Aufgabe 2.1. Entwickeln Sie einen Algorithmus, der in erwartet~~en~~ $O(n \frac{n}{k})$ Zeit eine 2-Approximation für k-enclosing disk berechnet.

(1) Für jeden Punkt p der Eingabe P:
Füge p mit Wahrscheinlichkeit $1/k$

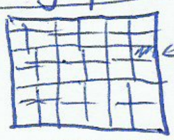
(2) $\forall q \in C$: Berechne smallest k-enclosing disk mit q als Mittelpunkt (in $O(n)$ Zeit pro q mit Selection / Median-finding)

Erwartete Laufzeit: $O(n \cdot E[|C|]) = O(n \cdot n/k)$

Hinreichende Bedingung dafür, dass obiger Algorithmus 2-Approx. liefert: Sei X die k-elementige Teilmenge von P in der optimalen Kreisscheibe, dann genügt $X \cap C \neq \emptyset$

Es gilt $P[X \cap C \neq \emptyset] = 1 - (1 - \frac{1}{k})^k \geq 1 - 1/e$.

(3) Prüfe: - Berechne G_r und füge Punkte aus P in zugehörige Hash-Tabelle ein
- Falls es Gittercluster mit mehr als $5 \cdot 9 \cdot k$ Punkte gibt $\Rightarrow$ r zu groß (um mehr als 2) $\Rightarrow$ Wiederhole beginnend mit (1)



Sonst:
- Berechne für jedes Cluster mit $\geq k$ Punkten 2-Approx mit $O(n (n/k)^2)$-Algorithmus (im Cluster $n = O(k)$), also in $O(k)$ Zeit.

↳ Insgesamt $O(n)$, da jeder Punkt nur in ≤ 9 Cluster.

Korrektheit: Optimale Disk hat Radius $\leq r$ und liegt daher in einem Cluster $\Rightarrow$ 2-Approx wird gefunden

Laufzeit: $O(n \cdot \frac{n}{k}) \cdot$ # Wiederholungen

$E[\#\text{Wiederholungen}] = O(1)$, da mit $1 - 1/e$ Wahrscheinlichkeit Erfolg

$\Rightarrow$ Erwartet $O(n \cdot \frac{n}{k})$