Planare Einbettungen mit maximaler Außenfläche

Carsten Gutwenger

Vorlesung

Automatisches Zeichnen von Graphen

WS 07/08
18. Dezember 2007

TU Dortmund, Fakultät für Informatik, Ls11

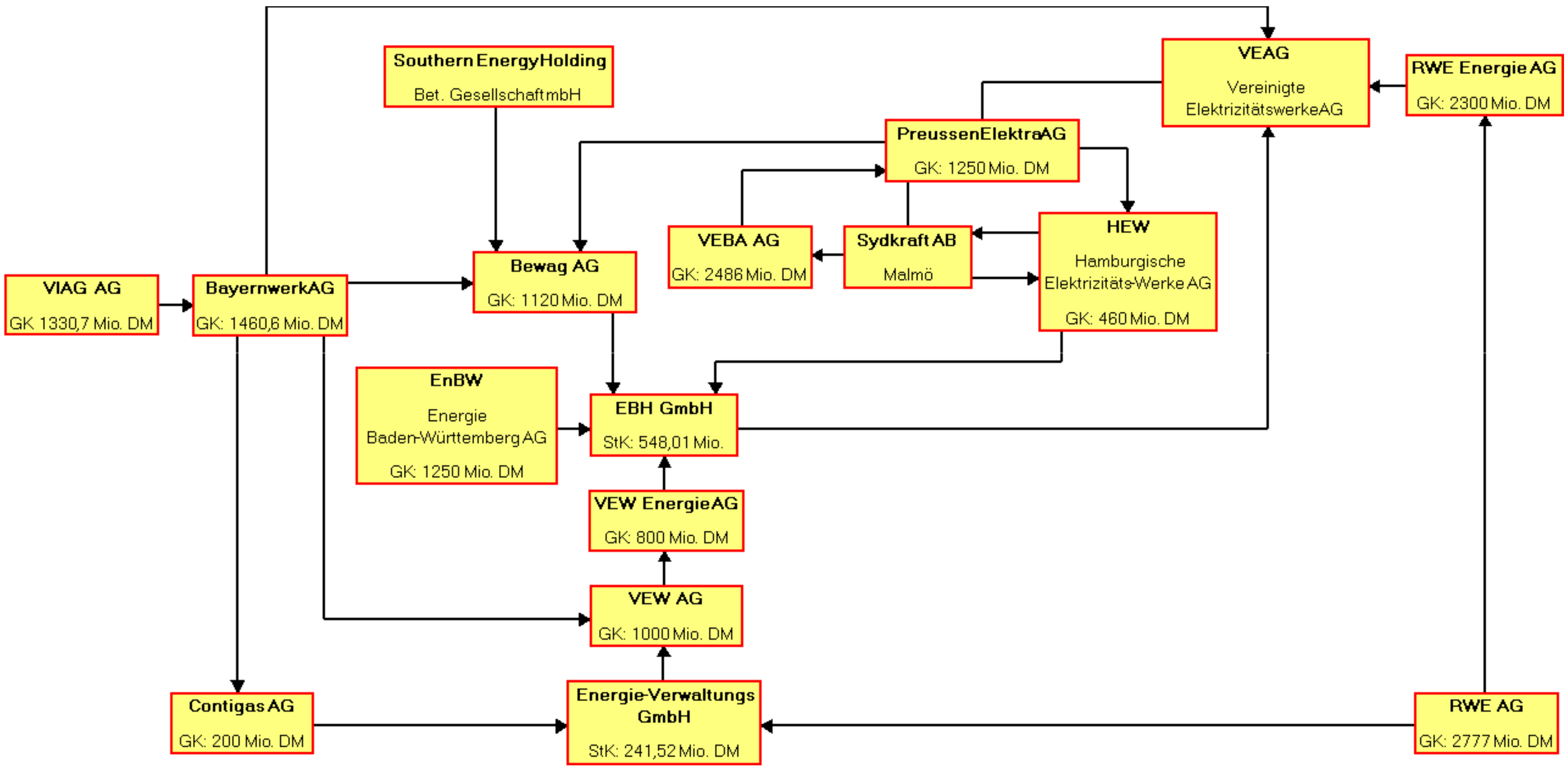
Überblick

- Warum Einbettungen mit großer Außenfläche?
- Der Algorithmus
  - 2-zusammenhängende Graphen
  - Zusammenhängende Graphen
- Implementierungen im OGDF

$\rightarrow$ **Nikolausvortrag**

13:19 Uhr Audimax

Motivation (1)



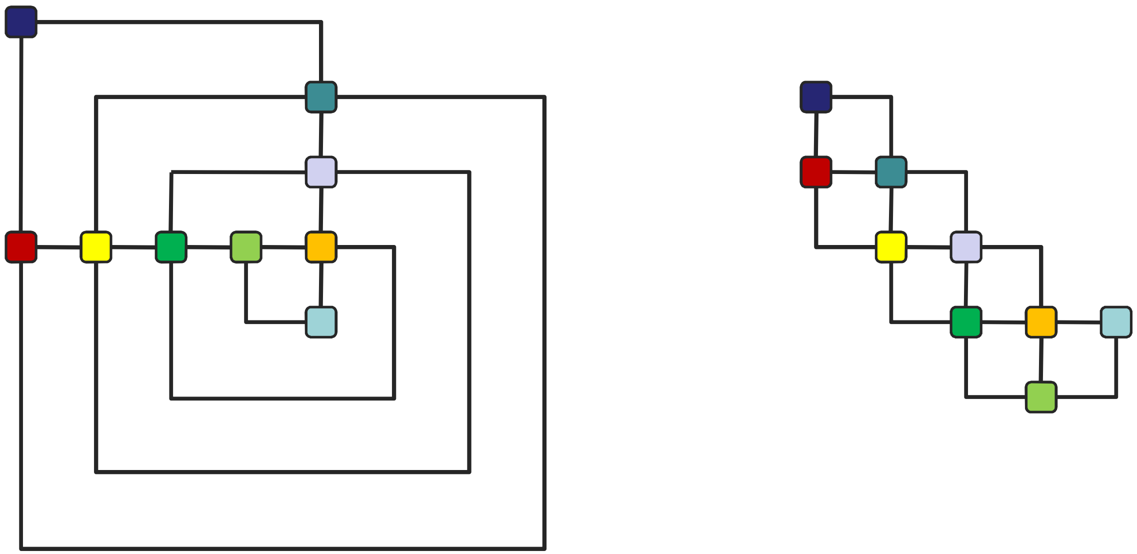
Motivation (2)

Der Topology-Shape-Metrics Approach:

1. Bestimme Topologie → planare Einbettung
2. Bestimme orthogonale Form der Zeichnung
   → Minimiere Anzahl der Knicke
3. Bestimme endgültige Koordinaten (Kompaktierung)
   → Minimiere Kantenlängen (oder Fläche)

Motivation (3)

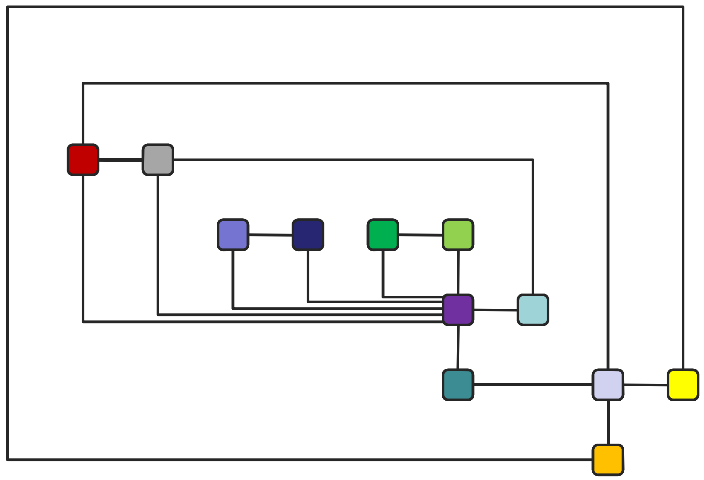
Ein 2-zusammenhängender Graph:

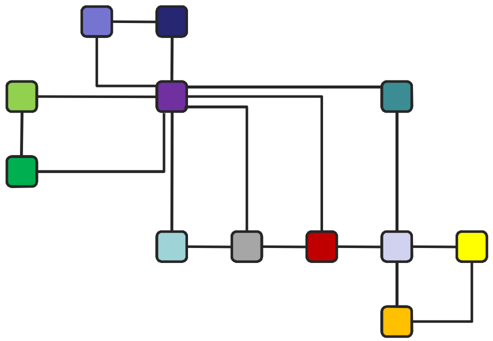


Knicke:	13	$\longrightarrow$	**7**
Fläche:	7×7	$\longrightarrow$	$\mathbf{4 \times 4}$
Außenfläche:	**3**	$\longrightarrow$	**9**

Motivation (4)

Ein nicht 2-zusammenhängender Graph:





Knicke: 11 ⟶ **5**

Fläche: 9×6 ⟶ $\mathbf{6 \times 4}$

Außenfläche: 3 ⟶ **15**

Literatur

Verwandte Arbeiten:

D. Bienstock, C. L. Monma, *On the complexity of embedding graphs to minimize certain distance measures*, Algorithmica 5(1), 1990, pp. 93-109.

- Polynomialzeit-Algorithmen zur Minimierung verschiedener Distanzmaße (*radius*, *width*, *outerplanarity*, *face depth*).

M. Pizzonia, R. Tamasia, *Minimum depth graph embedding*, Proc. ESA 2000, pp. 356-367.

- Linearzeit-Algorithmen zur Minimierung der Blockschachtelungstiefe für 2-zshgd. Graphen mit fester Einbettung.

Literatur

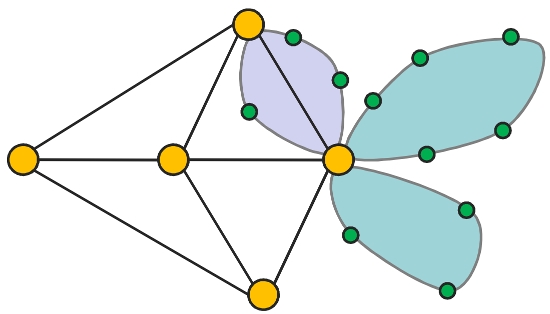
C. Gutwenger, P. Mutzel, *Graph embedding with minimum depth and maximum external face*, Proc. Graph Drawing 2003, pp. 259-272.

- Maximierung der Außenfläche über alle planare Einbettungen.
- Minimierung der Blockschachtelungstiefe über alle planaren Einbettungen.
- Kombination von beiden (Maximale Außenfläche über alle planaren Einbettungen minimaler Blockschachtelungstiefe.)

2-zusammenhängende Graphen

Betrachte einen Skeletongraphen:

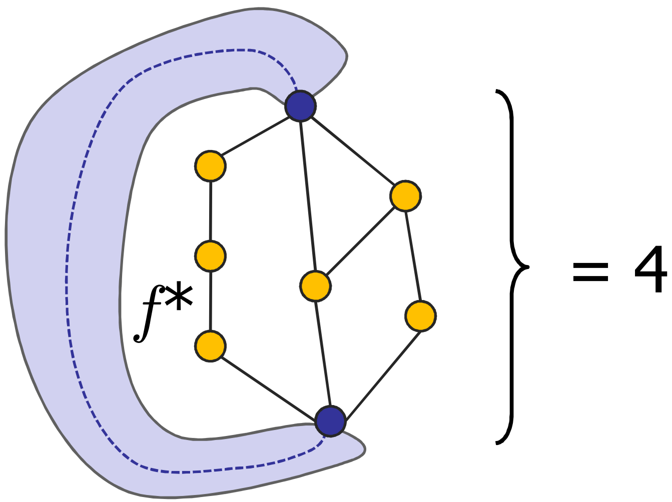
- jede Kante hat eine Länge ≥ 1
- jeder Knoten hat eine Länge ≥ 0
- Größe einer Fläche :=
  Summe Kantenlängen + Summe Knotenlängen



Komponentenlänge (1)

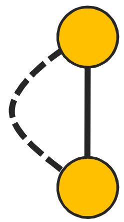
Komponentenlänge einer Skeletonkante:

- expansion$^+(e)$:= Expansionsgraph von e + Kante e
- Suche Einbettung von expansion$^+(e)$ mit einer Fläche f^*, die e enthält und maximale Größe hat.
- Komponentenlänge von e := Größe von f^* - Länge von e



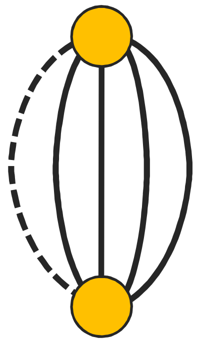
Komponentenlänge (2)

„Bottom-up“ Berechnung:



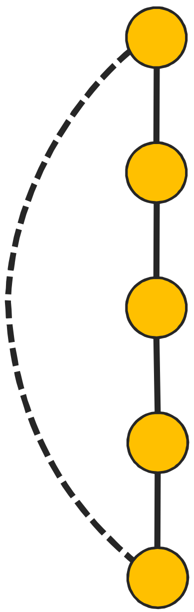
Q-Knoten

1



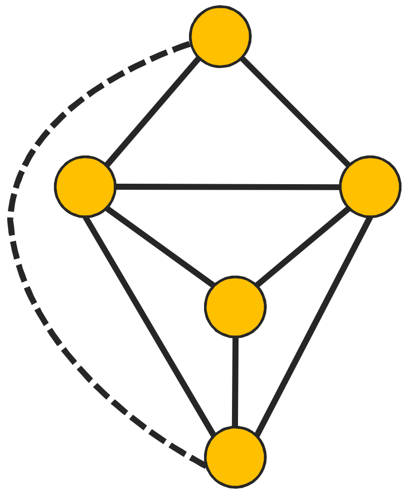
P-Knoten

Länge der längsten Kante



S-Knoten

Länge des Pfades



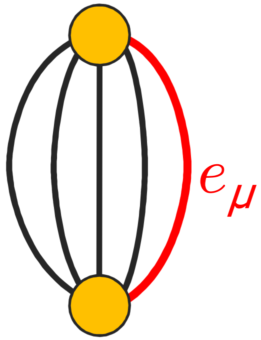
R-Knoten

Größte „Außenfläche“

Komponentenlänge (3)

„Top-down“ Berechnung für Referenzkanten:

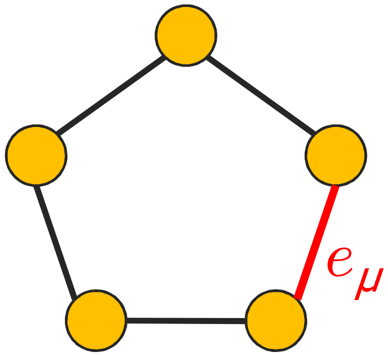
„Root“: 1



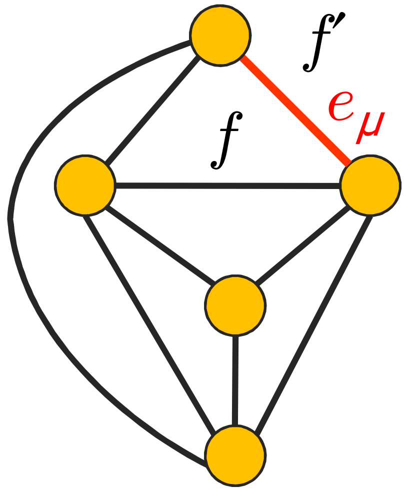
P-Knoten

Länge der längsten Kante ≠ e_μ

S-Knoten



L – Länge von e_μ

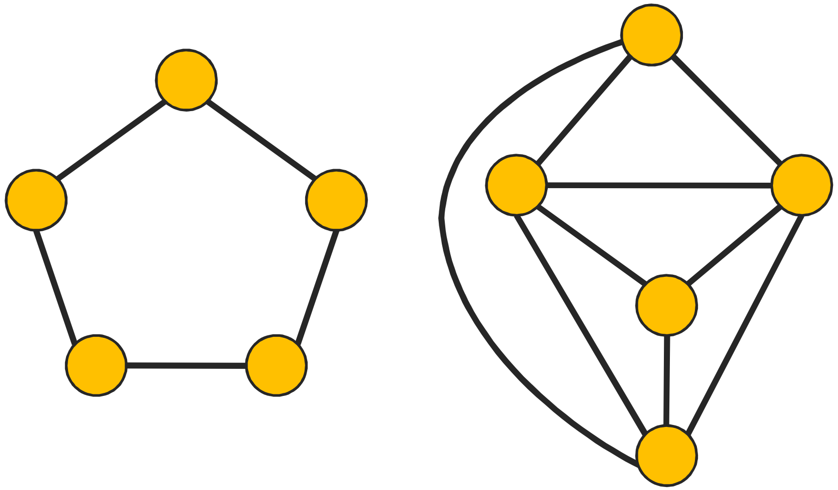


R-Knoten

max (f, f') – Länge von e_μ

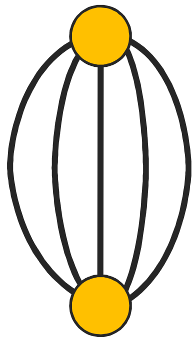
Bestimme größte Fläche

Betrachte jedes Skeleton:



S- und R-Knoten

Wähle größte Fläche.

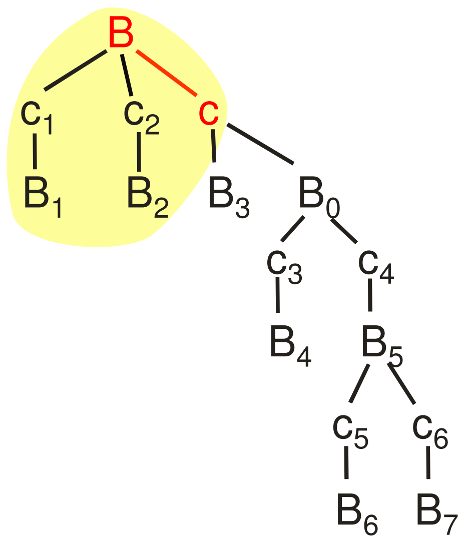


P-Knoten

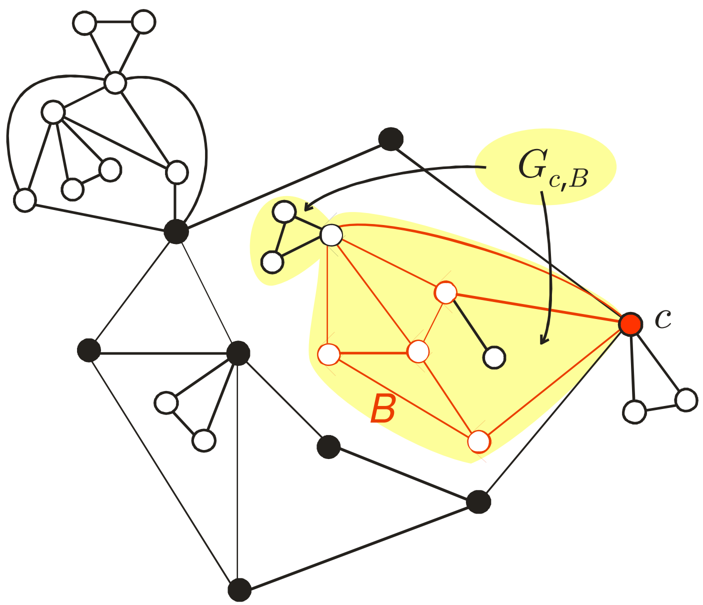
Wähle Fläche aus den beiden längsten Kanten

Zusammenhängende Graphen (1)

Untergraph $G_{c,B}$:



BC-Baum



Graph G

Zusammenhängende Graphen (2)

Wir wollen berechnen:

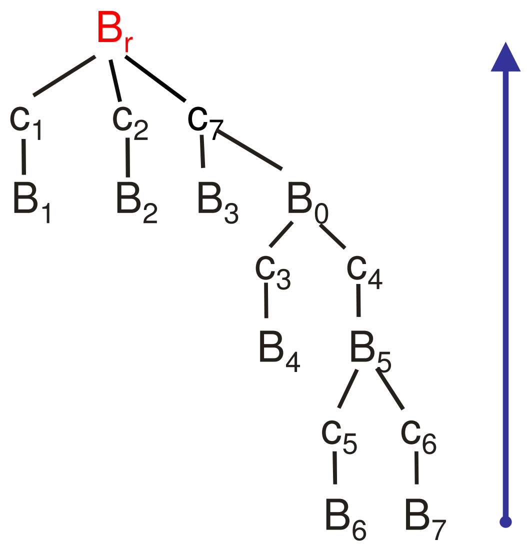
- cstrLength(B,c) :=
  Größe einer maximalen Fläche von $G_{c,B}$, die c enthält.
- length$_B$(c) := Länge von Knoten c in Block B

Beobachtung: Es gilt

$$\text{length}_B(c) = \sum_{\substack{(c,B')\in \text{BC-Tree} \\ B' \neq B}} \text{cstrLength}(B', c)$$

Zusammenhängende Graphen (3)

1. Phase: „Bottom-up"

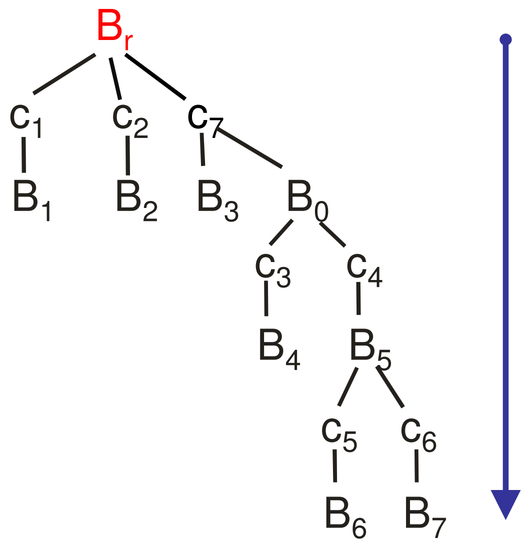


Berechne

- length$_B(v)$ für alle $v \in B$, die nicht „parent" von B sind
- cstrLength(B,c) für alle $c \rightarrow B$

Zusammenhängende Graphen (4)

2. Phase: „Top-down“



Berechne

- Maximale Fläche in B
- cstrLength(B,c) für alle $B \rightarrow c$ (*)
- length$_B$(c) für jeden „parent“ c von B (**)

(*) nach Vorberechnung in O(Σ deg(c')) möglich, c' Repräsentanten von c im SPQR-Baum

(**) Vorberechnung von $L := \Sigma$ cstrLength(B',c)

Finally...

Theorem:
Sei G=(V,E) ein planarer, zusammenhängender Graph.

Dann kann (mit Hilfe von BC- und SPQR-Bäumen) eine planare Einbettung von G mit maximaler Außenfläche in Zeit O(|V|+|E|) berechnet werden.

Implementierung im OGDF:
- EmbedderMaxFace

Weitere Einbettungsvarianten:
- EmbedderMaxFaceLayers
- EmbedderMinDepth, EmbedderMinDepthMaxFace,...