Ex 3.1. Es existiert eine Punktmenge (genauer: eine Familie von Punktmengen) der Größe n in $\mathbb{R}^1$, so dass jede s-WSPD auf P ~~mind~~ Gewicht ~~mindestens~~ $\Omega(n^2)$ hat. $(s=4)$, d.h. $\sum_{\{A,B\}\in WSPD} |A|+|B| = \Omega(n^2)$

Lösung: Wir geben eine Konstruktion für beliebiges $s>1$.

Sei $P = \{p_1, .., p_n\}$ mit $p_j := \sum_{i=1}^{j} (2s+2)^i$

Beobachtung: Ein well-separated pair $\{A,B\}$ mit $p_i \in A$ und $p_j \in B$ und $i<j$ kann keinen weiteren Punkt in B enthalten.

Beweis durch Widerspruch: Angenommen B enthält mindestens zwei Punkte p_j, p_k mit $i<j<k$ (Die Rollen von j und k können auch getauscht werden).

Es muss gelten:

$$p_j - p_i \geq d(A,B) \geq s \cdot \text{radius}(B) \geq s \cdot \frac{p_k - p_j}{2}$$

Es gilt $p_j - p_i \leq p_j \leq p_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} (2s+2)^i = \frac{(2s+2)^k - 1}{2s+2-1} \leq \frac{(2s+2)^k}{2s+1}$

und $s \frac{p_k - p_j}{2} \geq s \cdot \frac{p_k - p_{k-1}}{2} = s \cdot \frac{(2s+2)^k}{2}$

$$\Rightarrow \frac{(2s+2)^k}{2s+1} \geq \frac{s}{2}(2s+2)^k \Rightarrow 1 \geq s^2 + s/2.$$ Dies widerspricht $s > 1$ ↯

Hieraus können wir schließen, dass in einem well-separated pair, ~~die Menge~~ das p_n enthält, p_n einzeln in B (oder A) sein muss. ~~Dan~~ Das Gewicht der WSP, die p_n enthalten, ist mindestens n. In den verbleibenden WSP ist p_{n-1} immer einzeln und die entsprechenden Paare haben Gewicht $n-1$. Induktiv können wir folgern, dass das Gesamtgewicht mindestens $\sum_{i=1}^{n} i = \Omega(n^2)$ ist.