Exkurs: Datenstruktur Quad Tree

Prof. Dr. Petra Mutzel

Lehrstuhl für

Algorithm Engineering LS11

Universität Dortmund

27. VO WS07/08 04. Februar 2008

Mehrdimensionale Suchstrukturen

- **Gegeben:**
  - Menge S von N Punkten in R^k
  - Familie U von Untermengen von R^k (*Ranges*)
  - $\delta \in U$
- **Gesucht:**
  - Vorverarbeitung von S, so dass Abfragen der Art: ``Berichte alle Punkte in $S \cap \delta$´´ effizient berichtet werden können.

- **Beispiel:** Datenbankabfragen

Anwendungsbereiche

- Datenbanken
- Computergraphik / Computer Vision
- Computer-Aided Design
- Geographische Informationssysteme
- Bildverarbeitung
- Mustererkennung
- Document-Retrieval
- Data Mining
- ...

Charakterisierung (1)

- Welche Datentypen werden gespeichert?
  - *S* ist ungeordnete Menge (z.B. Index)
  - S ist kartes. Produkt $S^1 \times S^2 \times \ldots \times S^k$ geordn. Mengen
- Dimension:
  - *k* ist kleiner gleich 10
- Operationen:
  - Find, Insert, Delete, (Pred., Succ., Min, Max)
- Welche Speichermedien?
  - intern vs. extern

Charakterisierung (2)

- Welche Objekttypen werden gespeichert?
  - Punkte, Container (z.B. Quader in 3D), komplexere
  - Lage fixiert oder beweglich?

- Welche Abfragen und wie oft?
  - Ist Punkt enthalten?
  - Aufzählung aller Punkte, die in gewünschtem *k*-dim. Bereich liegen
  - Welche Punkte liegen in der Nähe eines Punktes?
  - Finde die *n* nächsten Nachbarn eines Punktes
  - Exakte vs. partielle Abfragen
  - Einmalige vs. viele Abfragen

Wir betrachten folgende Abfragen:

- Punkt-Abfrage (Point Query):
  - Ist ein gegebener Datenpunkt in $S \in R^k$ enthalten, und falls ja, dann finde diesen.

- Bereichsabfrage (Range Query):
  - Berichte alle Punkte aus S, deren *k* Schlüssel in den gewünschten Bereichen liegen.

Einfache Datenstrukturen

- Sequentielle Liste
  - Aufwand: $O(N\,k)$

Name	X-key	Y-key
D	5	45
C	35	40
O	25	35
M	50	10

- Invertierte Liste (Knuth 1973)
  - Sortierte Liste pro Schlüssel
  - Durchschnittlicher Aufwand: $O(N^{1-1/k})$
  - Aufwand: $O(N\,k)$

X-key	Y-key
D	M
O	O
C	C
M	D

``Fixed Grid´´ Methode

- Suchraum wird in gleiche Teile (*Buckets*) der Größe *r* aufgeteilt, wobei *r* der Suchradius ist
- Realisiert als *k*-dim. Array mit einem Eintrag per Bucket; jeder Bucket enthält Punkte in Form einer einfachen Liste
- Durchschnittlicher Suchaufwand für Bereichssuche (Bentley 1977): $O(F\ 2^k)$, wobei *F* die Anzahl der berichteten Punkte ist
- Effizient, wenn fixer Radius und Datenpunkte gleichmäßig im Raum verteilt sind (Kartographie)
- Teilt den Raum auf

Region Quadtrees

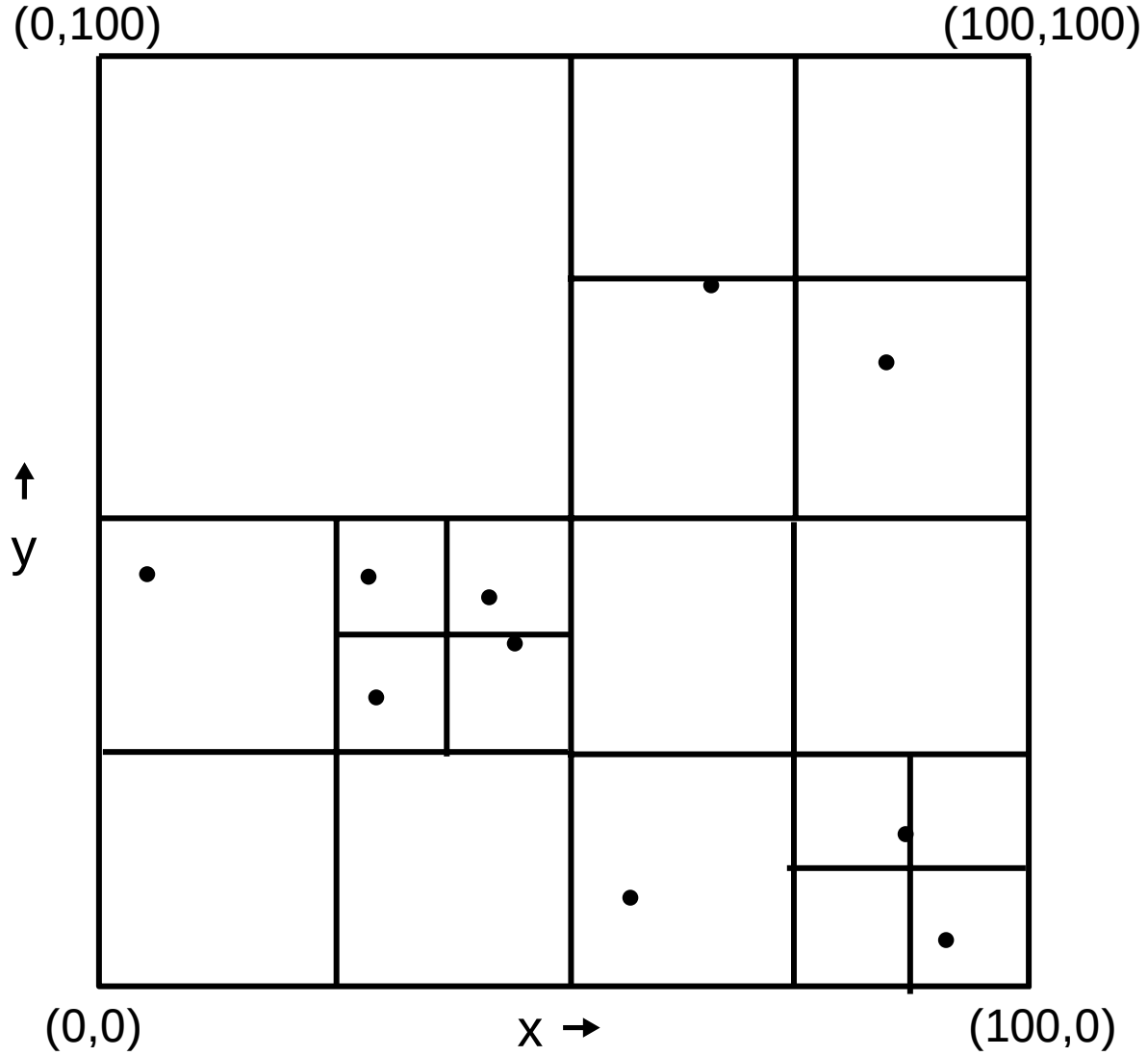
- Repräsentation eines 2-dim. Binärbildes (Region Data)
- Rekursive Teilung eines 0/1-Bereiches in vier gleich große Quadranten, STOP falls Block nur 0 oder nur 1 enthält
- Suchbaum mit Grad 4 (s. Beispiel)
- Jedes Kind eines Knotens repräsentiert Quadranten (NW,NE,SW,SE)
- Blätter → Aufteilung nicht weiter notwendig
- Blätter sind entweder ``weiß´´ oder ``schwarz´´, innere Knoten sind ``grau´´

Point-Region Quadtrees

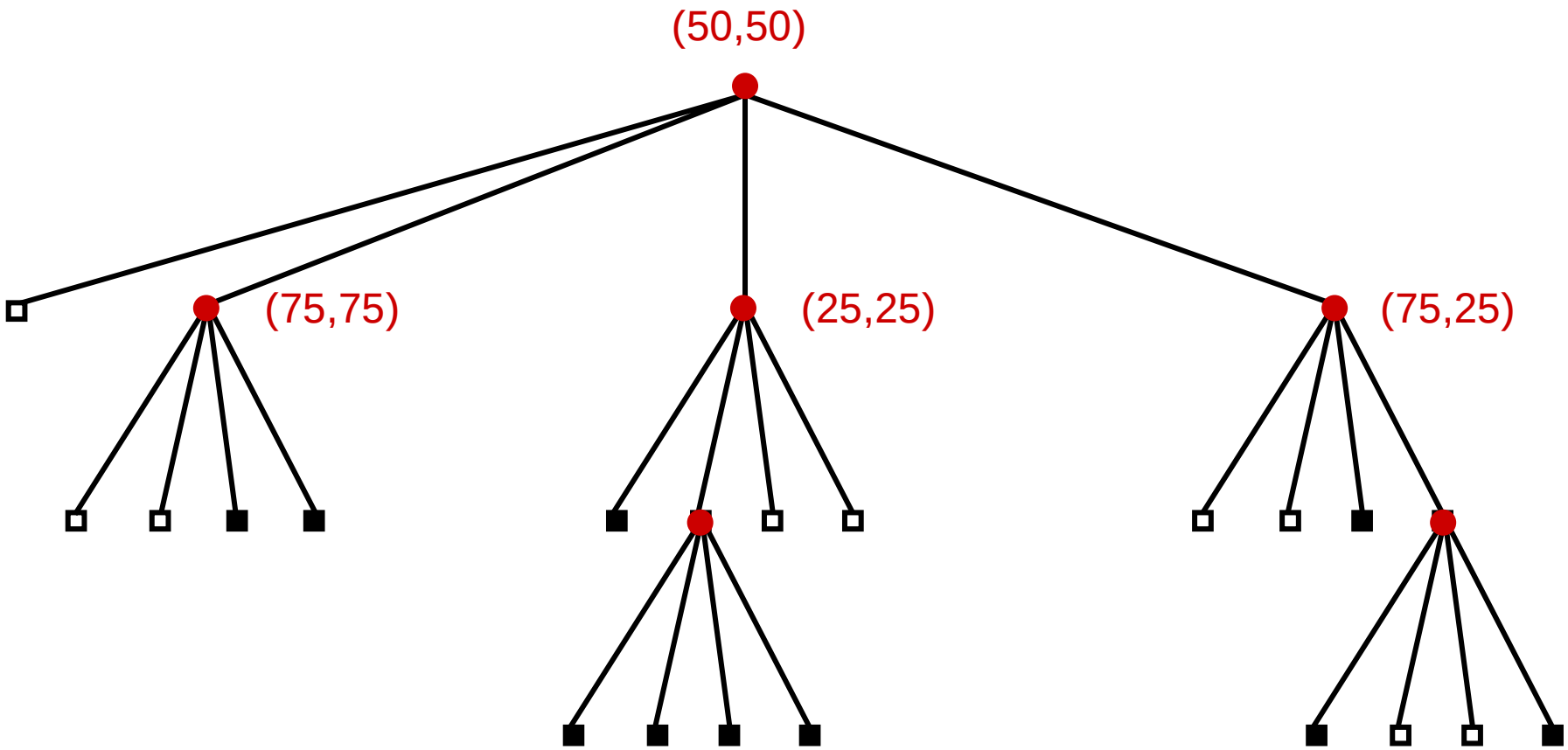
- Repräsentation von Punkten in einem k-dim. Bereich
- Rekursive Teilung eines quadratischen Bereiches in vier gleich große Quadranten, STOP falls Block nur 0 oder nur 1 Punkt enthält
- Jedem Feld wird ein Knoten in einem Suchbaum mit Maximal- Grad 4 zugeordnet
- Jedes Kind eines Knotens repräsentiert Quadranten (NW,NE,SW,SE)
- Blätter ← Aufteilung nicht weiter notwendig
- Blätter sind entweder ``weiß´´ (falls kein Punkt enthalten ist) oder ``schwarz´´ (sonst), innere Knoten sind ``grau´´

Point-Region Quadtrees: Beispiel

N=10 Punkte



PR Quadtree für Beispiel



Aufbau eines PR Quadtrees

Top-Down Aufbau:

- Starte mit Feld B, das alle Knoten enthält
- Sei v_B der zugehörige Knoten im Suchbaum
- Falls B mehr als einen Knoten enthält, dann
  - erzeuge 4 Kinder von v_B im Suchbaum
  - weise jedem Kind-Feld B^i alle Knoten aus B zu, welche in B^i enthalten sind
  - entferne leere Kind-Felder $v_B{}^i$ im Baum

Alternativ: Insert-Aufbau:

- Starte mit leerem Feld B und füge iterativ die Knoten ein
- Einfügen geht ähnlich wie bei binären Suchbäumen: suche das richtige Feld, Suche endet an Blatt, füge ein.

Morton Order

Morton 1966, space filling curve

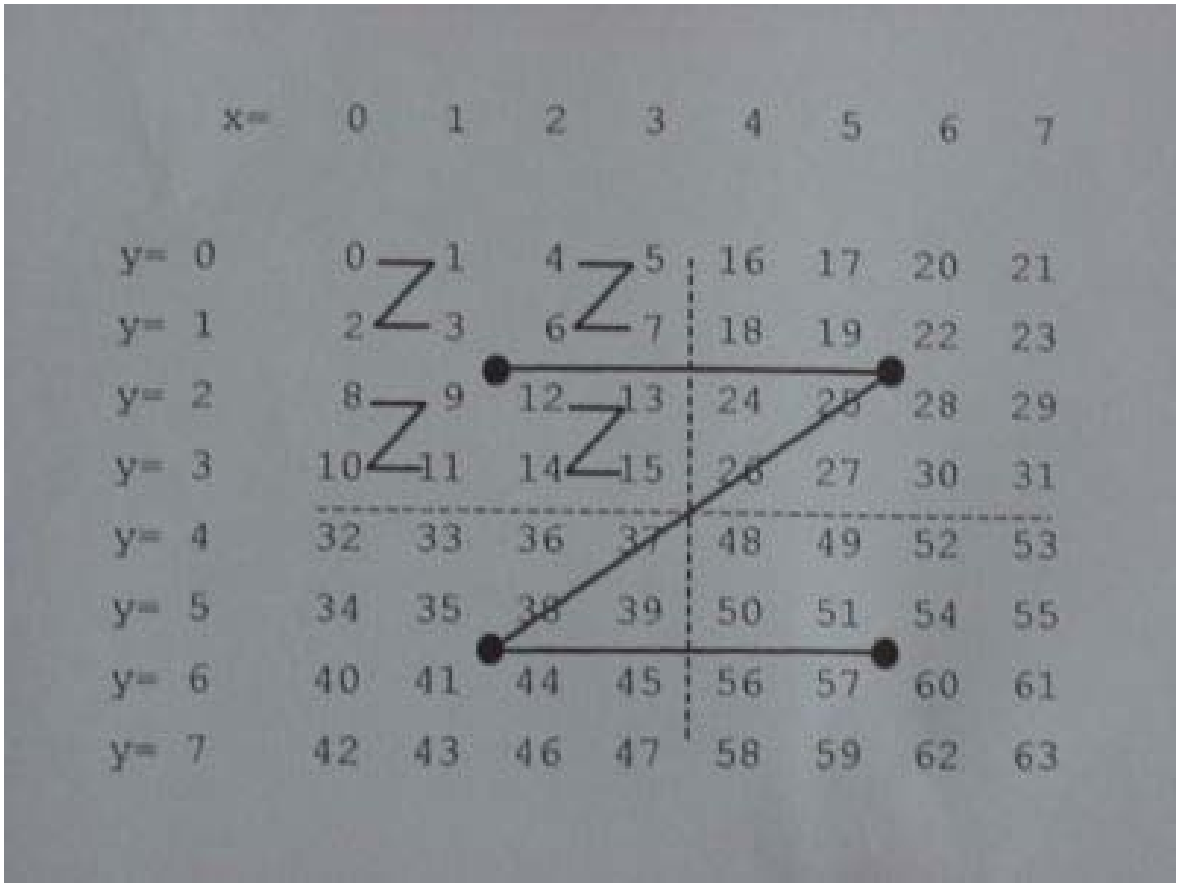
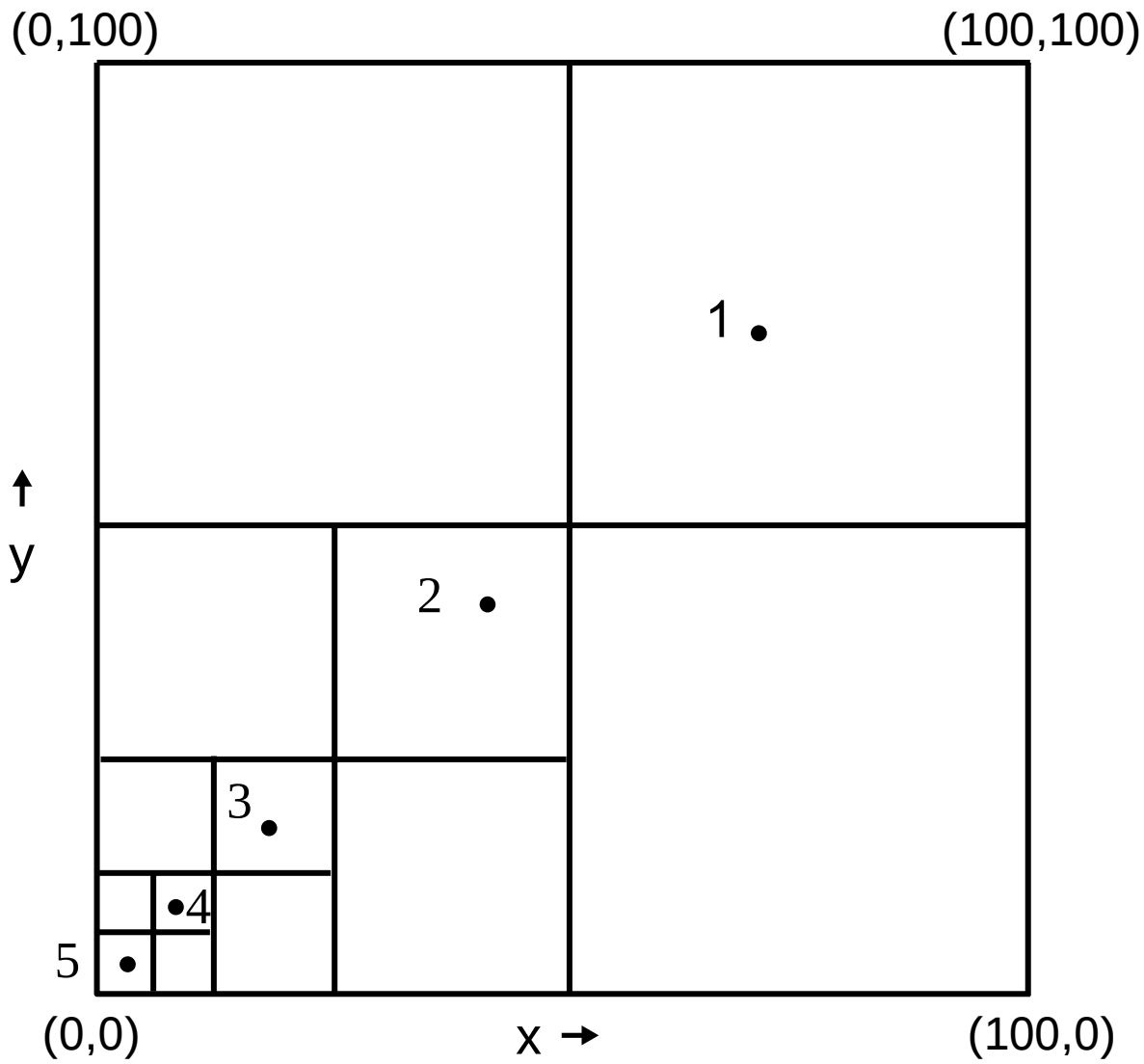


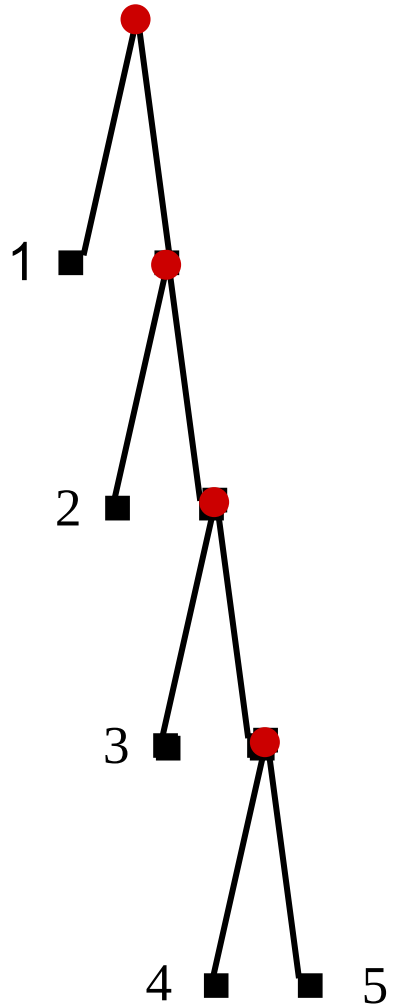
Abb. aus Wikipedia

Laufzeit ?

Baum hat Tiefe N

→ Laufzeiten beider Aufbau-Algorithmen: $O(N^2)$

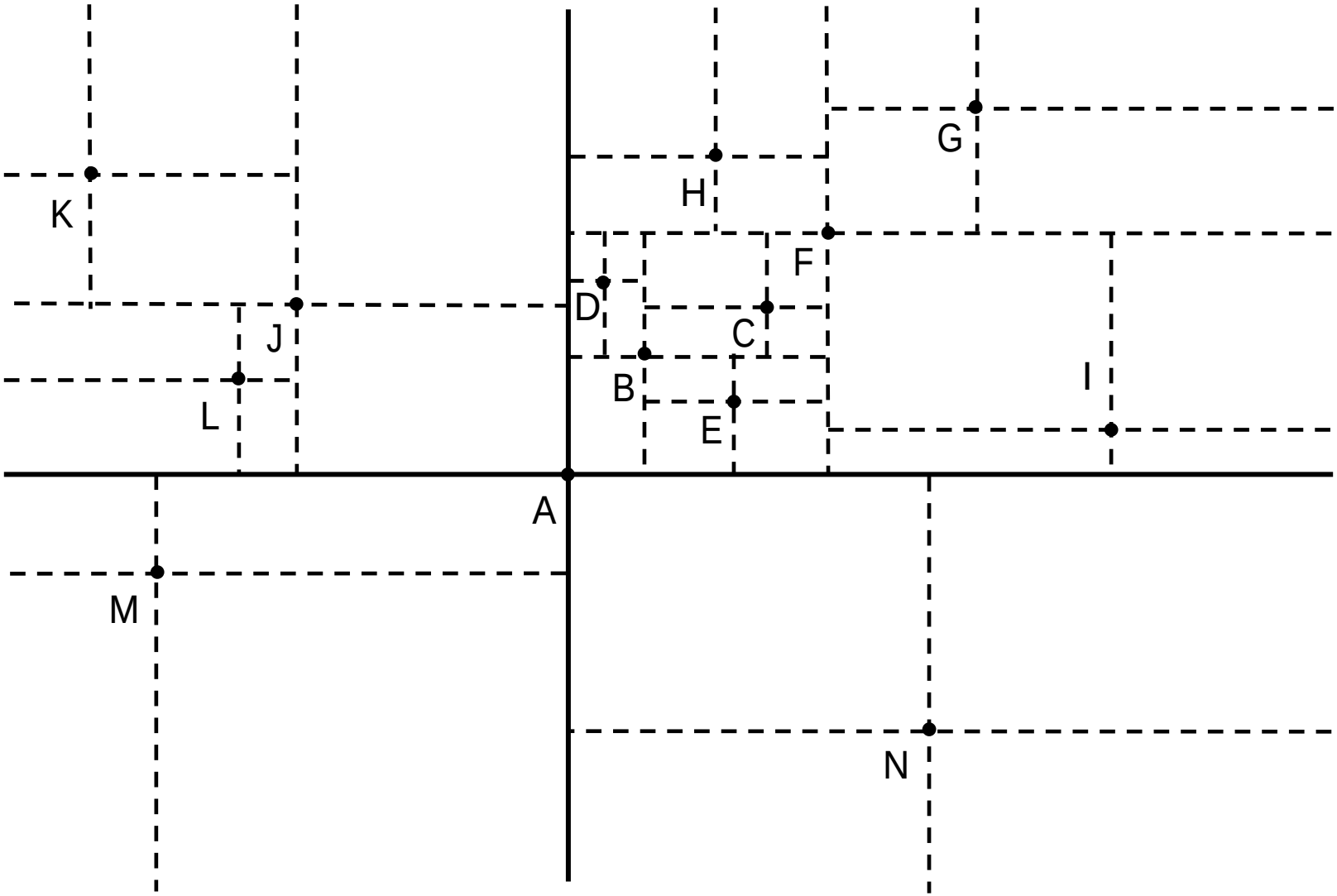




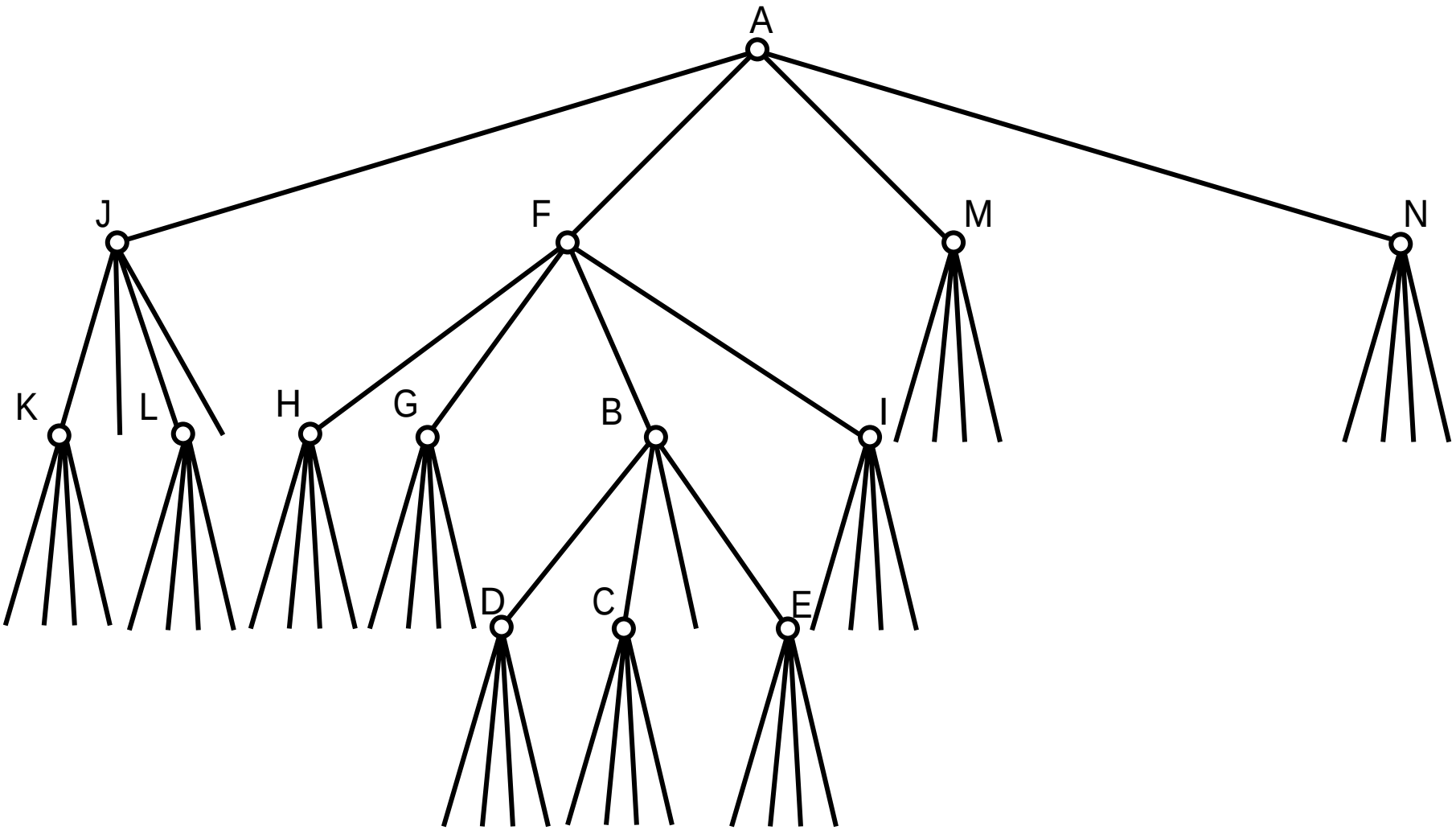
Point Quadtrees

- Eingeführt von Finkel & Bentley 1974
- Multidimensionale Verallgemeinerung von binären Suchbäumen
- Verheiratung von ``Fixed Grid´´ mit binären Suchbäumen
- Rekursive Teilung an Datenpunkten in jeweils vier Teile: NW,NE,SW, SE
- Hier Annahme:
  - k=2, Verallg. einfach
  - Jeder Punkt wird nur einmal besetzt

Beispiel:



Point Quadtree zu Beispiel

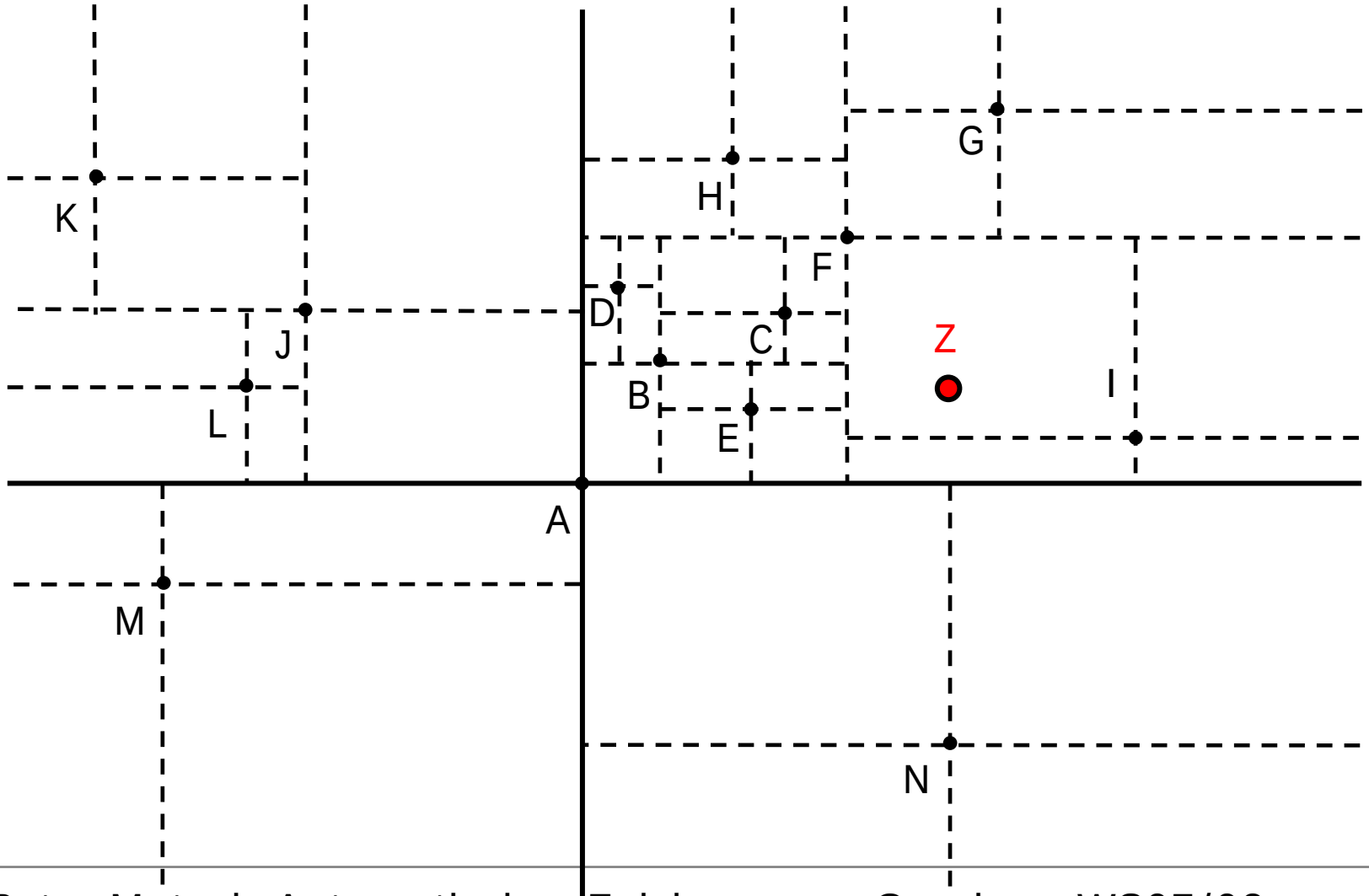


Point Quadtrees: Operation Insert

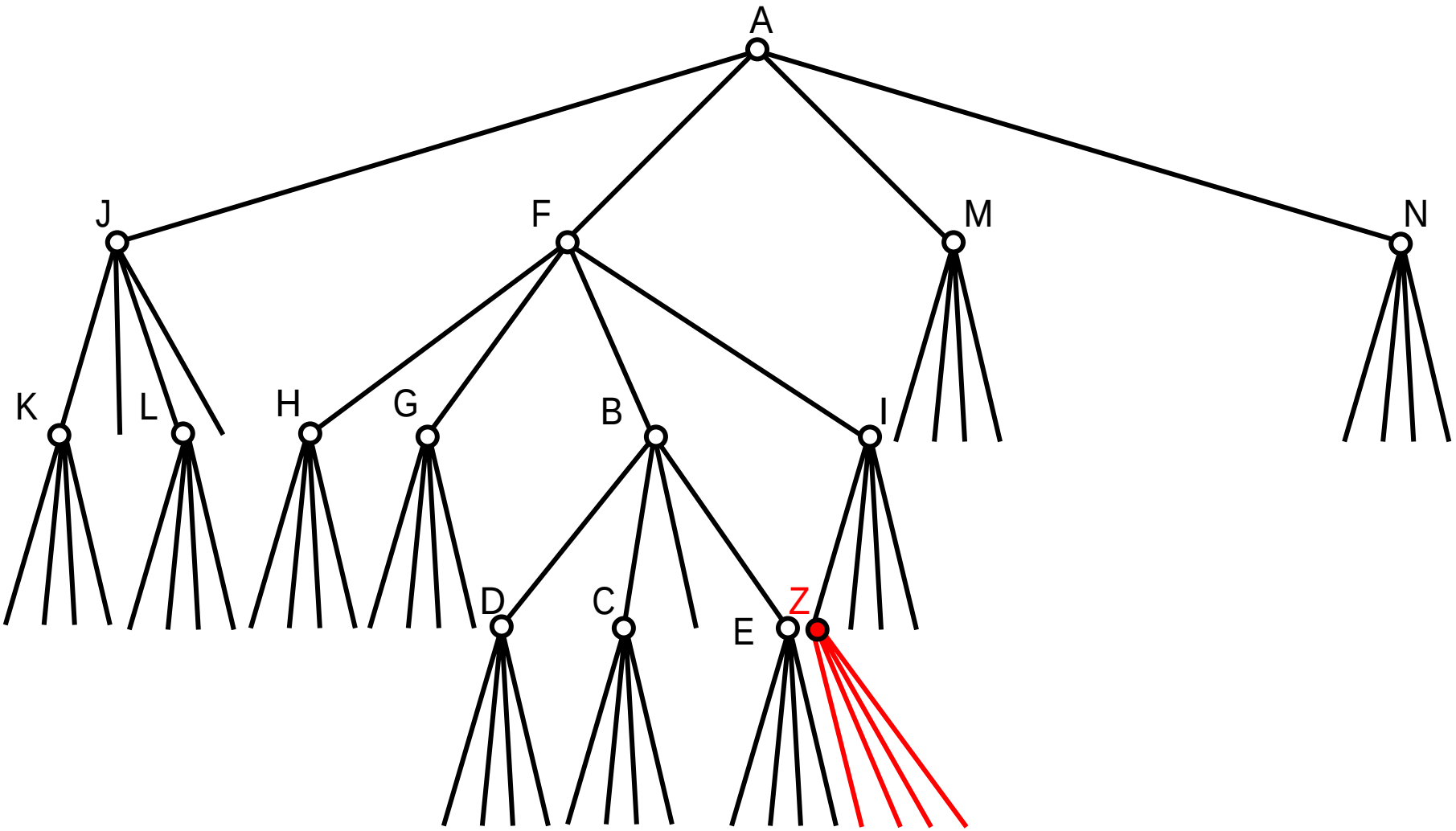
- Jeder innere Knoten enthält
  - Zeiger zu Kindern NW,NE,SW,SE
  - CHILD(P,I): gibt Kind im Quadranten I von Knoten P an
  - XCOORD, YCOORD: Koordinaten von Punkt
  - NAME: Information über Punkt (z.B. Name)

- Ähnlich wie für binäre Suchbäume:
  - Suche den Punkt (nach *x* und *y*-key)
  - Wenn Blatt erreicht ist, dann bestimme Position, an die eingefügt werden muss.

Beispiel: Insert Z



Point Quadtree zu Beispiel: Insert Z



Point Quadtrees: Analyse Aufbau

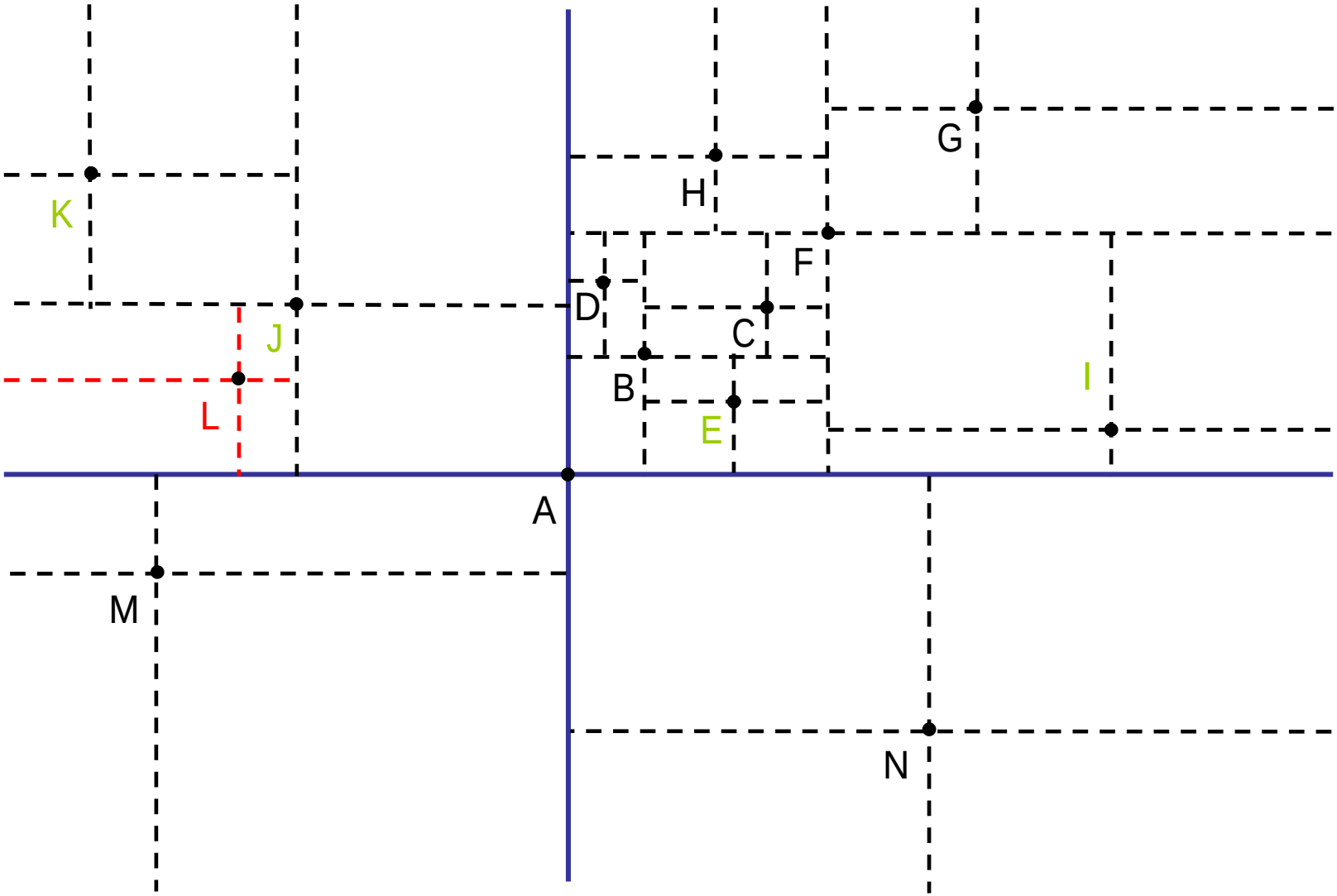
- Aufbau eines Point Quadtrees:
  - Aufwand ist äquivalent zur Gesamtpfadlänge = Kosten, um nach allen Elementen einmal zu suchen
- Gesamtpfadlänge:
  - Hängt von Reihenfolge der Einfügungen der Punkte ab
  - Empirisch: $N \log_4 N$ *(Finkel & Bentley)*
  - Worst Case: $\theta(N^2)$
- Aufwand für Insert und Search
  - Empirisch: $O(\log_4 N)$
  - Worst Case: $O(N)$
  - Re-Balancing Methoden sind möglich

Point Quadtrees: Deletion

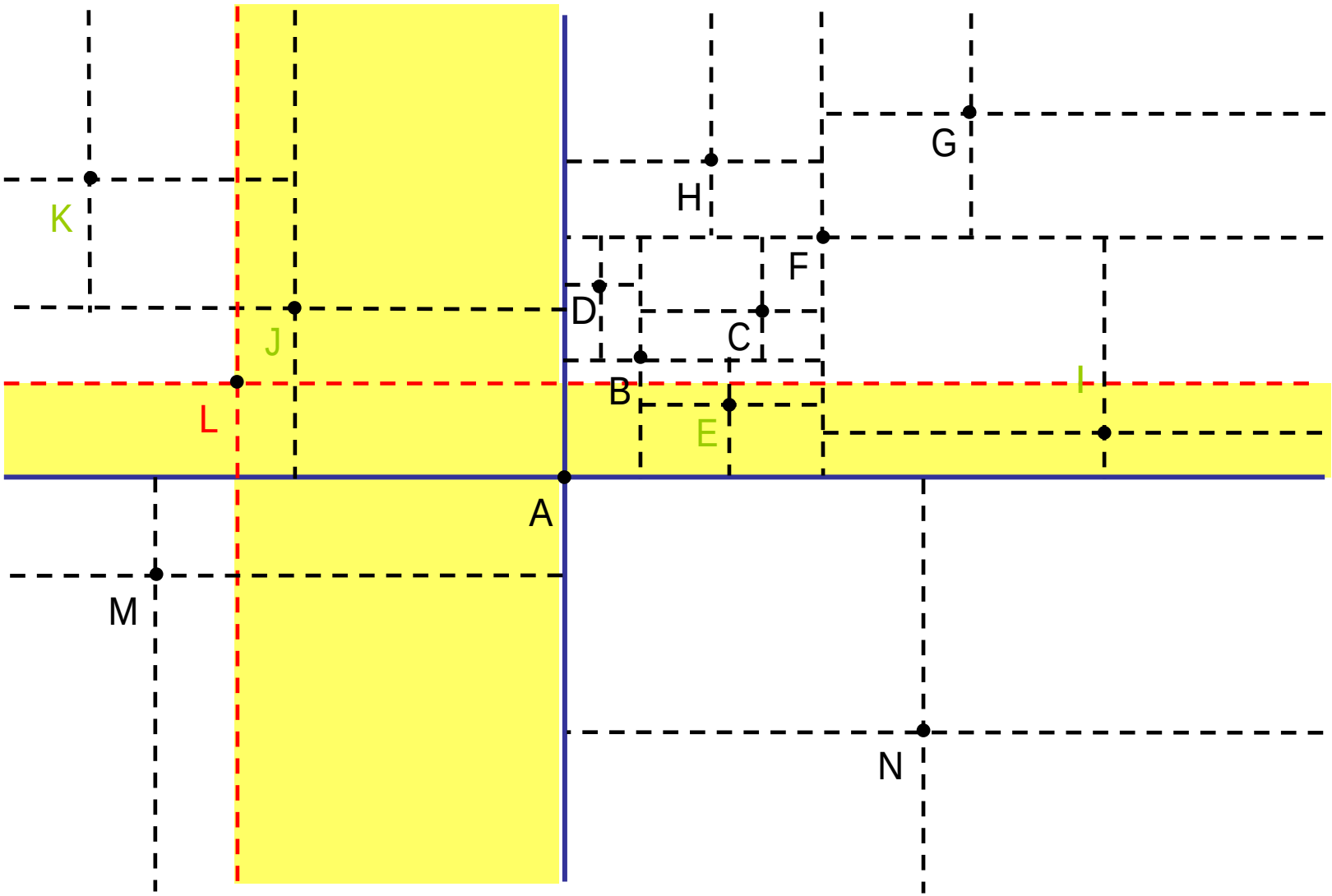
- Problem:
  - Geht nicht so leicht wie bei binären Suchbäumen
  - Beispiel: Deletion of A

Beispiel: Deletion

Deletion of A



Beispiel: Deletion



Point Quadtrees: Deletion

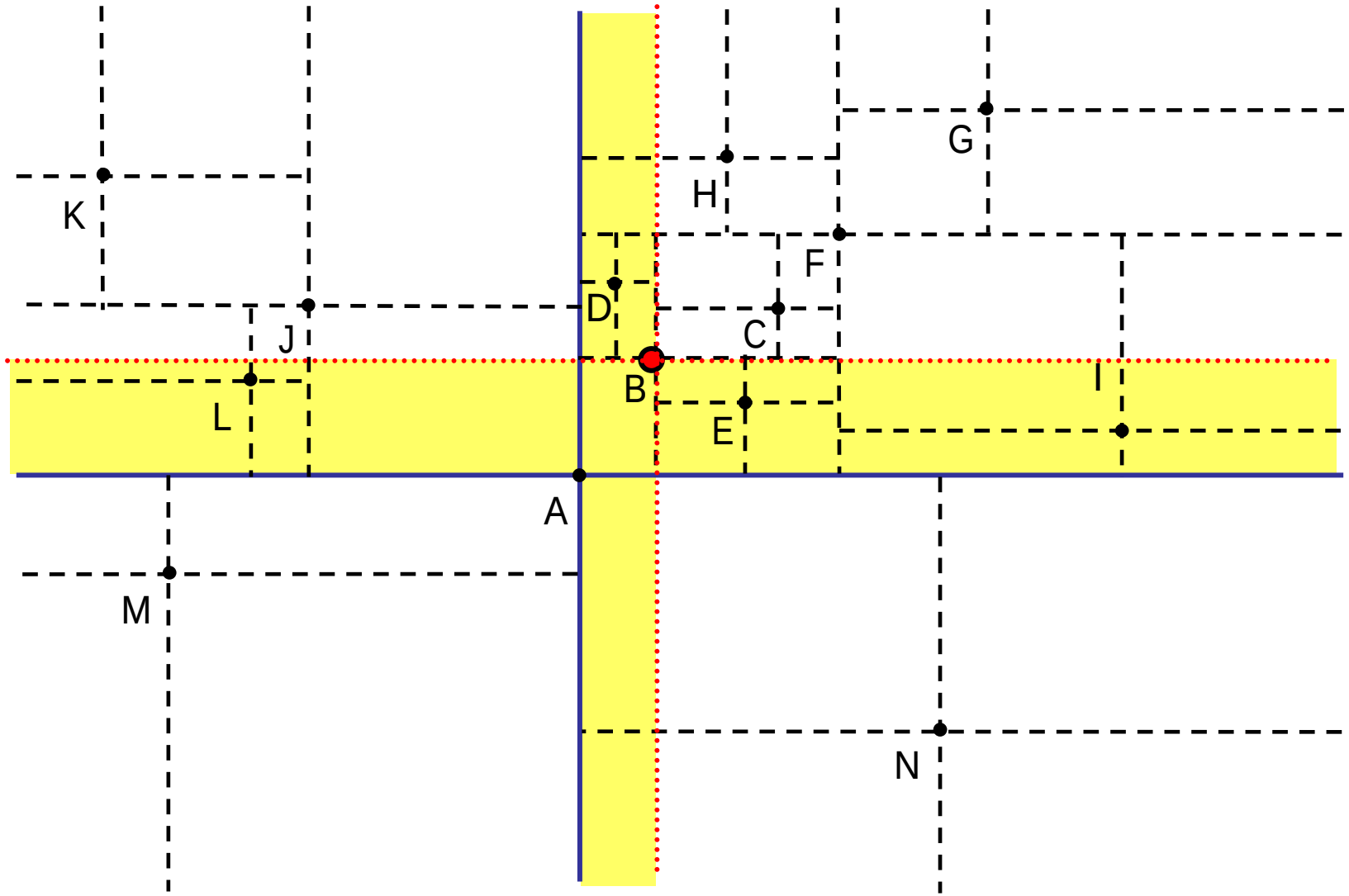
- Problem:
  - Unterbäume des gelöschten Knotens müssen eventuell neu eingefügt werden, denn sie sind nicht mehr im richtigen Quadranten bzgl. der neuen Wurzel
  - Original-Vorschlag war daher: alle diese Unterbäume neu einfügen
  - Besser: Vorschlag von Samet:

Point Quadtrees: Deletion

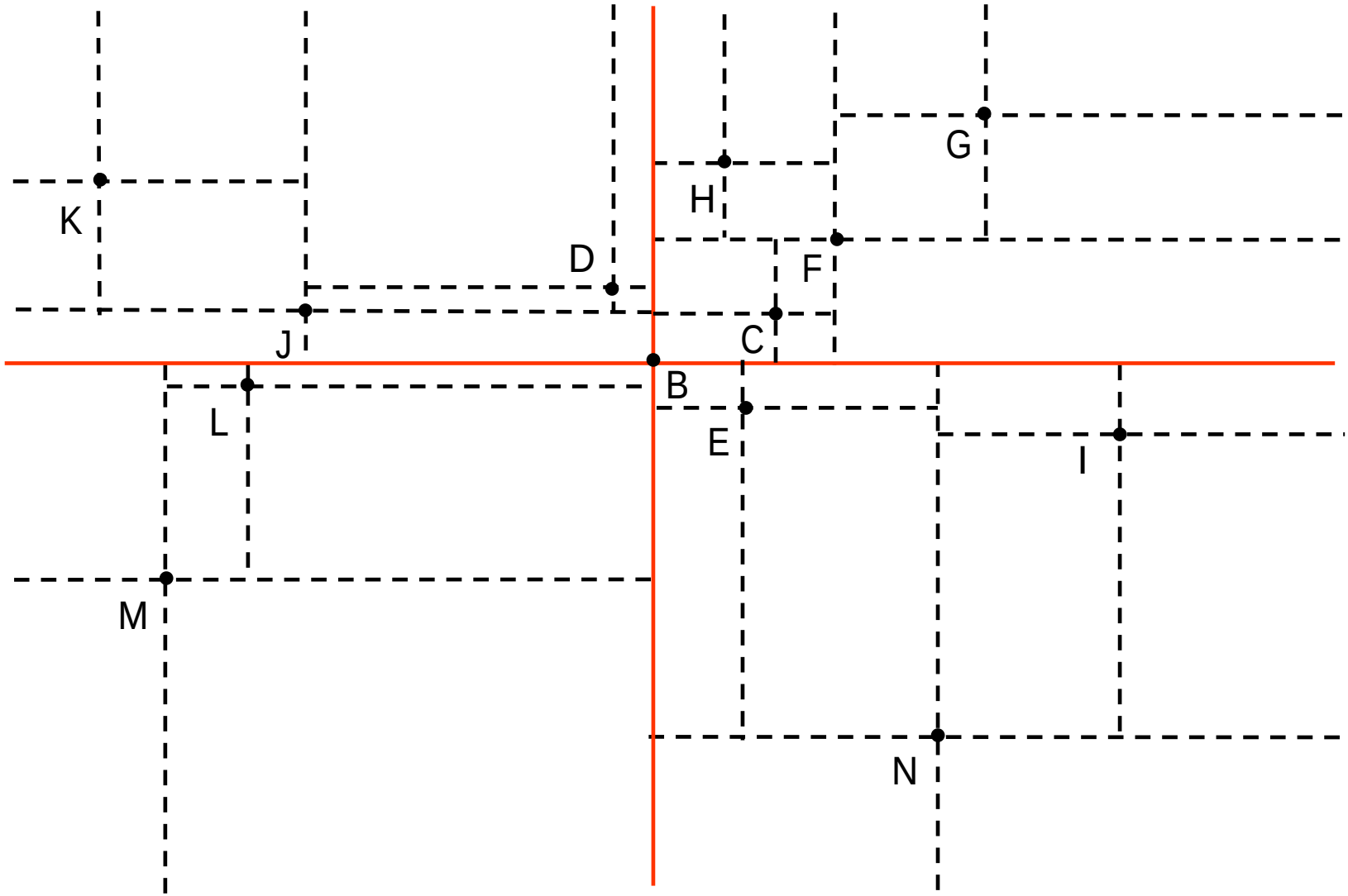
- Problem:
  - Unterbäume der Wurzel müssen neu eingefügt werden
  - Alle Knoten mit deren Unterbäumen, die in der Zwischenregion liegen, müssen neu eingefügt werden.
- Idee:
  - Wähle in jedem Unterquadranten des zu entfernenden Knotens einen Kandidaten aus, der am nächsten bei *x* oder *y*-Koordinate ist.
  - Wähle aus diesen vier Kandidaten dann den besten aus.

Delete Punkt A

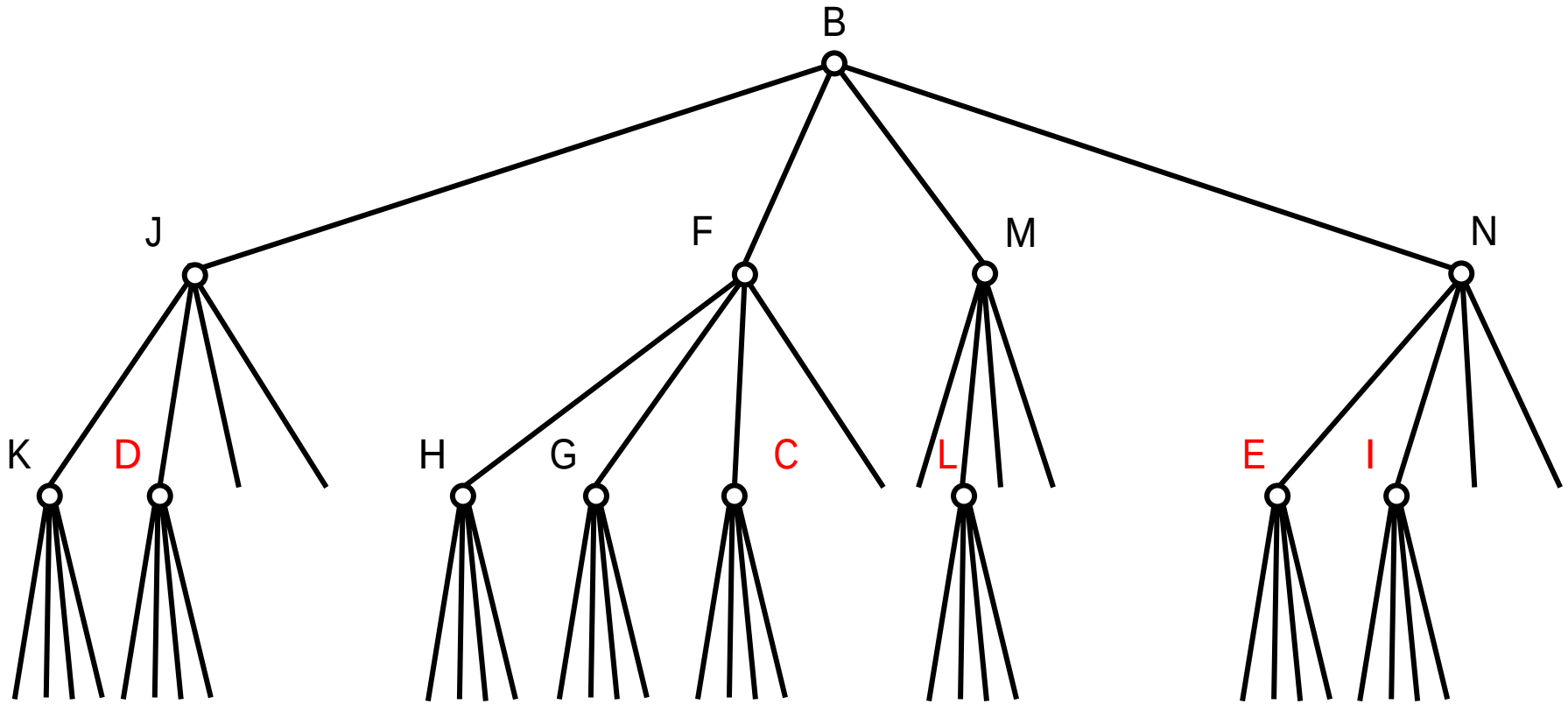
Beispiel:



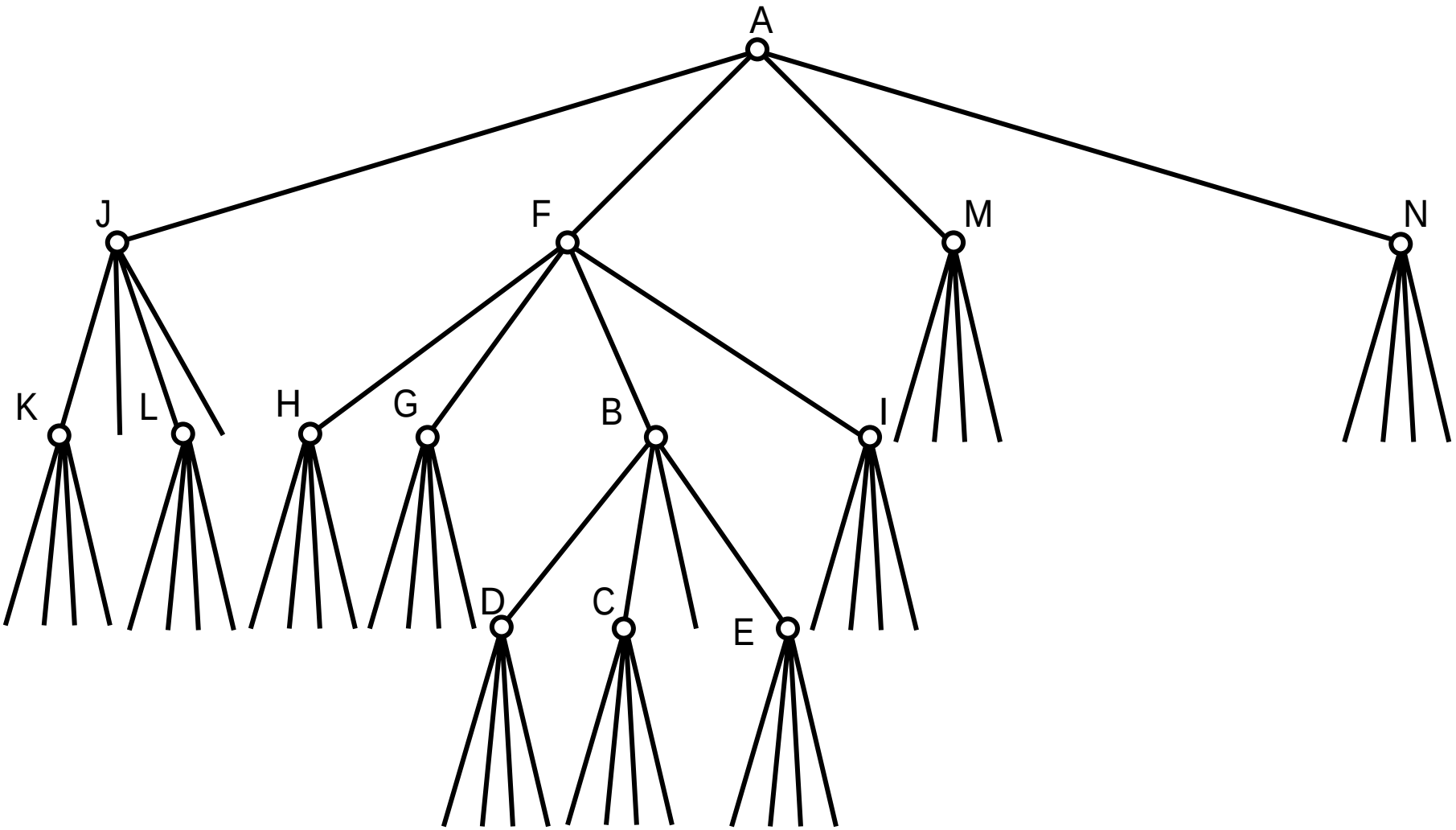
Beispiel nach Deletion von *A*



Quadtree zu Beispiel nach Deletion von A



Point Quadtree vor Delete A



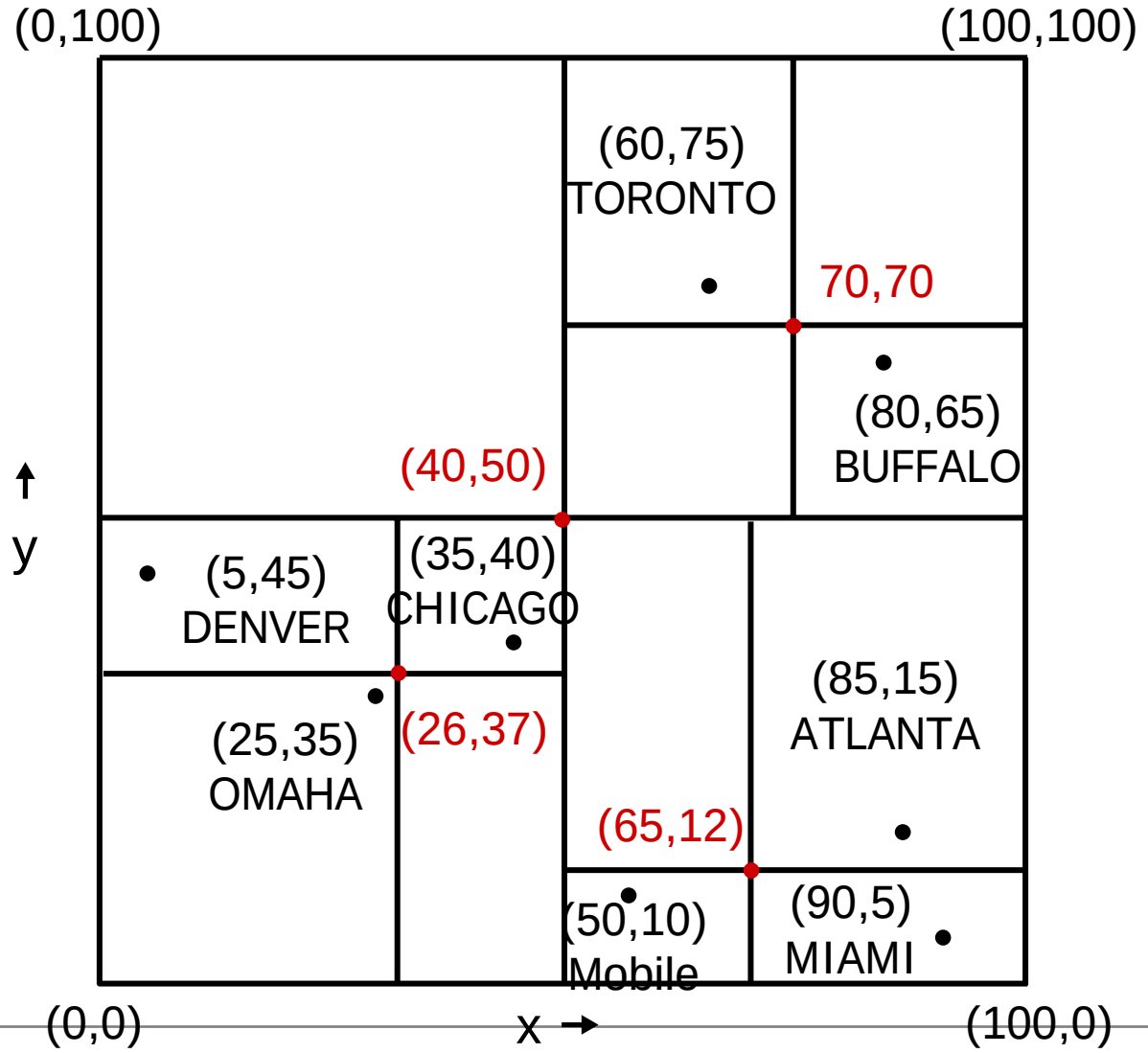
Point Quadtrees: Analyse Deletion

- Theoretisch (Bentley 1988):
  - Aufwand bei gleichmäßig verteilten Daten für die Anzahl der Neueinfügungen geht um 83% zurück gegenüber der Neueinfügung aller Teilbäume.
- Empirisch (Bentley 1988):
  - Empirisch: $N \log_4 N$ vs. deutlich größer in Original
  - Gesamtpfadlänge verringert sich leicht vs. deutlich Verlängerung in Original
- Worst Case:
  - $O(N^2)$
- Deletion sehr komplex!
- Alternative: Pseudo Quadtrees

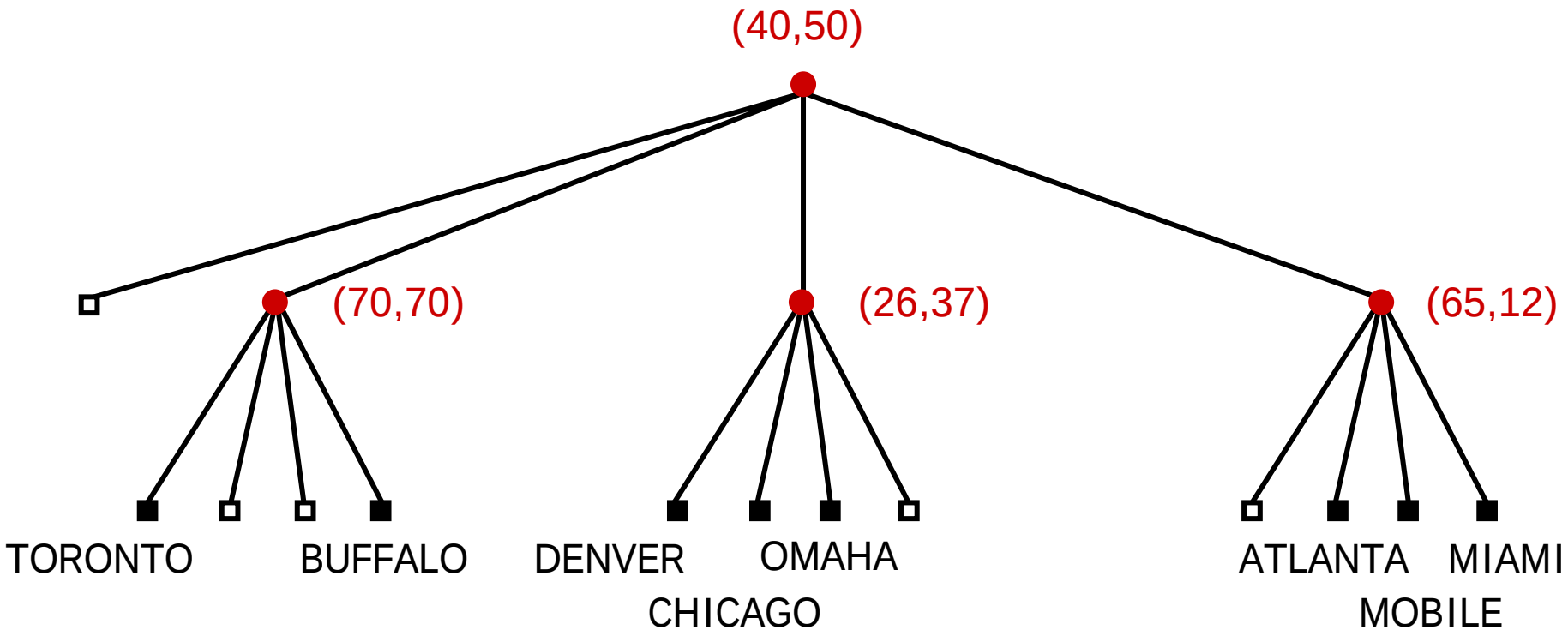
Pseudo Quadtrees

- Overmars und van Leeuwen 1982
- Idee:
  - Rekursive Aufteilung des Raumes an Punkten, die nicht Datenpunkte sind, in Quadranten, Unterquadranten, etc., bis jeder Unterquadrant höchstens einen Datenpunkt enthält.

Pseudo Quadtrees: Beispiel



Pseudo Quadtree für Beispiel



Pseudo Quadtrees:

- Aufbau:
  - Für je N Datenpunkte im k-dim. Raum existiert ein Partitionierungspunkt, so dass jeder Quadrant höchstens $\lceil N/(k+1) \rceil$ Datenpunkte enthält.
- Analyse:
  - Dann besitzt der Pseudo Quadtree eine Tiefe von höchstens $\lceil \log_{k+1} N \rceil$ und kann in Zeit $O(N \log_{k+1} N)$ gebaut werden.

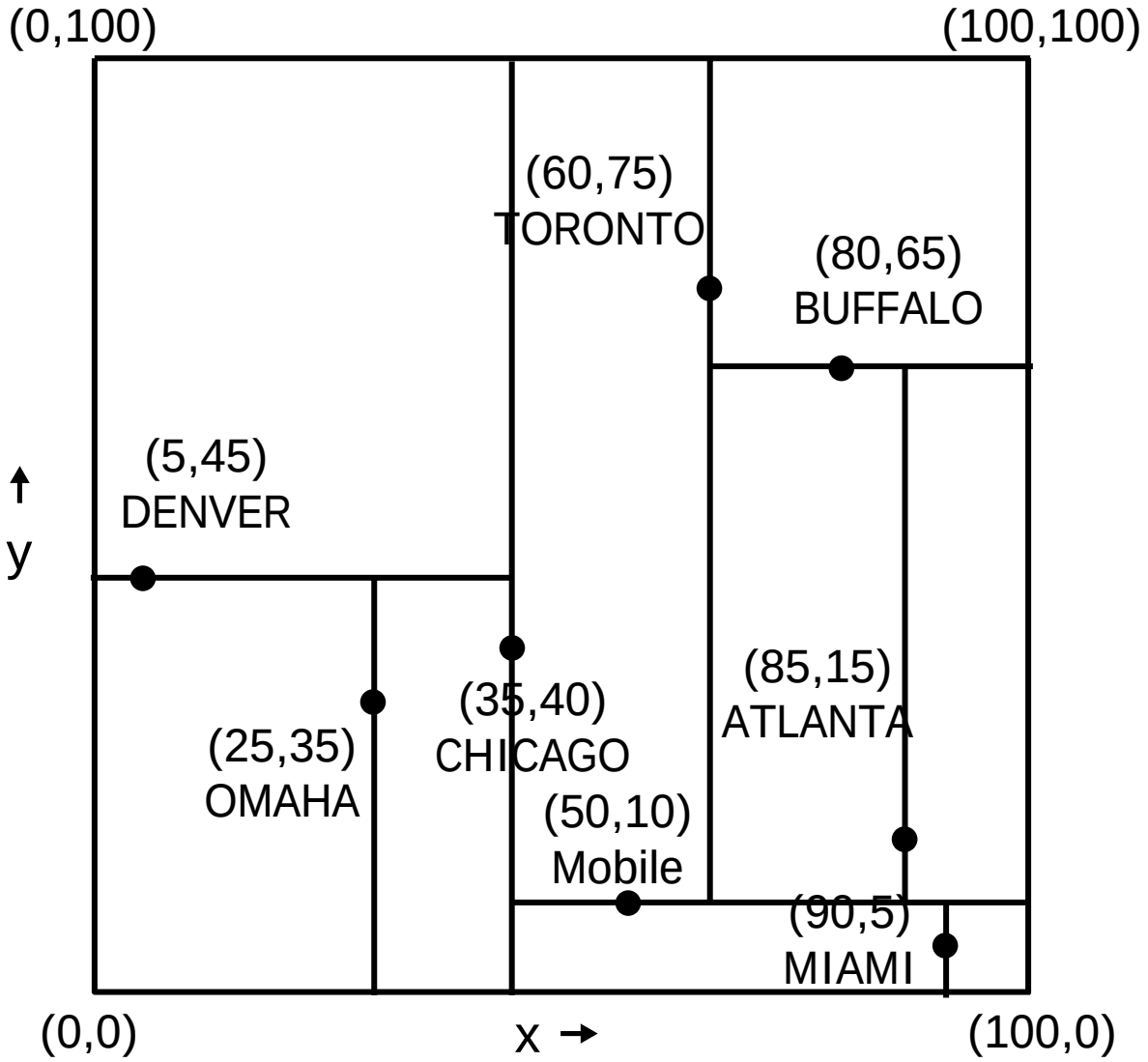
Point Quadtrees: Diskussion

- Nachteile bei höheren Dimensionen:
  - An jedem Knoten des Baumes sind *k* Vergleiche notwendig (um den Quadranten zu bestimmen)
  - Hoher Speicherplatzverbrauch: Jedes Blatt benötigt k viele NULL Pointer, auch jeder innere Knoten besitzt immer wieder NULL Pointer
  - Speicherplatzverbrauch pro Knoten: $k+2^k+1$ Wörter für Koordinaten, Kinder und Info

K-D Trees:

- Bentley 1975
- Idee:
  - Binärer Suchbaum mit der Eigenschaft, dass in jeder Tiefe nach einer anderen Dimension orthogonal aufgeteilt wird.
  - Z.B. $k=2$: nach x-Koordinaten auf den Schichten mit gerader Nummer (Beginn bei Schicht 0), nach y-Koordinaten auf den ungeraden Schichten.
  - Aufteilung basiert auf den Datenpunkten
  - BSP Trees (Fuchs, Kedem, Naylor 1980): K-D Trees, bei denen nicht orthogonal aufgeteilt wird (beliebige Hyperebenen)

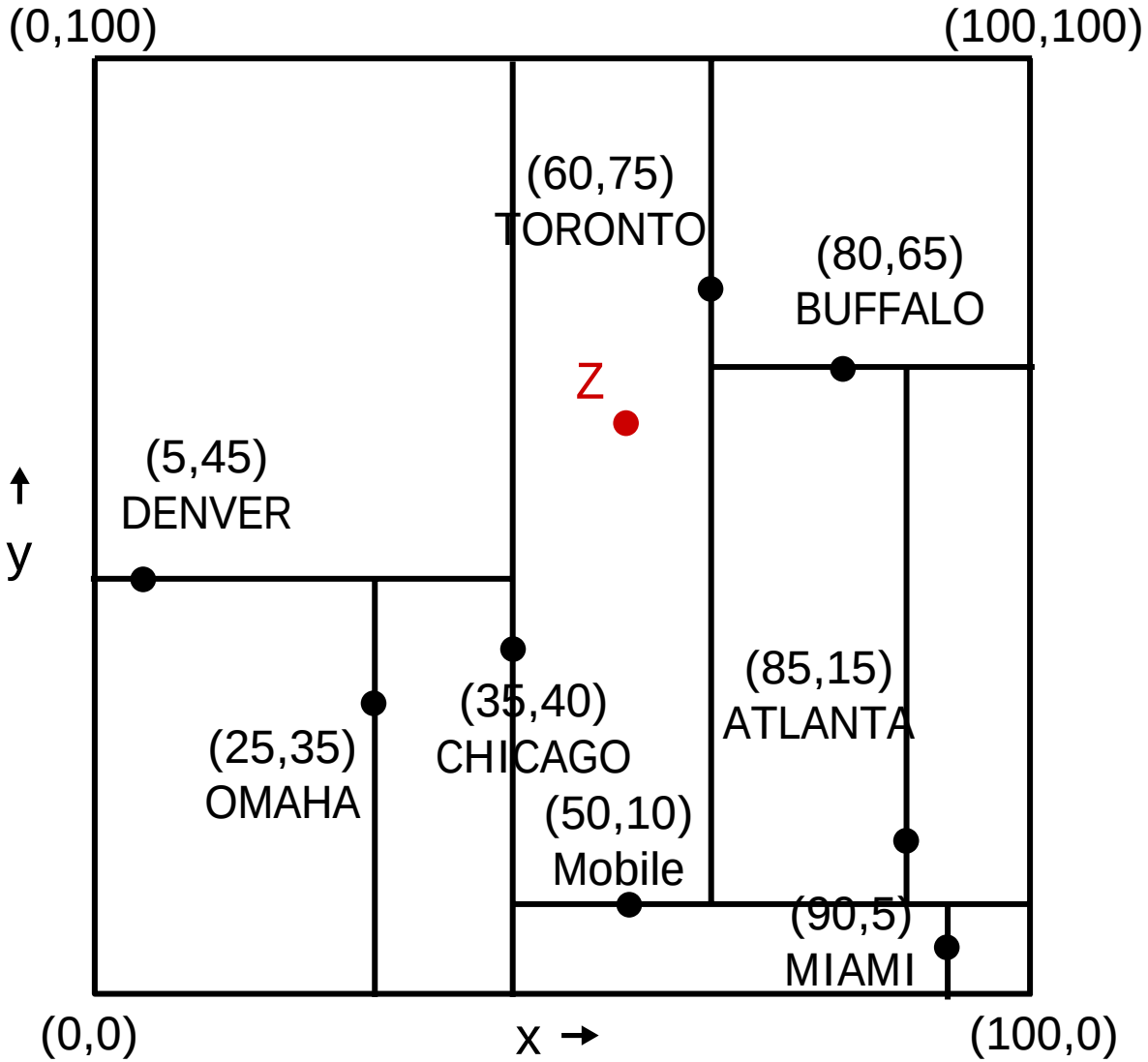
K-D Tree: Beispiel



K-D Trees:

- Datenstruktur:
  - LEFT, RIGHT: linkes und rechtes Kind (referenziert als SON(P,I) bzw. LOSON(P) und HISON(P))
  - XCOORD, YCOORD, ...
  - NAME
  - DISC: Diskriminator bzgl. *k*-tem Schlüssel
  - Abmachung für Diskriminatoren: gleiche Schlüsselwerte befinden sich im rechten Teilbaum

K-D Tree: Einfügen



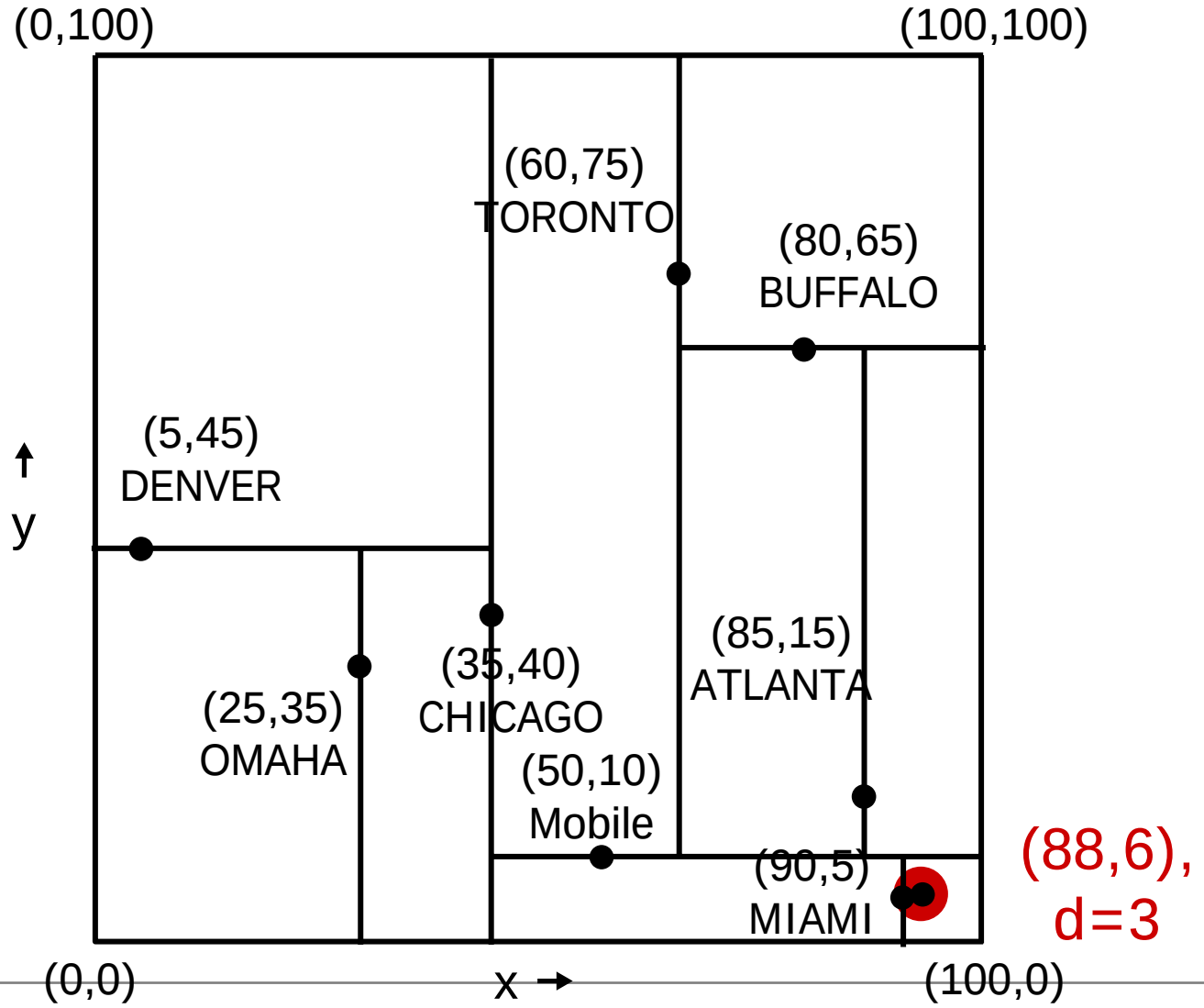
K-D Trees: INSERT

- Analog zu binären Suchbäumen:
  - Wir suchen den Punkt abwechselnde basierend auf den k Schlüsseln
  - Wenn das Blatt erreicht ist, haben wir die Einfüge-Position gefunden
- Analyse:
  - Form des Baumes hängt von Einfügereihenfolge ab
  - Durchschnittliche Tiefe: $O(\log_2 N)$
  - Worst Case Tiefe: $O(N)$, Aufbau: $O(N^2)$
  - Optimierung ähnlich wie bei Quad Trees
  - Alternative: Adaptive K-D Tree

K-D Trees: Bereichssuche

- Ausgabe aller Knoten (x,y), die sich innerhalb des Gebietes mit Radius *d* (euklidisch) um (a,b) befinden,d.h. $(a-x)^2+(b-y)^2 \leq d^2$

K-D Trees: Bereichssuche



K-D Trees: Bereichssuche

- Analyse:
  - Worst Case für vollständigen K-D Tree:
  - $O(k\, N^{1-1/k})$

Diskussion K-D Trees

- An jedem Knoten muss nur jeweils ein Schlüsselvergleich durchgeführt werden.
- Speicherplatz:
  - Blätter: es gibt nur maximal zwei NULL-Pointer
  - Benötigter Speicherplatz pro innerer Knoten: *1+1+1+1+k* für LEFT, RIGHT, NAME, DISC + *k* Wörter für *k* Schlüssel
- Adaptive K-D Trees:
  - Innere Knoten benötigen nur 5 Wörter
- Nachteil gegenüber Quadtree:
  - Quadtree ist eine parallele Datenstruktur (k Schlüsselvergleiche), K-D Trees nicht