung****, falls gilt:*

i) $I_{n+1} \subset I_n$ *für* $n = 1, 2, 3, \ldots$
ii) *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein Intervall* I_n *mit* $|I_n| \leq \varepsilon$.

Wir sagen: $[a, b] \subset [c, d]$, falls $c \leq a \wedge d \geq b \wedge (a \neq c \vee d \neq b)$

Definition 2.18 (Intervallschachtelung)

Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_1, I_2, I_3, \ldots$ heißt ***Intervallschachtelung****, falls gilt:*

i) $I_{n+1} \subset I_n$ *für* $n = 1, 2, 3, \ldots$
ii) *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein Intervall* I_n *mit* $|I_n| \leq \varepsilon$.

Wir fordern folgendes Axiom:
Für jede Intervallschachtellung gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$, sodass $x \in I_n$ für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Satz 2.19 (Existenz des Supremums/Infimums)

Jede nichtleere nach oben (bzw. unten) beschränkte Menge A besitzt ein Supremum (bzw. Infimum).

Satz 2.19 (Existenz des Supremums/Infimums)

Jede nichtleere nach oben (bzw. unten) beschränkte Menge A besitzt ein Supremum (bzw. Infimum).

Beweisidee

Konstruktion des Supremums/Infimums per Intervallschachtelung beginnen mit einer beliebigen oberen/unteren Schranke und einem Element aus der Menge. □

Satz 2.20 (Existenz von Wurzeln)

Zu jedem $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $y^k = x$, d. h. $y = x^{\frac{1}{k}}$ oder $y = \sqrt[k]{x}$ (k-te Wurzel von x).

Satz 2.20 (Existenz von Wurzeln)

Zu jedem $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $y^k = x$, d. h. $y = x^{\frac{1}{k}}$ oder $y = \sqrt[k]{x}$ (k-te Wurzel von x).

Beweisidee

Konstruktion einer Intervallschachtelung per Induktion, sodass x in allen Intervallen liegt und Nachweis, dass x die gesuchte Wurzel ist. □

Satz 2.21 (Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$)

Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Satz 2.21 (Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$)

Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Wenn $\mathbb{R}$ abzählbar wäre, so könnte man eine Anordnung $x_1, x_2, \ldots$ aller reellen Zahlen finden.

Wir konstruieren eine Intervallschachtelung, deren Intervalle eine Zahl y enthalten, die nicht zur Aufzählung gehört.