SPQR-Bäume
und
planare Einbettungen

Carsten Gutwenger

Vorlesung

Automatisches Zeichnen von Graphen

WS 07/08

17. Dezember 2007

TU Dortmund, Fakultät für Informatik, Ls11

Überblick

Heute:

- k-Zusammenhang, Blöcke
- 3-Zusammenhangskomponenten
- SPQR-Bäume
- Planare Einbettungen

Dienstag:

- Anwendung von SPQR-Bäumen:
  Einbettungen mit maximaler Außenfläche

Motivation

SPQR-Bäume haben zahlreiche Anwendungen im Graphenzeichnen:

- Optimierung über alle möglichen Einbettungen
  - praxisrelevant!
- Kreuzungsminimierung
  - Preprocessing (*Non-planar Core Reduction*)
  - Kanteneinfügen (→ Januar)
- Einbettungsconstraints (→ Januar)
- Aufwärtsplanaritätstest für sT-Graphen (→ Februar?)

Literatur

W. T. Tutte, *Connectivity in graphs*, Vol. 15 of Mathematical Expositions, University of Toronto Press, 1966.

J. E. Hopcroft, R. E. Tarjan, *Dividing a graph into triconnected components*, SIAM Journal on Computing 2, 1973, pp. 135-158.

C. Gutwenger, P. Mutzel, *A linear time implementation of SPQR-trees*, in: J. Marks (ed.), Graph Drawing (GD 2000), LNCS 1984, pp. 77-90, Springer-Verlag, 2001.

k-Zusammenhang

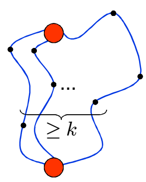
Definition. Sei $k \in \mathbb{N}$.
G=(V,E) ist k-zusammenhängend genau dann wenn
- |V| > k und
- G-X ist zusammenhängend für jedes X⊆V mit |X| < k.

0-zshgd. ⇔ G ist nicht leer.
1-zshgd. ⇔ G ist zusammenhängend (und hat mind. 2 Knoten)

k-Zusammenhang (2)

Satz (*Menger's Theorem*).
Ein Graph ist genau dann k-zusammenhängend, wenn es zwischen jedem Paar von Knoten k unabhängige Pfade gibt.

unabhängige Pfade: keine internen Knoten gemeinsam

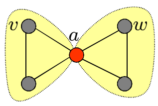


2-Zusammenhang

Bekannt:

a ist Schnittknoten (*cutvertex*) gdw. ex. Knoten v und w, so dass jeder Pfad von v nach w über a führt.

Block: maximaler zusammenhängender Teilgraph, der keinen Schnittknoten enthält.



Block-Graph

Definition. Seien $G=(V,E)$ und

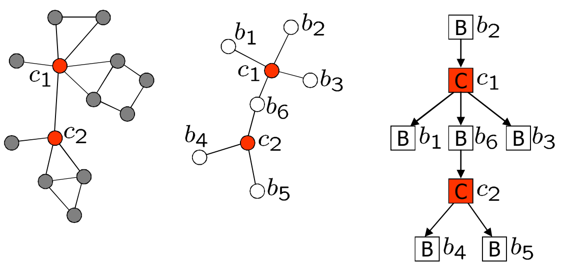
- $C \subseteq V$ Menge der Schnittknoten von G,
- B Menge der Blöcke von G.

Dann ist der (bipartite) Graph

$$(C \cup B\ ,\ \{\ (c,b)\ |\ c \in\ b\ \})$$

der Block-Graph von G.

Block-Graph (2)



Graph Block-Graph BC-Baum

Separationspaar

Sei $G=(V,E)$ 2-zusammenhängend.

$\{u,v\} \in V$ heißt Separationspaar, falls G - $\{u,v\}$ nicht zusammenhängend ist.

$\{u,v\}$ heißt Splitpaar, falls

- $\{u,v\}$ Separationspaar ist, oder
- u und v sind adjazente Knoten.

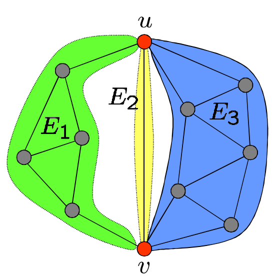
Splitklassen

Sei $\{u,v\}$ Splitpaar.

Splitklassen von $\{u,v\}$:
Partition $E_1,\ldots,E_k$ der Kantenmenge, so dass

$e,\ f \in\ E_i \Leftrightarrow$ e und f liegen auf einem Pfad, der u und v höchstens als einen Endpunkt enthält.

Splitklassen (2)



Split-Operation

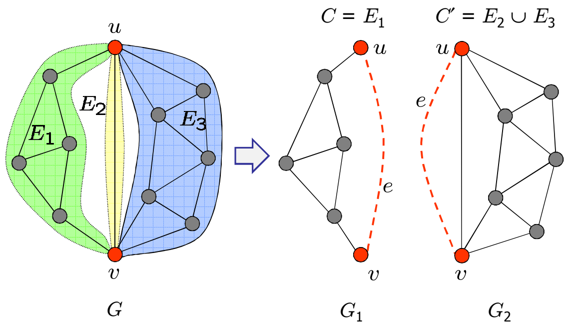
Seien $E_1,\dots,E_k$ die Splitklassen eines Splitpaares $\{u,v\}$.

Für ein j mit $1\leq j< k$ seien

$C = E_1 \cup \dots \cup E_j$ und
$C' = E_{j+1} \cup \dots \cup E_k$,
so dass $|C| \geq 2$ und $|C'| \geq 2$.

Eine Split-Operation ersetzt G durch die Split-Graphen
G_1 = (V(C) , $C \cup e$) und
G_2 = (V(C') , $C' \cup e$),
wobei $e=(u,v)$ eine neue virtuelle Kante ist.

Split-Operation (2)



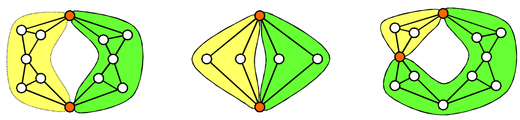
Tutte-Split

Eine Split-Operation heißt Tutte-Split, falls

- $C = E_\alpha$ und
- G[C] oder G[C'] enthält keinen Schnittknoten.

Tutte-Split (2)

Tutte-Split ja oder nein?



Nein! Nein! Ja!

Split-Graphen

Beobachtung. Jeder Split-Graph enthält keinen Schnitt-knoten und mindestens 3 Kanten.

Führe solange Split-Operationen durch wie möglich.

Lemma. Die Gesamtzahl aller Kanten in Splitgraphen ist beschränkt durch 3 $|E|$ - 6.

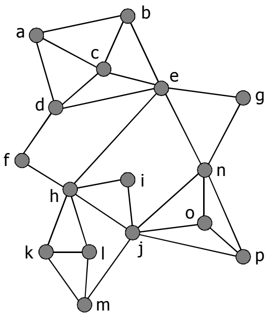
(Beweis durch Induktion nach Anzahl der Kanten.)

3-Zusammenhangskomponenten

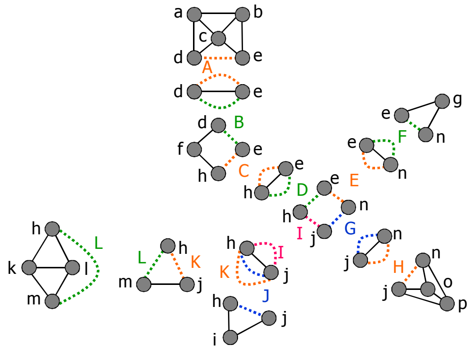
Definition. Wir erhalten die 3-Zusammenhangs-komponenten eines Graphen, indem wir solange Tutte-Splits durchführen wie möglich.

3-Zusammenhangskomponenten (2)

Beispiel:



3-Zusammenhangskomponenten (3)



3-Zusammenhangskomponenten (4)

Theorem. Jede 3-Zusammenhangskomponente ist

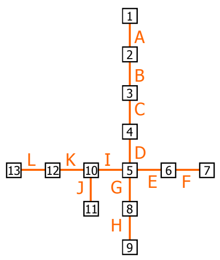
a) ein einfacher, 3-zshgd. Graph, 3-zshgd.

b) ein Kreis (Polygon) mit mind. 3 Kanten, oder seriell

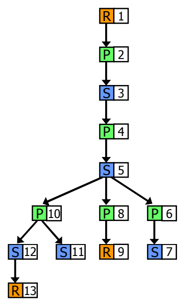
c) ein Bündel von mind. 3 parallelen Kanten. parallel

Theorem. Die 3-Zusammenhangskomponenten eines Graphen sind eindeutig.

SPQR-Baum



Baum $T(G)$

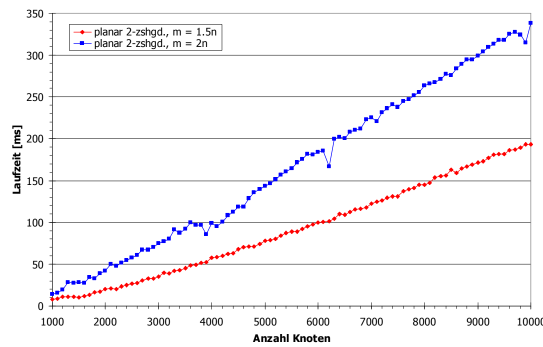


SPQR-Baum

SPQR-Bäume im OGDF

- **StaticSPQRTree**
  - Hopcroft/Tarjan Implementierung
- **StaticPlanarSPQRTree**
  - zusätzlich: „Aufzählen" von Einbettungen
- **DynamicSPQRTree**
  - G. Di Battista, R. Tamassia, *On-line maintenance of triconnected components with SPQR-trees*, Algorithmica 15(4), 1996, pp. 302-318.
- **DynamicPlanarSPQRTree**

Laufzeit Aufbau SPQR-Baum



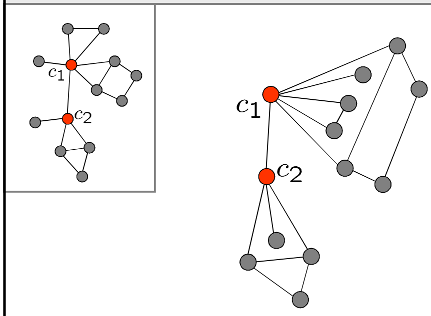
Planare Einbettungen

Definition.
Eine kombinatorische Einbettung eines Graphen G ist gegeben durch die zyklischer Reihenfolge der Kanten um jeden Knoten in einer planaren Zeichnung von G.

äquivalent:
zyklische Reihenfolge der Kanten in jeder Fläche

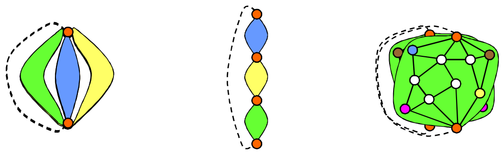
planare Einbettung: komb. Einbettung + Außenfläche

Aufzählen aller Einbettungen (1)



Aufzählen aller Einbettungen (2)

P-Knoten | S-Knoten | R-Knoten



(k-1)! Permutationen | 1 Einbettung | 2 Einbettungen

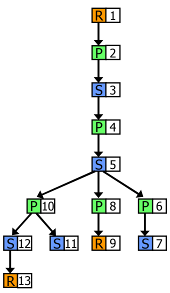
Aufzählen aller Einbettungen (3)

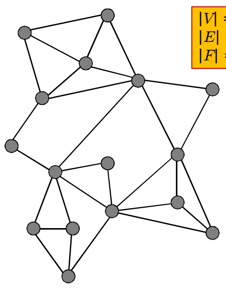
Anzahl aller komb. Einbettungen eines 2-zshgd. Graphen:

$$2^{|R|} \cdot \prod_{\mu \in P} (n_\mu - 1)!$$

R Menge der R-Knoten
P Menge der P-Knoten
n_μ Anzahl Kanten im P-Knoten μ

Aufzählen aller Einbettungen (4)





$|V|$ = 16
$|E|$ = 29
$|F|$ = 29-16+2 = 15

komb. Einbettungen: $2^3 \cdot 2^4 \cdot 3!$ = **768**
planare Einbettungen: 15·768 = **11520**