Universität Dortmund

Wintersemester 2006/07

Fundamente der Computational Intelligence

(Vorlesung)

Prof. Dr. Günter Rudolph
Fachbereich Informatik
Lehrstuhl für Algorithm Engineering

Kapitel 2: Fuzzy Systeme

Inhalt

- Fuzzy Mengen ☑
- Fuzzy Relationen ☑
- Fuzzy Logik
- Approximatives Schließen
- …

Fuzzy Logik

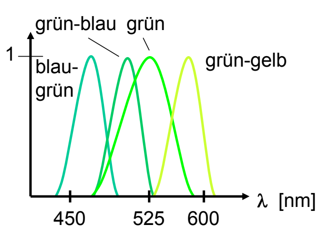
Linguistische Variable:

Sprachlicher Begriff, der verschiedene Werte annehmen kann

Bsp: **Farbe** kann Werte **rot**, **grün**, **blau**, **gelb**, … annehmen

Die Werte (rot, grün, …) heißen **linguistische Terme**

Den linguistischen Termen werden Fuzzy-Mengen zugeordnet



Fuzzy Logik

<u>Unscharfe Aussage (*fuzzy proposition*)</u>

p: *Temperatur* ist *hoch*

Temperatur: Linguistische Variable (LV)

hoch: Linguistischer Term (LT)

- LV kann verschiedene LT zugeordnet werden: *hoch, mittel, tief, …*
- *hohe, mittlere, tiefe* Temperatur sind Fuzzy-Mengen über der scharfen Temperaturskala
- Wahrheitsgrad der unscharfen Aussage „Temperatur ist hoch“ wird für **konkreten scharfen** Temperaturwert v als gleich dem Zugehörigkeitsgrad *hoch*(v) der Fuzzy-Menge *hoch* interpretiert

Unscharfe Aussage (*fuzzy proposition*)

p: *V* ist F

Linguistische Variable (LV)

Linguistischer Term (LT)

schafft Verbindung zwischen Zugehörigkeitsgrad einer Fuzzy-Menge und Wahrheitsgrad einer Aussage

eigentlich steht da:

p: *V* ist F(v)

und

T(p) = F(v) für einen konkreten scharfen Wert v

truth(p)

Unscharfe Aussage (*fuzzy proposition*)

p: IF *Heizung* ist *heiß*, THEN *Energieverbrauch* ist *hoch*

LV LT LV LT

hier wird eine Beziehung / <u>Relation</u> zwischen

a) Temperatur der Heizung und

b) Menge des Energieverbrauches

ausgedrückt:

Relation

p: (*Heizung, Energieverbrauch*) ∈ R

Unscharfe Aussage (*fuzzy proposition*)

p: IF *X* ist A, THEN *Y* ist B

LV LT LV LT

Wie können wir hier den Grad der Wahrheit T(p) angeben?

- Für konkrete scharfe Werte x, y kennen wir A(x) und B(y)
- A(x) und B(y) müssen durch Relation R zu einem Wert verarbeitet werden
- R(x, y) = Funktion(A(x), B(y)) ist Fuzzy-Menge über X × Y
- wie zuvor: interpretiere T(p) als Zugehörigkeitsgrad R(x,y)

Unscharfe Aussage (*fuzzy proposition*)

p: IF *X* ist A, THEN *Y* ist B

A ist Fuzzy-Menge über X

B ist Fuzzy-Menge über Y

R ist Fuzzy-Menge über X × Y

$\forall$ (x,y) ∈ X × Y: R(x, y) = Imp(A(x), B(y))

Was ist Imp(**·**, **·**) ?

⇒ „geeignete“ Fuzzy-Implikation $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$

Annahme: Wir kennen „geeignetes“ Imp(a,b).

Wie berechnet man den Wahrheitsgrad T(p) ?

Beispiel:

Sei Imp(a, b) = min{ 1, 1 – a + b } und gegeben seien Fuzzy-Mengen

A:

x_1	x_2	x_3
0.1	0.8	1.0

B:

y_1	y_2
0.5	1.0

⇒

R	x_1	x_2	x_3
y_1	1.0	0.7	0.5
y_2	1.0	1.0	1.0

z.B.

$R(x_2, y_1) = Imp(A(x_2), B(y_1)) = Imp(0.8, 0.5) = \min\{1.0, 0.7\} = 0.7$

und T(p) für (x_2,y_1) ist $R(x_2, y_1) = 0.7$ ■

Inferenz aus unscharfen Aussagen

- Sei $\forall x, y: y = f(x)$.

  IF X = x THEN Y = f(x)

- IF X ∈ A THEN Y ∈ B = { y ∈ Y: y = f(x), x ∈ A }

Inferenz aus unscharfen Aussagen

- Sei Beziehung zw. x und y eine Relation R auf X × Y

  IF X = x THEN Y ∈ B = { y ∈ Y: (x, y) ∈ R }

- IF X ∈ A THEN Y ∈ B = { y ∈ Y: (x, y) ∈ R, x ∈ A }

Inferenz aus unscharfen Aussagen

IF X ∈ A THEN Y ∈ B = { y ∈ Y: (x, y) ∈ R, x ∈ A }

Auch ausdrückbar über charakt. Fkt. Der Mengen A, B, R:

$\forall y \in Y: B(y) = \sup_{x \in X} \min \{ A(x), R(x, y) \}$

Jetzt: A‘, B‘ unscharfe Mengen über X bzw. Y

Wenn R und A‘ gegeben:

$\forall y \in Y: B'(y) = \sup_{x \in X} \min \{ A'(x), R(x, y) \}$

Kompositionsregel der Inferenz (in Matrixform): **B‘ = A‘ ∘ R**

Inferenz aus unscharfen Aussagen

- klassisch: Modus ponens

$$\begin{array}{l} a \Rightarrow b \\ a \\ \hline b \end{array}$$

- fuzzy: Generalisierter modus ponens (GMP)

$$\begin{array}{l} \text{IF } X \text{ ist A, THEN } Y \text{ ist B} \\ X \text{ ist A'} \\ \hline Y \text{ ist B'} \end{array}$$

Bsp.: IF *Heizung* ist heiß, THEN *Energieverbrauch* ist hoch
Heizung ist warm
____
Energieverbrauch ist normal

Beispiel: GMP

Gegeben sei A:

x_1	x_2	x_3
0.5	1.0	0.6

B:

y_1	y_2
1.0	0.4

mit der Regel: IF *X* is A THEN *Y* ist B

Für den Fakt A':

x_1	x_2	x_3
0.6	0.9	0.7

⇒

R	x_1	x_2	x_3
y_1	1.0	1.0	1.0
y_2	0.9	0.4	0.8

mit Imp(a,b) = min{1, 1-a+b }

Also: A' ∘ R = B'

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.9 & 0.7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1.0 & 0.9 \\ 1.0 & 0.4 \\ 1.0 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.7 \end{pmatrix}$$

mit max-min-Komposition ■

Inferenz aus unscharfen Aussagen

- klassisch: Modus trollens

$$\begin{array}{l} a \Rightarrow b \\ \bar{b} \\ \hline \bar{a} \end{array}$$

- fuzzy: Generalisierter modus ponens (GMP)

$$\begin{array}{l} \text{IF } X \text{ ist A, THEN } Y \text{ ist B} \\ Y \text{ ist B'} \\ \hline X \text{ ist A'} \end{array}$$

Bsp.: IF *Heizung* ist heiß, THEN *Energieverbrauch* ist hoch
Energieverbrauch ist normal
____
Heizung ist warm

Beispiel: GMT

Gegeben sei A:

x_1	x_2	x_3
0.5	1.0	0.6

B:

y_1	y_2
1.0	0.4

mit der Regel: IF *X* is A THEN *Y* ist B

Für den Fakt B':

y_1	y_2
0.9	0.7

⇒

R	x_1	x_2	x_3
y_1	1.0	1.0	1.0
y_2	0.9	0.4	0.8

mit Imp(a,b) = min{1, 1-a+b }

Also: B' ∘ R^{-1} = A'

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.9 & 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{pmatrix}$$

mit max-min-Komposition ■

Fuzzy Logik

Inferenz aus unscharfen Aussagen

- klassisch:
  Hypothetischer Syllogismus

$$\begin{array}{l} a \Rightarrow b \\ b \Rightarrow c \\ \hline a \Rightarrow c \end{array}$$

- fuzzy:
  Generalisierter HS

$$\begin{array}{l} \text{IF } X \text{ ist A, THEN } Y \text{ ist B} \\ \text{IF } Y \text{ ist B, THEN } Z \text{ ist C} \\ \hline \text{IF X ist A, THEN Z ist C} \end{array}$$

Bsp.: IF *Heizung* ist heiß, THEN *Energieverbrauch* ist hoch
IF *Energieverbrauch* ist hoch, THEN *Lebensunterhalt* ist teuer
———
IF *Heizung* ist heiß, THEN *Lebensunterhalt* ist teuer

Fuzzy Logik

Beispiel: GHS

Fuzzy-Mengen A(x), B(x), C(x) sind gegeben.

$\Rightarrow$ daraus lassen sich die 3 Relationen
$R_1(x,y) = Imp(A(x),B(y))$
$R_2(y,z) = Imp(B(y),C(z))$
$R_3(x,z) = Imp(A(x),C(z))$
berechnen und als Matrizen R_1, R_2, R_3 angeben.

Wir sagen:
Der GHS gilt, wenn $R_1 \circ R_2 = R_3$

Fuzzy Logik

Also: Was macht Sinn für Imp(·,·) ?

Imp(a,b) soll unscharfe Version der Implikation ($a \Rightarrow b$) ausdrücken

Klassisch: $a \Rightarrow b$ identisch zu $\bar{a} \vee b$

Wie lassen sich unscharfe boolesche Ausdrücke berechnen?

Forderung: Für $a,b \in \{ 0, 1 \}$ kompatibel zur scharfen Version (und mehr).

a	b	$a \wedge b$	t(a,b)
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

a	b	$a \vee b$	s(a,b)
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

a	$\bar{a}$	c(a)
0	1	1
1	0	0

Fuzzy Logik

Also: Was macht Sinn für Imp(·,·) ?

1. Ansatz: S-Implikationen

Klassisch: $a \Rightarrow b$ identisch zu $\bar{a} \vee b$

Fuzzy: Imp(a, b) = s(c(a), b)

2. Ansatz: R-Implikationen

Klassisch: $a \Rightarrow b$ identisch zu $\max\{ x \in \mathbb{B} : a \wedge x \leq b \}$

Fuzzy: $Imp(a, b) = \max\{ x \in [0,1] : t(a, x) \leq b \}$

3. Ansatz: QL-Implikationen

Klassisch: $a \Rightarrow b$ identisch zu $\bar{a} \vee b \equiv \bar{a} \vee (a \wedge b)$ wg. Absorptionsgesetz

Fuzzy: Imp(a, b) = s(c(a), t(a, b)) (duale Tripel ?)

Beispiele: S-Implikationen $Imp(a, b) = s(c_s(a), b)$

1. Kleene-Dienes-Implikation

   $s(a, b) = \max\{ a, b \}$ (Std.) $Imp(a,b) = \max\{ 1-a, b \}$

2. Reichenbach-Implikation

   $s(a, b) = a + b – ab$ (alg. S.) $Imp(a, b) = 1 – a + ab$

3. Lukasiewicz-Implikation

   $s(a, b) = \min\{ 1, a + b \}$ (beschr. S.) $Imp(a, b) = \min\{ 1, 1 – a + b \}$

Beispiele: R-Implikationen $Imp(a, b) = \max\{ x \in [0,1] : t(a, x) \le b \}$

1. Gödel-Implikation

   $t(a, b) = \min\{ a, b \}$ (Std.) $Imp(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{, für } a \le b \\ b & \text{, sonst} \end{cases}$

2. Goguen-Implikation

   $t(a, b) = ab$ (alg. P.) $Imp(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{, für } a \le b \\ \frac{b}{a} & \text{, sonst} \end{cases}$

3. Lukasiewicz-Implikation

   $t(a, b) = \max\{ 0, a + b – 1 \}$ (beschr. D.) $Imp(a, b) = \min\{ 1, 1 – a + b \}$

Beispiele: QL-Implikationen $Imp(a, b) = s(c(a), t(a, b))$

1. Zadeh-Implikation

   $t(a, b) = \min \{ a, b \}$ (Std.) $Imp(a, b) = \max\{ 1 – a, \min\{a, b\} \}$
   $s(a,b) = \max\{ a, b \}$ (Std.)

2. „NN"-Implikation ☺ (Klir/Yuan 1994)

   $t(a, b) = ab$ (alg. P.) $Imp(a, b) = 1 – a + a^2b$
   $s(a,b) = a + b – ab$ (alg. S.)

3. Kleene-Dienes-Implikation

   $t(a, b) = \max\{ 0, a + b – 1 \}$ (beschr. D.) $Imp(a, b) = \max\{ 1-a, b \}$
   $s(a,b) = \min \{ 1, a + b)$ (beschr. S.)

Axiome für unscharfe Implikationen

1. $a \le b$ impliziert $Imp(a, x) \ge Imp(b, x)$ Monotonie im 1. Argument
2. $a \le b$ impliziert $Imp(x, a) \le Imp(x, b)$ Monotonie im 2. Argument
3. $Imp(0, a) = 1$ Dominanz der Unrichtigkeit
4. $Imp(1, b) = b$ Neutralität der Richtigkeit
5. $Imp(a, a) = 1$ Identität
6. $Imp(a, Imp(b, x)) = Imp(b, Imp(a, x))$ Austausch-Eigenschaft
7. $Imp(a, b) = 1$ gdw. $a \le b$ Randbedingung
8. $Imp(a, b) = Imp(c(b), c(a))$ Kontraposition
9. $Imp(\cdot, \cdot)$ ist stetig Stetigkeit

Charakterisierung der unscharfen Implikationen

Satz:
Imp: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ erfüllt Axiome 1-9 für unscharfe Implikationen für ein gewisses unscharfes Komplement $c(\cdot)$ $\Leftrightarrow$

$\exists$ str. m. w., stetige Fkt. F: $[0,1] \rightarrow [0, \infty)$ mit

- $f(0) = 0$
- $\forall a, b \in [0,1]$: $\text{Imp}(a, b) = f^{(-1)}(\, f(1) - f(a) + f(b)\,)$
- $\forall a \in [0,1]$: $c(a) = f^{-1}(\, f(1) - f(a)\,)$

Beweis: Smets & Magrez (1987). ■

Beispiele: (Übung)

Auswahl einer „geeigneten“ unscharfen Implikation

Zitat: (Klir & Yuan 1995, S. 312)

„To select an appropriate fuzzy implication for approximate reasoning under each particular situation is a difficult problem.“

Richtschnur:
GMP, GMT, GHS sollten mit MP, MT, HS kompatibel sein für unscharfe Implikation bei Berechnung von Relationen:
$B(y) = \sup \{\, t(\, A(x), \text{Imp}(\, A(x), B(y)\,)\,) : x \in \mathcal{X} \}$

Beispiel:
Gödel-Imp. für t = beschr. Diff.