



Wintersemester 2006/07

Fundamente der Computational Intelligence (Vorlesung)

Prof. Dr. Günter Rudolph
Fachbereich Informatik
Lehrstuhl für Algorithm Engineering



Kapitel 2: Fuzzy Systeme



Inhalt

- Fuzzy Mengen ☑
- Fuzzy Relationen ☑
- Fuzzy Logik ☑
- Approximatives Schließen ☑
- Fuzzy Regelung

Fuzzy Regelung



Steuern und Regeln:

Beeinflussung des dynamischen Verhaltens eines Systems
in einer gewünschten Art und Weise

• Steuern

Steuerung kennt Sollgröße und hat ein Modell vom System
⇒ Steuergrößen können eingestellt werden,
so dass System Istgröße erzeugt, die gleich der Sollgröße ist

Problem: Störgrößen! Soll-Ist Abweichung wird nicht erkannt!

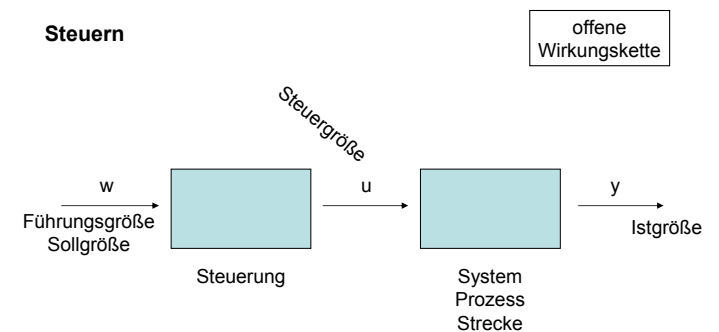
• Regeln

nun: Erkennung der Soll-Ist Abweichung (durch Messung / Sensoren)
und Berücksichtigung bei Bestimmung neuer Steuergrößen

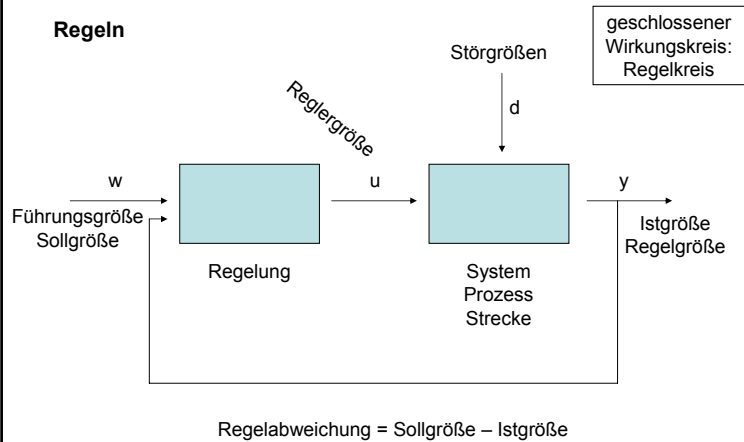
Fuzzy Regelung



Steuern



Annahme: störungsfreier Betrieb ⇒ Sollwert = Istwert



Erforderlich:

Modell der Strecke

→ als Differentialgleichungen oder Differenzgleichungen

→ gut ausgebaute Theorie vorhanden

Weshalb also Fuzzy-Regler?

- es existiert kein Streckenmodell in Form von DGLs etc. (Operator/Mensch hat bisher händisch geregelt)
- Strecke mit hochgradigen Nichtlinearitäten → keine klassischen Verfahren
- Regelziele sind unscharf formuliert („weiches“ Umschalten bei Kfz-Getriebe)



Unschärfe Beschreibung des Regelverhaltens

IF X ist A_1 , THEN Y ist B_1
 IF X ist A_2 , THEN Y ist B_2
 IF X ist A_3 , THEN Y ist B_3
 ...
 IF X ist A_n , THEN Y ist B_n
 X ist A'
 Y ist B'

wie beim approximativem Schließen

Fakt A' ist aber keine Fuzzy-Menge, sondern scharfe Eingabe

→ nämlich die aktuelle Ist-/Regelgröße!

Fuzzy-Regler führt Inferenzschritt aus

→ man erhält Fuzzy-Ausgabemenge $B'(y)$

man benötigt aber scharfen Reglerwert für die Strecke

→ Defuzzifizierung (= Fuzzy-Menge zu scharfem Wert „eindampfen“)



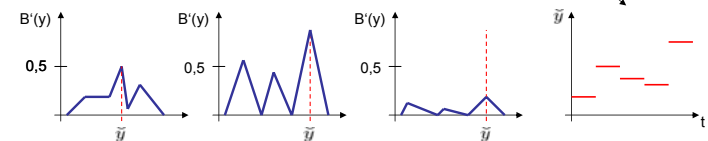
Defuzzifizierung

Def: Regel k aktiv $\Leftrightarrow A_k(x_0) > 0$

Maximummethode

- nur aktive Regel mit höchstem Erfüllungsgrad wird berücksichtigt
 → geeignet für Mustererkennung / Klassifikation
 → Entscheidung für eine Alternative von endlich vielen
- Auswahl unabhängig von Erfüllungsgrad der Regel (0.05 vs. 0.95)
- bei Regelung: unstetiger Ausgangsgrößenverlauf (Sprünge)

$$\tilde{y} = \operatorname{argmax} B'(y)$$



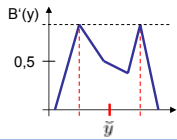
Defuzzifizierung

$$Y^* = \{ y \in Y : B'(y) = \text{hgt}(B') \}$$

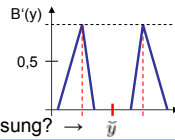
• Maximummittelwertmethode

- alle aktive Regeln mit höchstem Erfüllungsgrad werden berücksichtigt
 - Interpolationen möglich, können aber nicht benutzbar sein
 - wohl nur sinnvoll bei benachbarten Regeln mit max. Erfüllung
- Auswahl unabhängig von Erfüllungsgrad der Regel (0.05 vs. 0.95)
- bei Regelung: unstetiger Ausgangsgrößenverlauf (Sprünge)

$$\tilde{y} = \frac{1}{|Y^*|} \sum_{y^* \in Y^*} y^*$$



Sinnvolle Lösung? → $\tilde{y}$



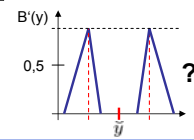
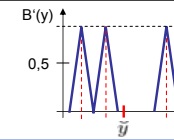
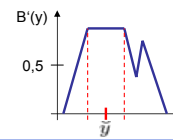
Defuzzifizierung

$$Y^* = \{ y \in Y : B'(y) = \text{hgt}(B') \}$$

• Center-of-maxima-Methode (COM)

- nur **extreme** aktive Regeln mit höchstem Erfüllungsgrad werden berücksichtigt
 - Interpolationen möglich, können aber nicht benutzbar sein
 - wohl nur sinnvoll bei benachbarten Regeln mit max. Erfüllung
- Auswahl unabhängig von Erfüllungsgrad der Regel (0.05 vs. 0.95)
- bei Regelung: unstetiger Ausgangsgrößenverlauf (Sprünge)

$$\tilde{y} = \frac{\inf Y^* + \sup Y^*}{2}$$



Defuzzifizierung

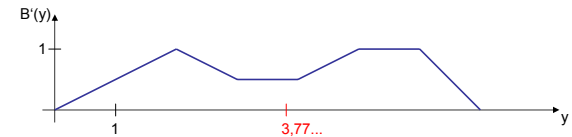
• Schwerpunkt-methode (Center of Gravity, COG)

- alle aktiven Regeln werden berücksichtigt
 - aber numerisch aufwändiggilt heute nur für HW-Lösung
 - Ränder können nicht in Ausgabe erscheinen (∃ work-around)
- bei nur einer aktiven Regel: Auswahl unabh. vom Erfüllungsgrad
- stetige Verläufe der Ausgangsgrößen

$$\tilde{y} = \frac{\int y \cdot B'(y) dy}{\int B'(y) dy}$$

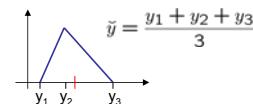
Exkurs: Schwerpunkt

$$\tilde{y} = \frac{\int y \cdot B'(y) dy}{\int B'(y) dy}$$

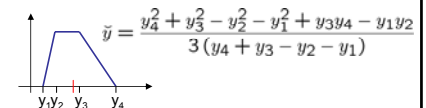


Pendant in
W'keitstheorie:
Erwartungswert

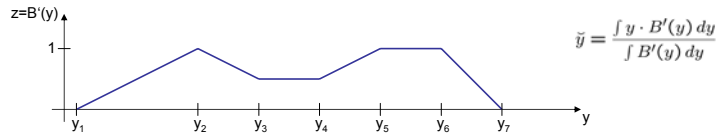
Dreieck:



Trapez:



Fuzzy Regelung: Exkurs Schwerpunkt



Annahme: Fuzzy-Zugehörigkeitsfunktionen stückweise linear

Ergebnismenge $B'(y)$ liegt als Punktsequenz $(y_1, z_1), (y_2, z_2), \dots, (y_n, z_n)$ vor

⇒ Fläche unter $B'(y)$ und gewichtete Fläche stückweise additiv ermitteln

⇒ Geradengleichung $z = m y + b \Rightarrow (y_i, z_i)$ und (y_{i+1}, z_{i+1}) einsetzen

⇒ liefert m und b für jede der $n-1$ linearen Teilstrecken

$$\Rightarrow F_i = \int_{y_i}^{y_{i+1}} (m y + b) dy = \frac{m}{2} (y_{i+1}^2 - y_i^2) + b(y_{i+1} - y_i)$$

$$\Rightarrow G_i = \int_{y_i}^{y_{i+1}} y (m y + b) dy = \frac{m}{3} (y_{i+1}^3 - y_i^3) + \frac{b}{2} (y_{i+1}^2 - y_i^2)$$

$$\tilde{y} = \frac{\sum_i G_i}{\sum_i F_i}$$

Fuzzy Regelung

Defuzzifizierung

- „Flächenmethode“ (Center of Area, COA)

- gedacht als Approximation von COG

- seien $\hat{y}_k$ die Schwerpunkte der Ausgabemengen $B'_k(y)$:

$$\tilde{y} = \frac{\sum_k A_k(x_0) \cdot \hat{y}_k}{\sum_k A_k(x_0)}$$

Fuzzy Regelung

Sind Fuzzy-Regler eine neue Art von Reglern?

Was ist anders bei Fuzzy Reglern?

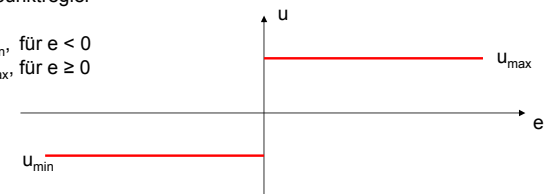
Fuzzy Regelung

Kennfeldregler

- Regelabweichung $e(t) = w(t) - y(t) = \text{Sollwert} - \text{Istwert}$
- für jede mögliche Regelabweichung wird Steuergröße hinterlegt:
 - dargestellt als Kennlinie e vs. u
(bzw. als Kennfeld bei höheren Dimensionen)

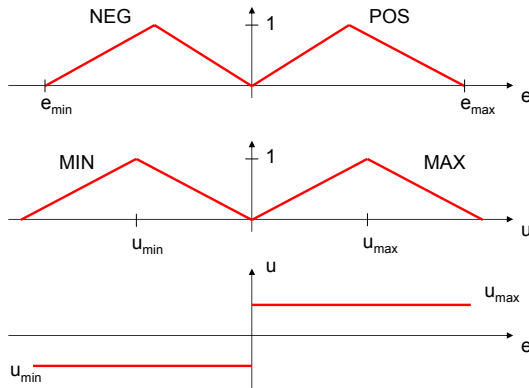
Bsp: Zweipunktregler

$$u = \begin{cases} u_{\min}, & \text{für } e < 0 \\ u_{\max}, & \text{für } e \geq 0 \end{cases}$$



Fuzzy-Version des Zweipunktreglers

IF e=NEG THEN u=MIN
IF e=POS THEN u=MAX



Fazit:

- Fuzzy-Regler stellen keinen neuen Reglertyp dar
- Fuzzy-Regler sind Kennfeldregler
⇒ typischerweise ist Kennfeld stark nichtlinear

Neu:

- Parametrisierung des Reglers:
 - nicht explizit durch Grafik, Formel, Angabe von Steigung / Knickpunkte
 - sondern implizit in linguistischer Form durch
 - Festlegung der Zugehörigkeitsfunktionen für Eingangs- und Stellgrößen
 - Formulierung der Regelbasis
⇒ viele Freiheitsgrade!

Mamdani-Regler:

Benutze $R(x,y) = \min \{ A(x), B(y) \}$, max-Aggregation
Defuzzifizieren von $B'(y)$ mit Schwerpunktmethod
→ ergibt Regler-/Steuergröße u

Larsen-Regler:

Benutze $R(x,y) = A(x) \cdot B(y)$, max-Aggregation
Defuzzifizieren von $B'(y)$ mit Schwerpunktmethod
→ ergibt Regler-/Steuergröße u

TSK-Regler

- Takagi, Sugeno, Kang (ab ca. 1985)
- Keine linguistische Variable für Stellgröße u

IF $e_1 = A_1$ AND $e_2 = A_2$ AND ... AND $e_n = A_n$ THEN
 $u = p_0 + p_1 \cdot e_1 + \dots + p_n \cdot e_n$

- $p_i \in \mathbb{R}$ sind Parameter
- keine Defuzzifizierung i.e.S. mehr
- man erhält von Regel k einen Vorschlag $u^{(k)}$ für Stellgröße u
- Aggregation:

$$u = \frac{\sum_k A^{(k)}(e) \cdot u^{(k)}}{\sum_k A^{(k)}(e)}$$

TSK-Regler

- Beispiel: Auto um die Kurve lenken
- M. Sugeno & M. Nishida (1985):
Fuzzy Control of a Model Car,
in Fuzzy Sets and Systems 16:103-113.

TSK-Regler: Aufgaben

1. Bestimmung der linguistischen Terme für Eingangsgrößen
2. Bestimmung der Zugehörigkeitsfunktionen
3. Bestimmung der $m \cdot (n + 1)$ Parameter bei m Regeln
 ← wenn lineare Funktion

Punkte 1 + 2 wie bisher → wie kommt man an die Parameter?

- numerische Optimierung (z.B. evolutionäre Algorithmen)
- „Lernen“ an Beispielen durch z.B. neuronale Netze
- Identifikation des Verhaltens eines menschlichen Reglers (protokollieren)

⇒ wenn via Optimierung: was wären Gütekriterien?

Güte von Reglern: Integralkriterien

1. quadratische Regelfläche

$$Q = \int_{t=0}^{\infty} e_t^2 dt \rightarrow \min!$$

2. betragslineare Regelfläche

$$Q = \int_{t=0}^{\infty} |e_t| dt \rightarrow \min!$$

3. zeitgewichtete Regelflächen k -ter Ordnung

$$Q = \int_{t=0}^{\infty} t \cdot |e_t|^k dt \rightarrow \min!$$

Güte von Reglern: Kenngrößenkriterien (Beispiele)

1. bleibende Regelabweichung

$$Q = e_B \rightarrow \min!$$

2. Abweichung von vorgegebener Überschwingweite Δh^*

$$Q = |\Delta h - \Delta h^*| \rightarrow \min!$$

Güte von Reglern: Verlaufskriterien

z.B. Abweichung von vorgegebenem Sollverlauf $y^*(t)$

$$Q = \int_{t=0}^{\infty} |y(t) - y^*(t)|^k dt \rightarrow \min!$$



Fuzzy Hyperbolisches Modell (FHM)

Zhang & Quan (2000f.)

Zugehörigkeitsfunktionen:

$$P_z(x) = e^{-\frac{1}{2}(x-k_z)^2} \quad k_z > 0 \text{ positive Konstante}$$

$$N_z(x) = e^{-\frac{1}{2}(x+k_z)^2}$$

Regelbasis:

IF x_1 is $X_1 \wedge \dots \wedge x_n$ is $X_n \wedge u_1$ is $U_1 \wedge \dots \wedge u_p$ is U_p THEN

$$\dot{x}_i = \pm c_{x1} \pm \dots \pm c_{xn} \pm c_{u1} \pm \dots \pm c_{up} \quad c_{..} > 0$$

falls $P > N$ dann $+c_{..}$ sonst $-c_{..}$.

⇒ Bei $m \leq n + p$ unscharfen Eingängen hat $\dot{x}$ bis zu 2^m unscharfe Regeln!



Fuzzy Hyperbolisches Modell (FHM)

Zhang & Quan (2000f.)

Charakteristika:

1. FHM ist nichtlinear.
2. Globales Modell (TSK ist lokales Modell)
3. Kann als neuronales Netz realisiert werden. → Kapitel 4

Bsp. für Regelbasis:

IF x_2 is P_{x2} THEN $\dot{x}_1 = 4$

IF x_2 is N_{x2} THEN $\dot{x}_1 = -4$

IF u is P_u THEN $\dot{x}_2 = 2$

IF u is N_u THEN $\dot{x}_2 = -2$

Parameter aus Erfahrungswissen

oder numerisch optimiert:

1. Mit evolutionären Algorithmen
2. Als neuronales Netz mit Backpropagation