Seminar

Testfunktionen

Das Ziel der Testfunktionen ist , die Verfahren, die für ein gegebenes Problem eine Lösung (f(x) Zielfunktion) suchen, zu bewerten. Dabei untersucht man diese Verfahren mit Hilfe von Testfunktionen nach bestimmten Kriterien und will rausfinden bei welchen Schwierigkeiten sie scheitern oder gut abschneiden.

Wir können gerade erwähnten Kriterien so aufzählen

- Modalität
- Konvexität
- Stetigkeit
- Differenzierbarkeit
- Symmetrie
- Dekomponierbarkeit

Viele Testprobleme sind skalierbar, d.h. die Dimensionen des Suchraumes Kann beliebig groß gewählt werden.

Definition 1

Es seien eine abgeschlossene Menge $X \subset IR^n$ und eine Funktion $f : X \rightarrow IR$ gegeben. Das darin bestehende Problem, einen Punkt $x \in X$ zu finden, so dass $\forall y \in X$ gilt $f(x) \leq f(y)$, wird Optimierungsproblem definiert durch (f; X) genannt. Als Notation werden wir P(f; X) benutzen.

Definition 2

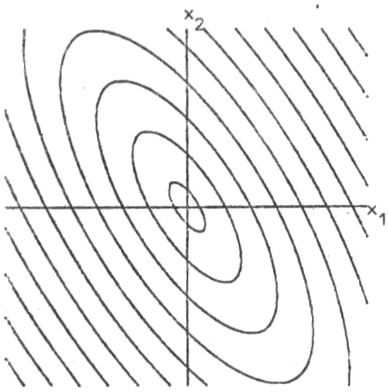
Eine lokale Lösung (lokaler Minimalpunkt) des Optimierungsproblems P(f; X) ist ein zulässiger Punkt x (das heißt $x \in X$), so dass eine offene Menge $U \subset IR^n$ existiert mit der folgenden Eigenschaft:

für alle $y \in X \cap U$ gilt die Ungleichung $f(x) \leq f(y)$. Falls diese Ungleichung strikt in der Umgebung gilt, wird von einer strikten Lösung (oder strikter lokaler Minimalpunkt) gesprochen. Kann der ganze Raum IR^n als Umgebung genommen werden, dann haben wir einen globalen Minimalpunkt.

Zielfunktion: $F(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} x_j \right)^2$ für $n=5$

Minimum: $x_i^* = 0$ für $i = 1(1)n$; $F(x^*) = 0$

Start: $x_i^{(0)} = 10$ für $i = 1(1)n$; $F(x^{(0)}) = 5500$ für $n = 5$



Höhenlinienbild zu Problem 2.9

für n=2

$-10 \leq x_i \leq 10$ für $i=1,2$

$F(x) = /4,36,100,196,324,484,676,$

$900,1156,1444/$

Definition 3

Sei $M := \{ \underline{x} \in R^n \mid g_i(\underline{x}) \leq 0, i = 1(1)m\}$ der zulässigen bereich von Definition2. Dann heißen die Funktionen g_i die Restriktionen oder die Nebenbedingungen. Eine Nebenbedingung gi heißt in einem Punkt $\underline{x} \in IR^n$

a) erfüllt, falls $g_i(\underline{x}) \leq 0$.
b) aktiv, falls $g_i(\underline{x}) = 0$.
c) Inaktiv, falls $g_i(\underline{x}) < 0$.
d) Verletzt, falls $g_i(\underline{x}) > 0$.

Gilt für den zulässigen Bereich $M := R^n$, so heißt das globale Optimierungsproblem frei oder unrestringiert, sonst restringiert.

Nebenbedingungen stellen zusätzliche Beschränkungen des Lösungsraums dar.

Finden einer optimalen Lösung, die den Nebenbedingungen gehorcht

Man unterscheidet oft:

1. harte Nebenbedingungen, die auf jeden Fall erfüllt sein müssen

2. weiche Nebenbedingungen, die nicht zwingend erfüllt sein müssen, aber falls möglich erfüllt werden sollten

Fall 2. wird meist dadurch behandelt, dass

• die Verletzung der Nebenbedingungen bewertet wird

• auf Basis der entstehenden mehrdimensionalen Bewertung das Problem gelöst wird

Bedeutung von Nebenbedingungen ist problemabhängig

• Erfüllungsproblem, Hauptschwierigkeit ist das Finden gültiger Lösungen

• einfache Nebenbedingungen lassen sich durch Einschränkung des Suchraums behandeln

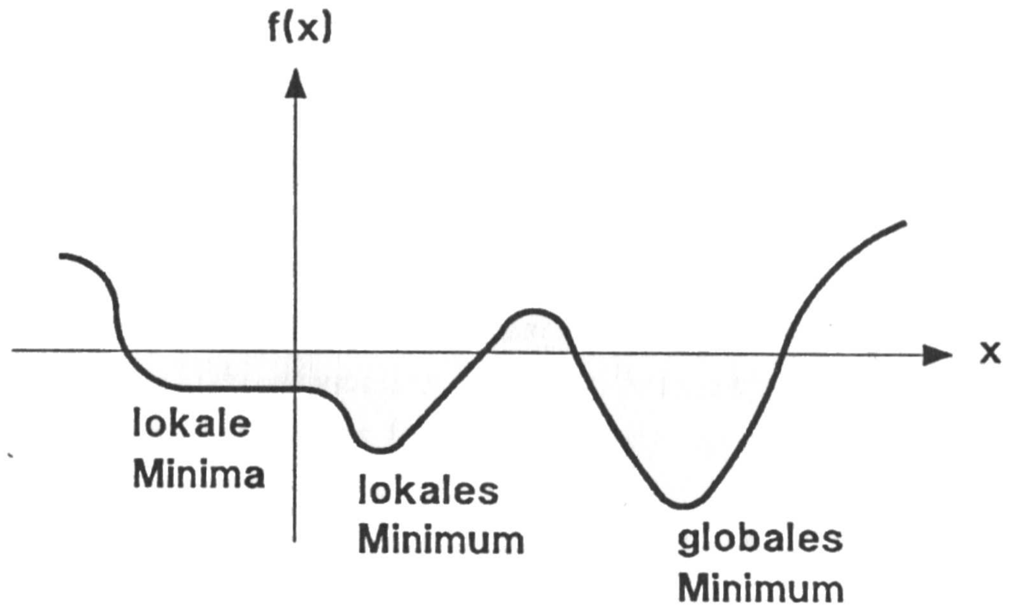
Definition 4

Wir sagen ,dass die Gütefunktionen f(x) an der Stelle x* ein lokales Minimum aufweist, wenn $f(x^*) \leq f(x)$ für alle zulässigen x aus einer genügend kleinen Umgebung um x*. Gilt unter den gleichen Bedingungen $f(x^*) \leq f(x)$, so handelt es sich um ein striktes lokales Minimum.

Die Gütefunktion f(x) weist an der Stelle **x*** ein globales Minimum auf, wenn

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in X.$$

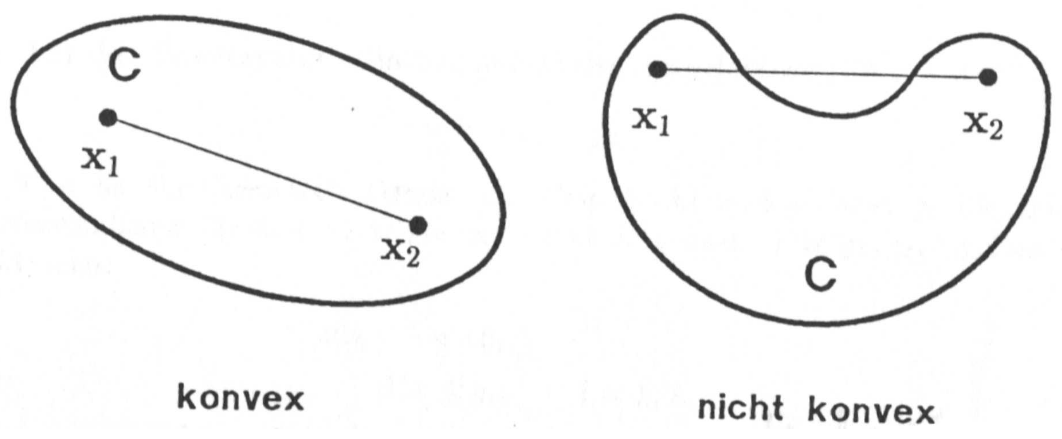
Gilt es als strikte Ungleichung für alle $x \in X - \{x^*\}$, so handelt es sich um ein eindeutiges globales Minimum



Konvexität spielt eine wichtige Rolle bei der Bestimmung der Optimalitätsbedingungen für ein globales Minimum.

Definition 5

Eine Menge $C \subset R^n$ heißt konvex, wenn die Verbindungsgerade, die zwei beliebige Punkte der Menge miteinander verbindet, ebenso in der Menge C liegt.



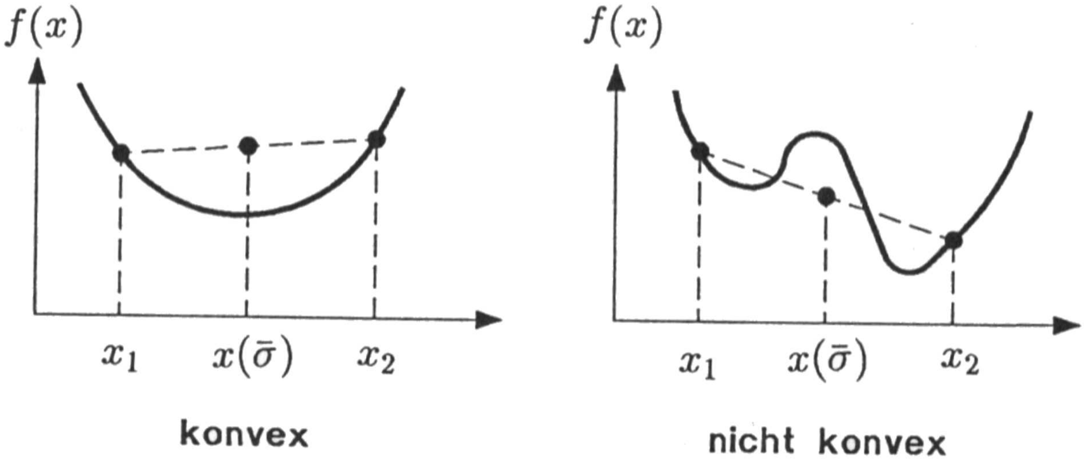
Definition 6

Eine stetige Funktion f(x), $x \in C$, mit C konvex, heißt konvex, wenn für jedes beliebige Punktepaar $x1, x2 \in C$ folgendes gilt

$$f[x(\sigma)] \leq \sigma f(x1) + (1-\sigma) f(x2) \qquad \forall \sigma \in [0,1]$$

wobei $x(\sigma)$ wie bei Definition 5 definiert ist. Da C konvex vorausgesetzt wurde, gilt $x(\sigma) \in C$. Gilt Definition 5 als strikte Ungleichung für alle $\sigma \in [0,1]$, so heißt die Funktion strikt konvex .

Eine Funktion f(x) heißt konkav oder strikt konkav, wenn die Funktion –f(x) konvex oder strikt konvex ist.



Definition 7

Einen Sonderfall bilden die sogenannten unimodalen Funktionen, die ein einziges globales Minimum im zulässigen Bereich aufweisen. Die nicht unimodalen Funktionen sind dann multimodal .

Konvexe Optimierungsprobleme

Ein Optimierungsproblem heißt konvex, wenn der zulässige Bereich X eine konvexe Menge und die Gütefunktion f(x) eine konvexe Funktion auf X sind. Ist die Gütefunktion f(x) sogar strikt konvex, so heißt das Optimierungsproblem strikt konvex. Die Bedeutung konvexer Optimierungsprobleme beruht auf folgende Eigenschaften:

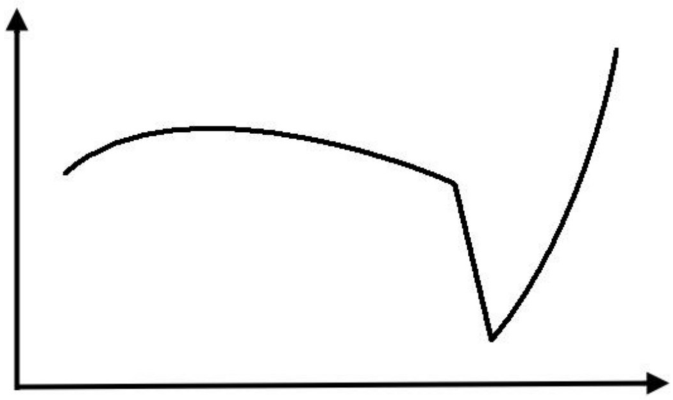
Bei einem konvexen Optimierungsproblem ist jedes lokale Minimum ein globales Minimum und die Menge der globalen Minima ist konvex.

Bei einem strikt konvexen Optimierungsproblem ist ein lokales Minimum das eindeutige globale Minimum. Für konvexe Optimierungsprobleme, die mittels konvexer, stetig differenzierbarer Funktionen f(x), c(x), h(x) definiert sind, die die Qualifikationsbedingungen

1. Ordnung notwendige und hinreihende Bedingungen für ein globales Minimum

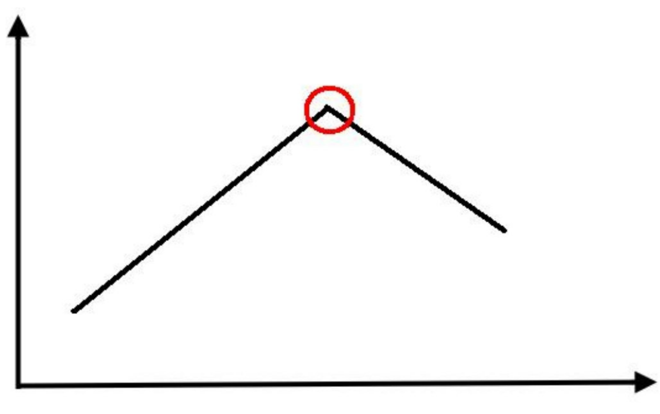
Definition 8

Wenn einen Funktion keine sprunghafte Änderungen enthält, reden wir dann von einer stetigen Funktion.



Differenzierbarkeit:

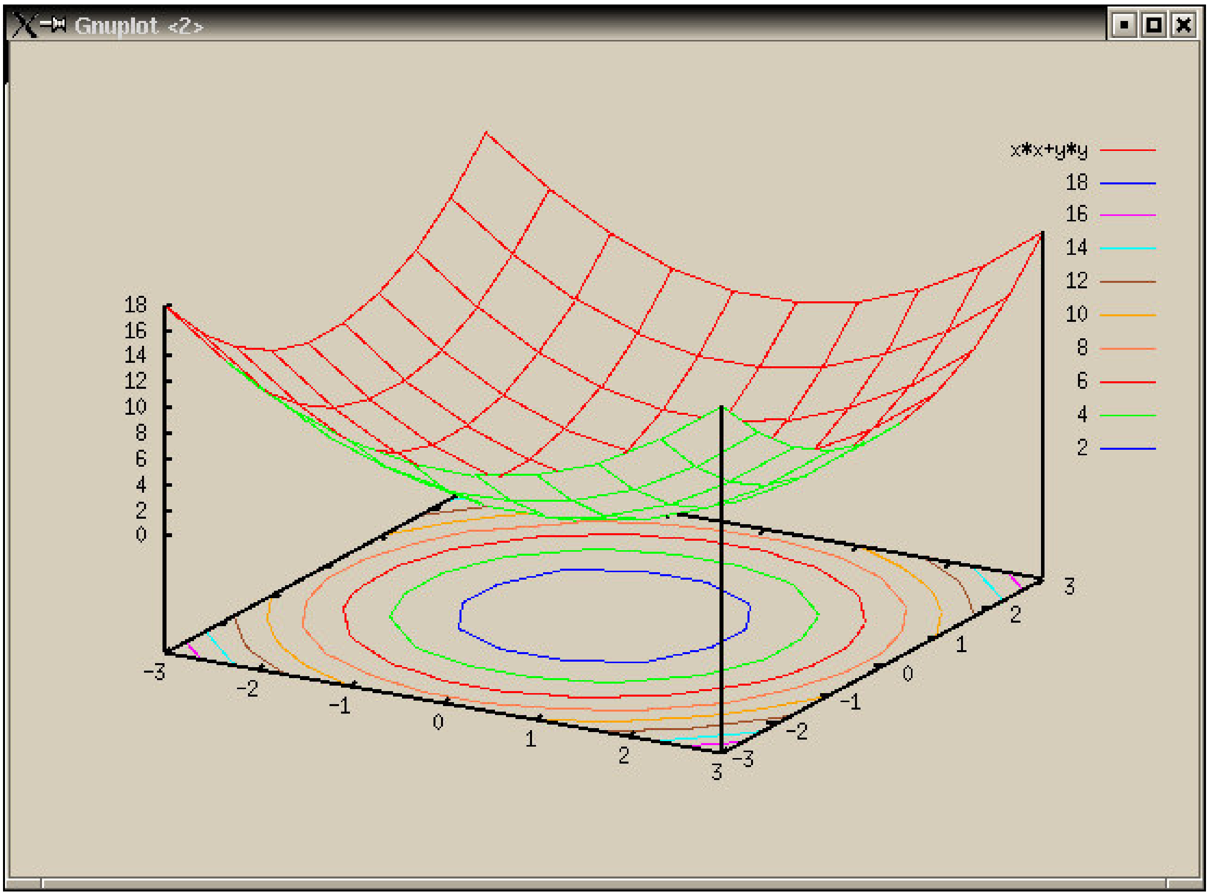
Eine differenzierbare Funktion zeichnet sich dadurch aus, dass ihr Graph keinen "Knick" aufweist.



Quadratische Summe (Kugelform)

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad x \in IR \qquad x \in [-10, 10]$$

$$x^* = 0 \qquad f(x^*) = 0$$



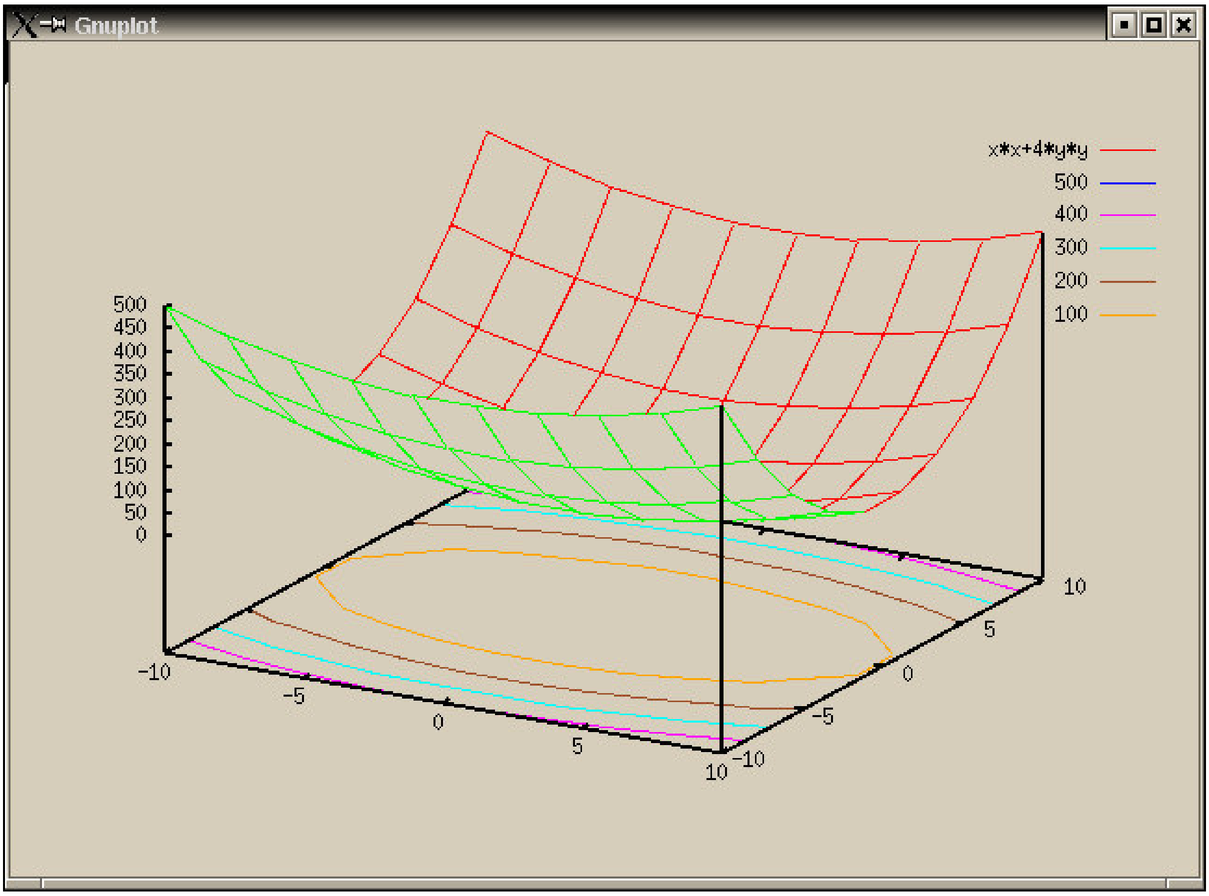
Die Funktion ist

- Skalierbar
- Konvex
- Unimodal
- Differenzierbar
- Stetig
- Symmetrisch
- Dekomponierbar

Daraus kann man sagen, dass es ein leichtes Optimierproblem ist.

Skaliertes Kugelproblem

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} i^2 x_i^2$$

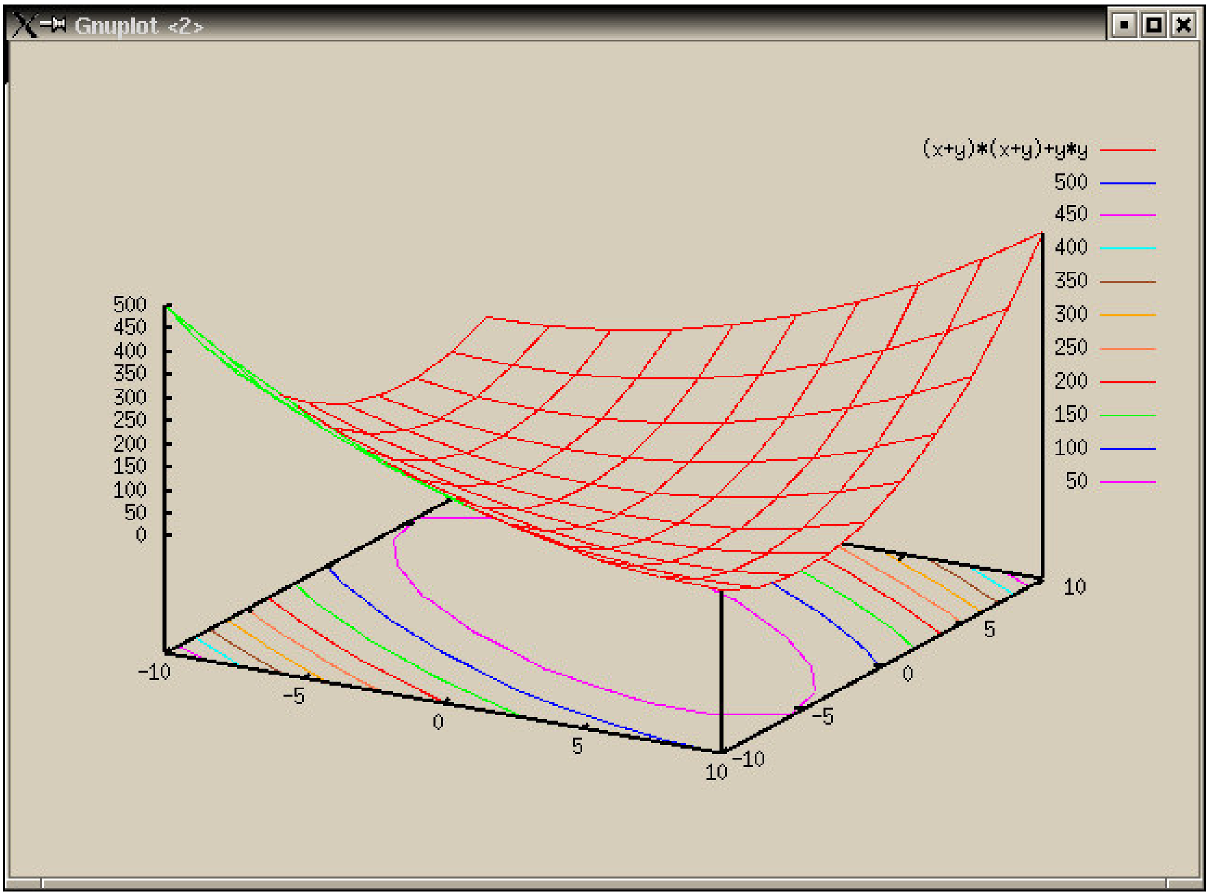


- Unterschiedlich starker Einfluss der Variablen bezüglich der Zielfunktion
- Nicht punktsymmetrisch aber achsensymmetrisch
- Skalierbar
- Konvex
- Unimodal
- Differenzierbar
- Stetig
- Dekomponierbar

Nicht so ein leichtes Optimierproblem

Schwefels Problem

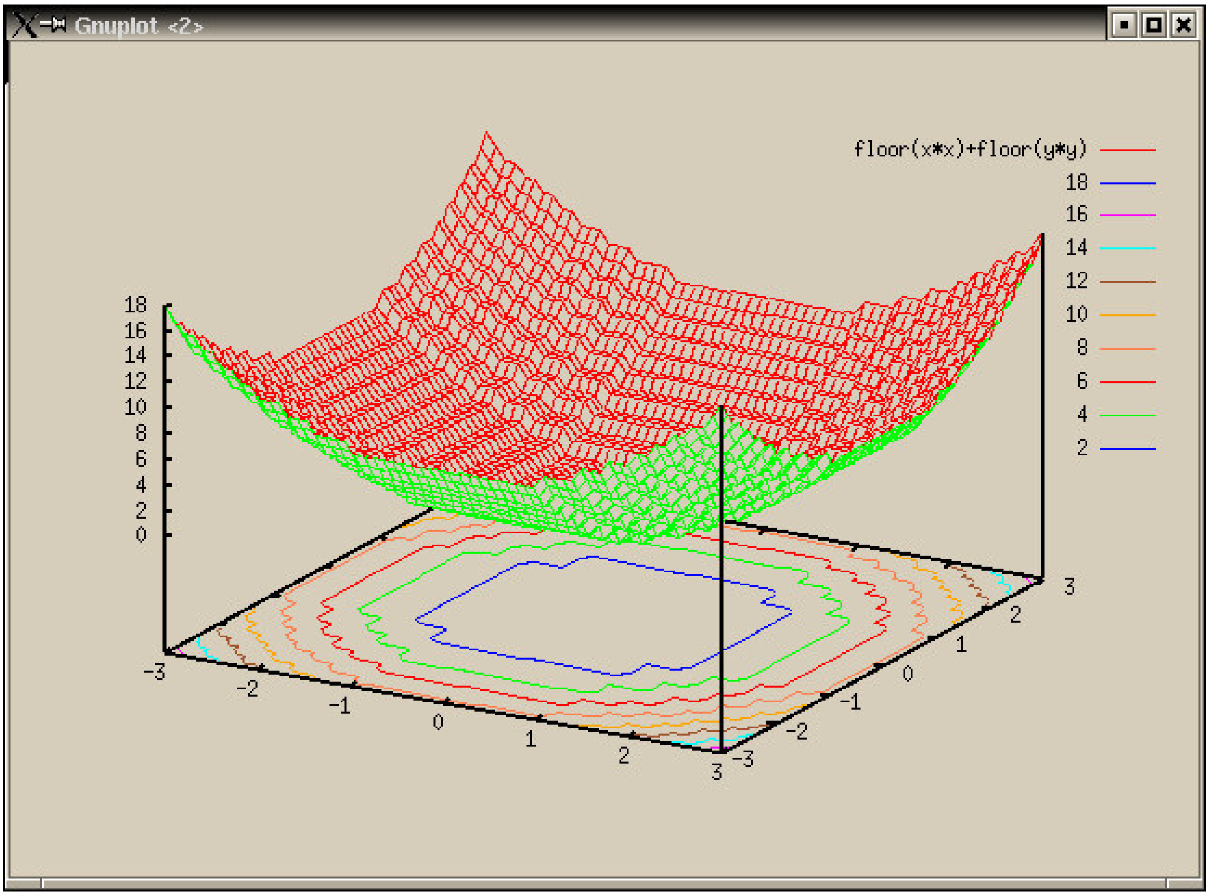
$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} x_i \right)^2$$



- Nicht dekomponierbar
- Nicht punktsymmetrisch
- Skalierbar
- Konvex
- Unimodal
- Differenzierbar
- Stetig

Treppen Funktion

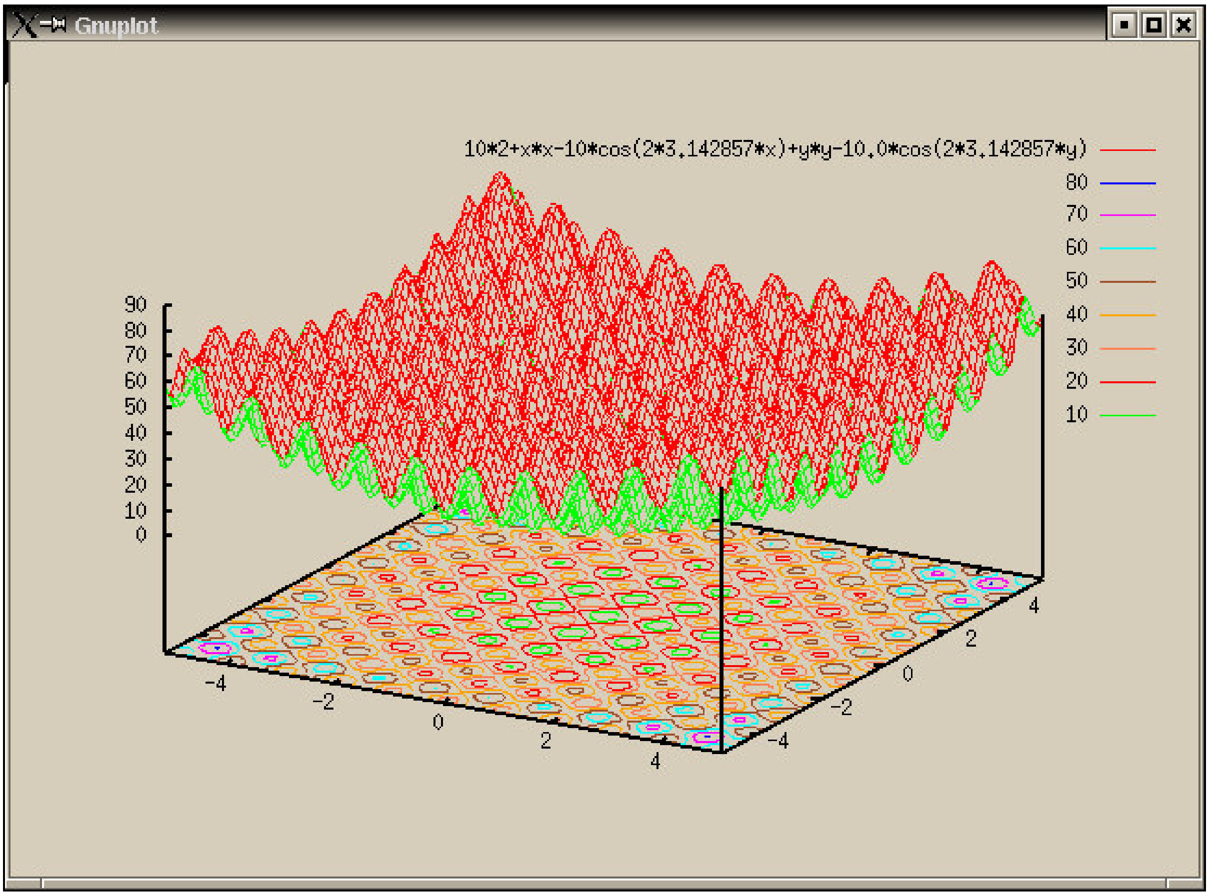
$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lfloor x_i^2 \rfloor$$



- Nicht stetig
- Nicht differenzierbar
- Nicht konvex
- Plateu enthält alle optimalen Werte d.h. nicht unimodal nicht multi modal es gibt kein lokales Minimum aber mehrere globale Minimums auf der gleichen Ebene

Rastrigen Funktion

$$f(x) = 10.\, n + \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 10 \, . \cos (2.\, Pi \, . \, x_i))$$



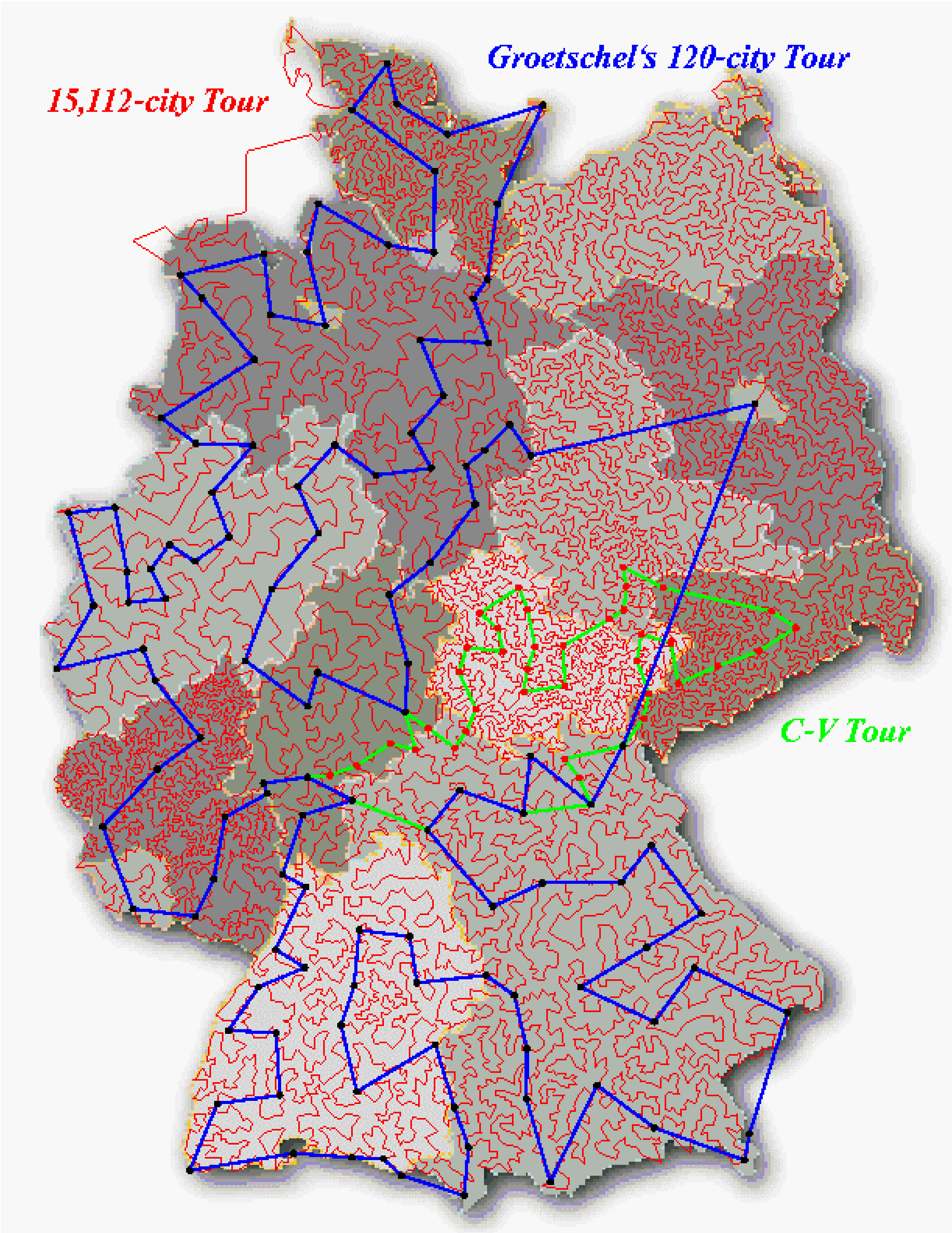
- Multimodal
- Nicht konvex
- Stetig
- Differenzierbar
- Dekomponierbar

Es ist ein sehr schwieriges Problem und für viele Optimierungsverfahren unlösbar.

Traveling salesman problem

Das Traveling salesman problem wurde zum ersten Mal im 1800s vom irischen Mathematiker Sir Willam Rowan Hamilton und vom britischen Mathematiker Thomas Penyngton Kirkman behandelt. Sie haben dann ein Spiel entwickelt, das Spieler erfordert, Touren durch die 20 Punkte mit nur den spezifizierten Anschlüssen durchzuführen.

Das Traveling salesman problem oder **TSP** ist dieses: eine begrenzte Anzahl von "Städte" zusammen mit den Kosten des Spielraums zwischen jedem Paar von ihnen gegeben, finden Sie die preiswerteste Weise des Besichtigens aller Städte und des Zurückbringens zu Ihrem Ausgangspunkt.


15,112-city Tour
Groetschel's 120-city Tour
C-V Tour

Literaturverzeichnis

- Hans-Paul Schwefel
  Evolutionsstrategie und numerische Optimierung

- Karsten Weicker
  Evolutionäre Algorithmen, Teubner Verlag

- Prof. Dr. M. Kolonko, O. Engelhardt-Funke
  Mathematische Optimierung in der Praxis

- Walter Gomez Bofill
  Über parametrische Optimierungsprobleme (spezielle Einbettungen)
  Dissertation, 1998

- Günter Rudolph
  Globale Optimierung mit parallelen Evolutionsstrategien
  Diplomarbeit, Juli 1990

- http://www.math.princeton.edu/tsp/index.html