1. Grundlagen

Gliederung

1.1 Was ist Analysis?

1.2 Aussagen und Mengen

1.3 Natürliche Zahlen

1.4 Ganze Zahlen, rationale Zahlen

1.1 Was ist Analysis?

Analysis ist neben der linearen Algebra ein Grundpfeiler der Mathematik!

Grundlage der Analysis: Infinitesimalrechnung (d.h. beliebig kleine Abstände)

© Wikipedia

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716)

© Wikipedia

Isaac Newton
(1643-1727)

Analysis befasst sich mit

- Folgen und Reihen
  insbesondere deren Grenzwerten
- Funktionen reeller Zahlen
  insbesondere deren Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integration

Anwendungen der Analysis

- In allen Natur- und Ingenieurwissenschaften
  Funktionen als Modelle der Realität, z.B.
    - Fallgesetze in der Physik
    - Chemische Reaktionsgleichungen
    - Differentialgleichungen für elektrische Schaltkreise
    - u.v.a.
- in der Informatik
    - Modellbildung (Inf. als Natur-/Ingenieurwissenschaft)
    - Analyse von Funktionen (Computer als Lösungsinstrument)

  aber Informatik baut auf diskreten Strukturen auf!

1.2 Aussagen und Mengen

Definition 1.1
Aussagen sind (schrift)sprachliche Gebilde, denen ein Wahrheitswert wahr (w oder t) oder falsch (f) zugeordnet werden kann

Beispiele für Aussagen:

1. Borussia Dortmund war deutscher Fußballmeister 2012. (w)
2. Delfine sind Fische. (f)
3. 5 ist eine Primzahl. (w)
4. Es gibt unendlich viele Primzahlen. (w)
5. Jede gerade natürliche Zahl größer als zwei ist Summe zweier Primzahlen. (?)

Keine Aussagen:

1. Guten Tag!
2. Diese Aussage ist falsch

Definition 1.2 (Verknüpfung von Aussagen)

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Aussagen, dann bilden auch die folgenden Operationen Aussagen:

Negation von $\mathcal{A}$: $\neg \mathcal{A}$.	Die Aussage ist wahr, wenn $\mathcal{A}$ falsch ist.
Disjunktion von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$: $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$.	Die Aussage ist wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist.
Konjunktion von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$: $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$.	Die Aussage ist wahr, wenn beide Aussagen wahr sind.
Implikation von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$: $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.	Die Aussage ist wahr, wenn $\mathcal{A}$ falsch oder $\mathcal{B}$ wahr ist.
Äquivalenz von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$: $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$.	Die Aussage ist wahr, wenn beide Aussagen den gleichen Wahrheitswert besitzen.

Wahrheitswert von Aussagen können in Wahrheitstafeln zusammengefasst werden:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
f	f	w	f	f	w	w
f	w	w	w	f	w	f
w	f	f	w	f	f	f
w	w	f	w	w	w	w

Aussagen mit identischen Wahrheitswerten bezeichnet man als äquivalent $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Einige Beispiele (es gibt viele mehr):

- $\neg(\neg(\mathcal{A})) \equiv \mathcal{A}$ (doppelte Negation) oder $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A} \equiv$ w
- $\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \equiv (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C}$ (Assoziativität)
- $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \vee \mathcal{A}$ (Kommutativität)
- $\mathcal{A} \vee \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$ (Idempotenz)
- $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv \mathcal{A}$ (Absorption)

Aussagenlogik ist nicht ausreichend für die Behandlung allgemeiner mathematischer Theorien und wird deshalb zur Prädikatenlogik erweitert (die in der Vorlesung Logik detailliert eingeführt wird).

Prädikatenlogik basiert auf einer grundlegenden Struktur

z.B. den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit

den Operationen + und ·, sowie den Relationen = und ≤ (siehe Kapitel 1.2).

Damit können wir die Aussagenlogik erweitern und z.B. folgende Aussagen definieren

$1+2 = 3$ oder $n+1 \leq 4$ (n freie Variable aus einer Grundmenge, hier $\mathbb{N}$)

Zur Erweiterung der Aussagenformen werden All- und Existenzquantor verwendet

$\mathcal{A}(n)$ sein eine Aussage mit freier Variable n:

Allaussage $\forall n.\ \mathcal{A}(n)$, ist genau dann wahr, wenn $\mathcal{A}(n)$ für alle n aus der Grundmenge gilt.

Existenzaussage $\exists n.\ \mathcal{A}(n)$, ist genau dann wahr, wenn $\mathcal{A}(n)$ für mindestens ein n aus der Grundmenge gilt.

Definition 1.5 (Nummerierung folgt der Nummerierung im Skript)
Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Wir schreiben $a \in M$ („ a ist eine Element von M “)
oder $a \notin M$ („ a ist kein Element von M “)

Beschreibung von Mengen:

- Aufzählung der Elemente: M = {Samstag, Sonntag, Montag}
- Durch Prädikate über Elemente $M = \{m \mid \mathcal{A}(m)\}$
  $m \in M \Leftrightarrow \mathcal{A}(m) = \text{w}$, wobei $\mathcal{A}$ eine Aussage mit freier Variable m ist
  $M = \{m \mid m$ ist Datum (Tag, Monat) m kommt nur in Schaltjahren vor$\}$
  = {29. Februar}

Wir schreiben $M = \emptyset$ für die leere Menge (Menge ohne Elemente)

Definition 1.6
Seien A und B Mengen, dann definieren wir
1. $A = B$ genau dann wenn $m \in A \Leftrightarrow m \in B$
wir schreiben $A \neq B$ für $\neg(A = B)$.
2. $A \subseteq B$ genau dann wenn $m \in A \Rightarrow m \in B$.
3. $A \subset B$ genau dann wenn $A \subseteq B \wedge A \neq B$.

Definition 1.7
Sei M eine Menge. Die Potenzmenge ist definiert durch $\mathcal{P}(M) = \{M' \mid M' \subseteq M\}$.

Beispiel: $M = \{1, 2, 3\}$, dann gilt
$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Definition 1.8 (Verknüpfung von Mengen)

Seien A und B Mengen. Dann sind folgende Mengenverknüpfungen definiert:

Vereinigung $A \cup B = \{m \mid m \in A \vee m \in B\}$

Schnitt $A \cap B = \{m \mid m \in A \wedge m \in B\}$

Differenz $A \setminus B = \{m \mid m \in A \wedge m \notin B\}$

Symmetrische Differenz $A \Delta B = \{(A \cup B) \setminus (A \cap B)\}$

Kartesisches Produkt $A \times B = \{(m, n) \mid m \in A \wedge n \in B\}$

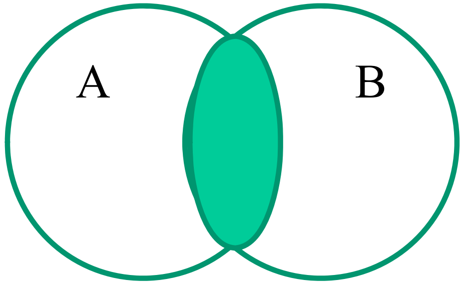
Vereinigung und Schnitt lassen sich auf mehrere Mengen verallgemeinern.

Sei $\mathcal{N}$ eine Menge von Mengen über einer Grundmenge M, dann gilt

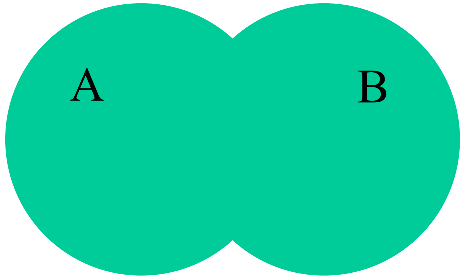
- $\bigcup_{M' \in \mathcal{N}} M' = \{m \mid \exists M' \in \mathcal{N}.\ m \in M'\}$
- $\bigcap_{M' \in \mathcal{N}} M' = \{m \mid \forall M' \in \mathcal{N}.\ m \in M'\}$

Graphische Darstellung der Mengenoperationen

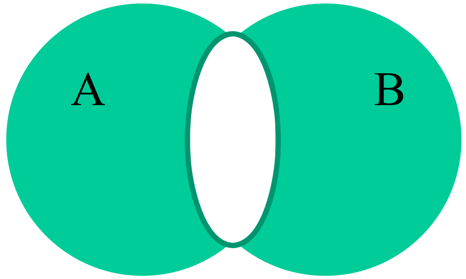
$A \cap B$



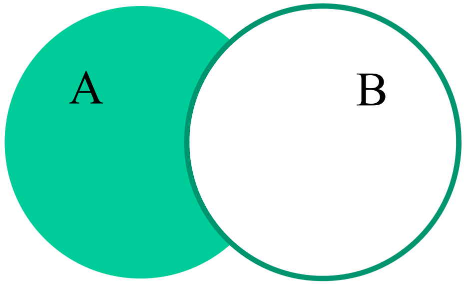
$A \cup B$



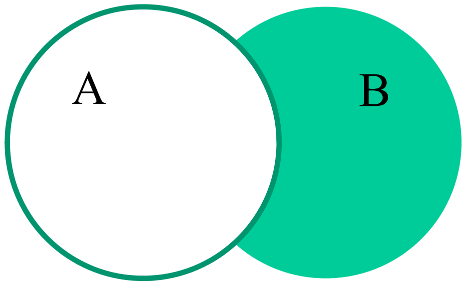
$A \,\Delta\, B$



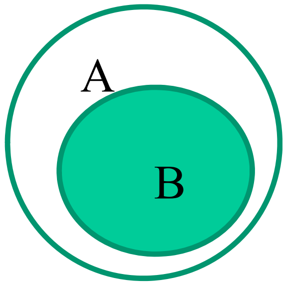
$A \setminus B$



$B \setminus A$



$B \subset A$



Sätze in der Mathematik sind fast immer in de Form $A \Rightarrow B$ oder $A \Leftrightarrow B$ angegeben.

Ziel ist es, diese Aussagen nachzuweisen durch

- vollständiges Probieren in einfachen Fällen mit endlich vielen Möglichkeiten
- oder besser durch die Anwendung von Regeln

Beispiel für die Regelanwendung

$$
\begin{aligned}
A \vee w &\equiv A \vee (A \vee \neg A) && \text{ausgeschlossenes Drittes} \\
&\equiv (A \vee A) \vee \neg A && \text{Assozitivität} \\
&\equiv A \vee \neg A && \text{Idempotenz} \\
&\equiv w && \text{Negation}
\end{aligned}
$$

Zentrale Forderung an ein Regelsystem:

1. **Korrektheit**: es können nur gültige Aussagen durch Ersetzen abgeleitet werden.
2. **Vollständigkeit**: alle gültigen Aussagen können durch Ersetzen hergeleitet werden.

Satz 1.9

Sei $S(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ $S(n) = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Beweis:

Induktionsanfang: $n = 1$ $S(n) = 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$

Induktionsschritt $n \to n + 1$.

Wir nehmen an, dass $S(n) = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ gilt und zeigen,

dass dann $S(n+1) = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$

$$\begin{aligned} S(n+1) &= S(n) + n + 1 \\ &= \frac{n\cdot(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2} \end{aligned}$$

1.3 Natürliche Zahlen

Wir setzen die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ mit den Operationen $+$ und $\cdot$ sowie den Relationen $=$ und $>$ als bekannt voraus und nutzen ferner für alle $n, m \in \mathbb{N}$:

$n \geq m \Leftrightarrow (n > m) \vee (n=m)$, $n < m \Leftrightarrow \neg(n \geq \mathrm{m})$ und $n \leq m \Leftrightarrow \neg(n > m)$

$\mathbb{N}$ mit $=$, $>$ ist vollständig geordnet, d.h. für zwei beliebige n, m gilt $n > m$ oder $n = m$ oder $m > n$.

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ natürliche Zahlen mit 0
(werden in der Literatur manchmal auch mit $\mathbb{N}$ bezeichnet)

Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Aussage $\mathcal{A}(n)$ gilt für alle $n \geq n_0$, falls folgende zwei Schritte bewiesen werden:

1. $\mathcal{A}(n_0)$ ist richtig (Induktionsanfang)
2. Für jedes $n \geq n_0$, für das $\mathcal{A}(n)$ richtig ist, ist auch $\mathcal{A}(n+1)$ richtig (Induktionsschritt)

Einige Operationen und Notationen ($k, n, m \in \mathbb{N}_0$):

- $\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$ falls $m \leq n$
- $\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$ falls $m > n$
- $\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \cdots \cdot a_n$ falls $m \leq n$
- $\prod_{k=m}^{n} a_k = 1$ falls $m > n$
- $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$ für $n \geq 1$ sowie $0! = 1$
- $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \cdots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ für $n \geq k \geq 0$

Falls es sich aus dem Kontext ergibt, lassen wir $\cdot$ für die Multiplikation weg (d.h. $a \cdot b \equiv ab$)

1.4 Ganze und rationale Zahlen

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ lassen sich leicht erweitern

Definition 1.10 (Ganze Zahlen)
Die Menge $\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ heißt die Menge der ganzen Zahlen.

Definition 1.11 (Rationale Zahlen)
Die Menge $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\right\}$ heißt die Menge der rationalen Zahlen.
Man bezeichnet *p* als Zähler und *q* als Nenner.

Einige Rechenregeln für $\mathbb{Q}$:

- $\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$
- $\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$

Für $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Q}$ gilt:

- $a^n = \prod_{k=1}^{n} a$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$
- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
- $(a^n)^m = a^{nm}$

Eine Ordnung auf $\mathbb{Q}$ ist definiert durch

$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} \Leftrightarrow p_1 q_2 < p_2 q_1 \wedge q_1, q_2 > 0$

$q_1, q_2 > 0$ ist keine Einschränkung (überlegen warum)

Rechenregeln für Ungleichungen $a, b, c \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}$:

- $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$
- $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$
- $a < b \Leftrightarrow a\,c < b\,c$ falls $c > 0$
- $a < b \Leftrightarrow a\,c > b\,c$ falls $c < 0$
- $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$ falls $a, b > 0$

(die Regeln können auch für ≤ genutzt werden)

Offensichtlich gilt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

Die Anzahl der Elemente ist in allen 3 Mengen unendlich (dargestellt durch ∞)

Gibt es mehr rationale als natürliche Zahlen?

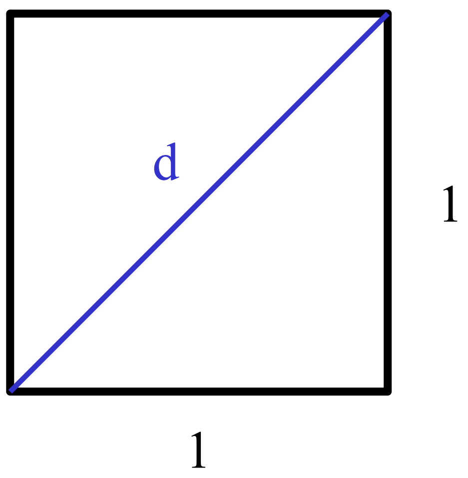
Antwort darauf durch Georg Cantor (1845-1918)

© Wikipedia

$$
\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & \cdots \\
& \swarrow & & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

Alle 3 Mengen sind abzählbar unendlich!

Umfasst die Menge $\mathbb{Q}$ alle Zahlen?
Die Griechen (Pythagoras ca. 570-480 v. Chr.) waren davon überzeugt und glaubten auch, dass es ein $d \in \mathbb{Q}$ gibt, so dass $d^2 = 2$.
(oder anders ausgedrückt $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$)



Offensichtlich gilt $d^2 = 1^2 + 1^2$ (Satz von Pythagoras)

Beweis, dass $d \notin \mathbb{Q}$ (Euklid ca. 300 v. Chr.)
Falls $d \in \mathbb{Q}$ dann $d = \frac{p}{q} \Longrightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$
p und q seien nicht beide gerade Zahlen
(sonst könnte man gemeinsame Faktoren kürzen)

p^2 ist eine gerade Zahl $\Leftrightarrow$ p ist eine gerade Zahl $\Leftrightarrow p = 2r$ $(r \in \mathbb{N})$.

Damit gilt auch $p^2 = 4r^2 = 2q^2 \Longrightarrow 2r^2 = q^2$.

Damit muss auch q eine gerade Zahl sein.
(Widerspruch zur Annahme p, q können damit nicht existieren)