Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 11
Prof. Dr. Petra Mutzel
Dipl.-Inf. Till Schäfer

Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen
Sommersemester 2013

Übungsblatt 12
Besprechungszeit:
08.-12.07.2013
KW28

Bitte beachten Sie die Hinweise zu den Übungen und der Übungsgruppenverteilung auf der Homepage der Übung.

Die (freiwilligen) schriftlichen Lösungen können Sie einfach in Ihrer Übungsgruppe abgeben (gerne auch als Gruppenabgaben).

Aufgabe 12.1 – Wiederholung

- Wie ist das Max-Cut und das Min-Cut Problem definiert? In welcher Komplexitätsklasse liegen die beiden Probleme?
- Welche randomisierten Algorithmen zu Min-Cut und Max-Cut haben Sie in der Vorlesung kennen gelernt.
- Welche Laufzeiten und Gütegarantien wurden für diese Algorithmen gezeigt?
- Was versteht man unter dem Begriff *Probability Amplification*?

Aufgabe 12.2 – Greedy-Algorithmus für Max-Cut

Wie in der Vorlesung definieren wir für einen ungerichteten Graph $G = (V, E)$ für Teilmengen $V_1, V_2 \subseteq V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, den Wert des Schnitts zwischen V_1 und V_2 als $w(V_1, V_2) := \sum_{e \in E : |e \cap V_1| = |e \cap V_2| = 1} w(e)$. Für das Max-Cut Problem sei der folgende deterministische Greedy-Algorithmus für $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$ und Kantengewichten $w : E \to \mathbb{N}$ gegeben:

1. $V_1 := \emptyset, V_2 := \emptyset$
2. Für $i = 1, \ldots, n$:
   Falls $w(V_1 \cup \{i\}, V_2) \geq w(V_1, V_2 \cup \{i\})$ setze $V_1 := V_1 \cup i$ sonst $V_2 := V_2 \cup i$
3. gib V_1, V_2 als Schnitt aus

Beweisen Sie, dass der Algorithmus eine Approximationsgüte von 2 hat.

Aufgabe 12.3 – 3-Färbung

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$, eine Menge von Farben $F = \{F_1, F_2, F_3\}$ und eine Funktion $f : V \to F$, welche jedem Knoten genau eine der drei Farben zuordnet. Als zusätzliche Einschränkung gilt, dass Knoten, welche durch eine Kante miteinander verbunden sind, nicht die gleiche Farbe erhalten dürfen:

$$\forall e = (v, w) \in E : f(v) \neq f(w) \tag{1}$$

Wenn eine Funktion f für einen Graphen G existiert, so dass (1) erfüllt wurde, dann ist G 3-färbbar. Das Entscheidungsproblem, ob ein Graph 3-färbbar ist, ist NP-vollständig.

Betrachten Sie das dazugehörige Optimierungsproblem, bei dem die Kardinalität der Kantenmenge, welche die Ungleichung (1) erfüllt, maximiert werden soll. Entwerfen Sie einen randomisierten Approximationsalgorithmus für das Optimierungsproblem und analysieren Sie die Laufzeit und die Güte.

Aufgabe 12.4 – Max-k-SAT

Formulieren Sie die folgende Max-k-SAT-Instanz (mit $k = 3$, $m = 4$, $n = 4$) als lineares Programm:

$$x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$$
$$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4$$
$$x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4$$
$$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4$$