Multi-Level Graphlayout

Dirk Ribbrock Nils Kriege Sophia Kardung

TU Dortmund - LS 11 - Graphenzeichnen

Dortmund, 11. Dezember 2007

Übersicht

- Kreuzungsminimierung mit IP
- Der Vertex-Exchange Graph
- Ergebnisse

Motivation

Kreuzungsminimieren mit einer fixen Schicht

Reduktion auf Lineares Ordnungsproblem

- Projekion $x_{vu} = 1 - x_{uv}$
- 3-Kreis Ungleichung

Probleme:

- in Praxis mehrere Schichten, alle dürfen permutiert werden
- Sugiyama: “layer-by-layer sweep”
- Endergebnis nicht unbedingt kreuzungsminimal

$\rightarrow$ ILP auf mehrere freie Schichten erweitern und exakt lösen

IP für "Multi-Level Crossing Minimisation" (MLCM)

Geg.: hierarchischer Graph mit p Ebenen, Kanten nur zwischen benachbarten Schichten (Knoten von oben nach unten/links nach rechts durchnummeriert)

Ges.: Vektor $\vec{x}$ mit $x_{ij}^r = 1$, falls i **vor** j auf Schicht r

IP für "Multi-Level Crossing Minimisation" (MLCM)

Geg.: hierarchischer Graph mit p Ebenen, Kanten nur zwischen benachbarten Schichten (Knoten von oben nach unten/links nach rechts durchnummeriert)

Ges.: Vektor $\vec{x}$ mit $x_{ij}^r = 1$, falls i **vor** j auf Schicht r

IP: Minimiere

$$\sum_{r=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{|V_r|-1} \sum_{k=i+1}^{|V_r|} \sum_{j \in N(i)} \sum_{l \in N(k)} (x_{ik}^r x_{lj}^{r+1} + x_{ki}^r x_{jl}^{r+1})$$

$$x_{ij}^r + x_{jk}^r + x_{ki}^r \leq 2 \quad 1 \leq i < j < k \leq |V_r|$$

$$x_{ij}^r + x_{ji}^r = 1 \quad 1 \leq i < j \leq |V_r|$$

$$x_{ij}^r \in \{0, 1\}$$

Umwandlung in ein ILP

Quadratische Zielfunktion ersetzen

Neue Variablen c_{ijkl}^r einführen:

$$c_{ijkl}^r = \begin{cases} 1 & \text{falls sich die Kanten } (i,j) \text{ und } (k,l) \text{ kreuzen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Projektion

Halbieren der Anzahl an Variablen: $x_{ij}^r = 1 - x_{ji}^r$

ILP für "Multi-Level Crossing Minimisation" (MLCM)

Minimiere

$$\sum_{r=1}^{p-1} \sum_{(i,j),(k,l)\in E_r} c^r_{ijkl}$$

ILP für "Multi-Level Crossing Minimisation" (MLCM)

Minimiere

$$\sum_{r=1}^{p-1} \sum_{(i,j),(k,l)\in E_r} c_{ijkl}^r$$

$$
\begin{aligned}
-c_{ijkl}^r \le x_{jl}^{r+1} - x_{ik}^r \le c_{ijkl}^r \qquad & (i,j),(k,l) \in E_r, j < l \quad (1)\\
1 - c_{ijkl}^r \le x_{jl}^{r+1} + x_{ik}^r \le 1 + c_{ijkl}^r \qquad & (i,j),(k,l) \in E_r, j > l \quad (2)\\
0 \le x_{ij}^r + x_{jk}^r - x_{ik}^r \le 1 \qquad & 1 \le i < j < k \le |V_r| \quad (3)\\
x_{ij}^r, c_{ijkl}^r \in \{0,1\} \qquad & \quad (4)
\end{aligned}
$$

ILP für "Multi-Level Crossing Minimisation" (MLCM)

Minimiere

$$\sum_{r=1}^{p-1} \sum_{(i,j),(k,l)\in E_r} c^r_{ijkl}$$

$$\begin{aligned}
-c^r_{ijkl} \le x^{r+1}_{jl} - x^r_{ik} &\le c^r_{ijkl} & (i,j),(k,l) \in E_r, j < l \quad (1)\\
1 - c^r_{ijkl} \le x^{r+1}_{jl} + x^r_{ik} &\le 1 + c^r_{ijkl} & (i,j),(k,l) \in E_r, j > l \quad (2)\\
0 \le x^r_{ij} + x^r_{jk} - x^r_{ik} &\le 1 & 1 \le i < j < k \le |V_r| \quad (3)\\
x^r_{ij}, c^r_{ijkl} &\in \{0,1\} & (4)
\end{aligned}$$

Graph *level-planar* $\Rightarrow$ alle $c^r_{ijkl} = 0$

$\Rightarrow$ Ungleichungen 1 und 2 lassen sich umschreiben zu

$$\begin{aligned}
x^{r+1}_{jl} - x^r_{ik} = 0 \quad &\Leftrightarrow x^{r+1}_{jl} = x^r_{ik}\\
x^{r+1}_{jl} + x^r_{ik} = 1 \Leftrightarrow x^{r+1}_{jl} = 1 - x^r_{ik} \quad &\Leftrightarrow x^{r+1}_{jl} \neq x^r_{ik}
\end{aligned}$$

$$x_{jl}^{r+1} = x_{ik}^{r} \quad \text{“G.d.w. } j \text{ vor } l \text{ ist, muss } i \text{ vor } k \text{ sein”}$$
$$x_{jl}^{r+1} \neq x_{ik}^{r} \quad \text{“G.d.w. } j \text{ vor } l \text{ ist, muss } k \text{ vor } i \text{ sein”}$$

Betrachte alle solche Gleichungen eines ILP

- der Graph ist genau dann *level-planar*, wenn die Gleichungen widerspruchsfrei sind
- “geschlossene Kette”: Kette von Gleichungen, an deren Beginn und Ende die gleiche Variable steht
- eine “geschlossene Kette” enthält einen Widerspruch g.d.w. sie eine ungerade Anzahl $\neq$ enthält

Definition Vertex-Exchange Graph

- Knotenmenge: Variablen x_{ik}^{r}

Definition Vertex-Exchange Graph

- Knotenmenge: Variablen x_{ik}^r
- Kantenmenge: Kante zwischen Knoten von x_{jl}^{r+1} und x_{ik}^r, falls Bedingung (1) oder (2) gelten

Definition Vertex-Exchange Graph

- Knotenmenge: Variablen x_{ik}^r
- Kantenmenge: Kante zwischen Knoten von x_{jl}^{r+1} und x_{ik}^r, falls Bedingung (1) oder (2) gelten
- Label: Falls Bedingung (1) wahr ist, ist Label der Kante "$+$", bei (2) "$-$"

Definition Vertex-Exchange Graph

- Wird aus einem Level-Graph ($=$ keine Kante darf ein Level überspringen) gebildet.

Definition Vertex-Exchange Graph

- Wird aus einem Level-Graph ($=$ keine Kante darf ein Level überspringen) gebildet.
- Knotenmenge: $V' = V_1 \times V_1 \cup V_2 \times V_2 \cup \ldots \cup V_p \times V_p$

Definition Vertex-Exchange Graph

- Wird aus einem Level-Graph (= keine Kante darf ein Level überspringen) gebildet.
- Knotenmenge: $V' = V_1 \times V_1 \cup V_2 \times V_2 \cup \ldots \cup V_p \times V_p$
- Kantenmenge: 2 Knoten $v = (v_1, v_2)$ und $w = (w_1, w_2) \in V'$ sind mit einer Kanten verbunden, wenn
  - v_1 und v_2 (bzw. w_1 und w_2) auf dem selben Level im Ursprungsgraph liegen und

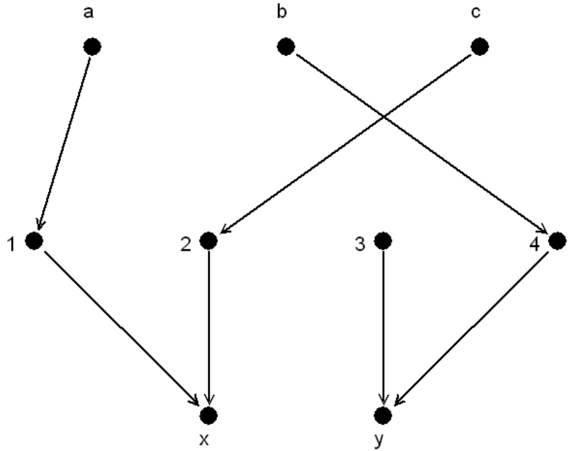
Definition Vertex-Exchange Graph

- Wird aus einem Level-Graph (= keine Kante darf ein Level überspringen) gebildet.
- Knotenmenge: $V' = V_1 \times V_1 \cup V_2 \times V_2 \cup ... \cup V_p \times V_p$
- Kantenmenge: 2 Knoten $v = (v_1, v_2)$ und $w = (w_1, w_2) \in V'$ sind mit einer Kanten verbunden, wenn
  - v_1 und v_2 (bzw. w_1 und w_2) auf dem selben Level im Ursprungsgraph liegen und
  - entweder die beiden Kanten (v_1, w_1) und (v_2, w_2) oder die beiden Kanten (v_1, w_1) und (v_2, w_2) im Urspungsgraph existieren.

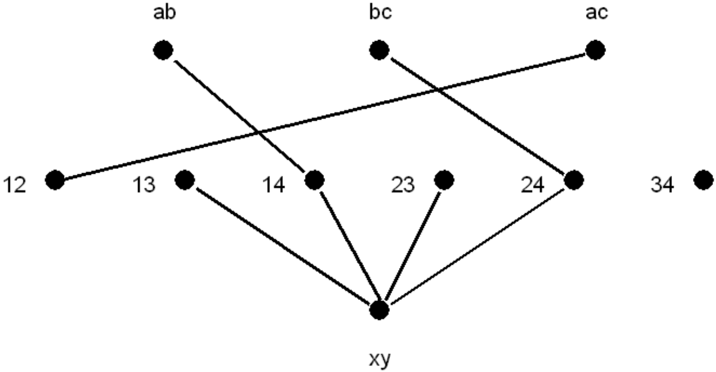
Definition Vertex-Exchange Graph

- Wird aus einem Level-Graph (= keine Kante darf ein Level überspringen) gebildet.
- Knotenmenge: $V' = V_1 \times V_1 \cup V_2 \times V_2 \cup ... \cup V_p \times V_p$
- Kantenmenge: 2 Knoten $v = (v_1, v_2)$ und $w = (w_1, w_2) \in V'$ sind mit einer Kanten verbunden, wenn
  - v_1 und v_2 (bzw. w_1 und w_2) auf dem selben Level im Ursprungsgraph liegen und
  - entweder die beiden Kanten (v_1, w_1) und (v_2, w_2) oder die beiden Kanten (v_1, w_1) und (v_2, w_2) im Urspungsgraph existieren.
- Eine Kante bekommt das Label "$+$", falls sich die Kanten im Ursprungsgraph in entsprechender Reihenfolge kreuzen, sonst das Label "$-$".

Beispiel Graph



Beispiel Vertex-Exchange Graph



Eigenschaften des Vertex-Exchange Graphen

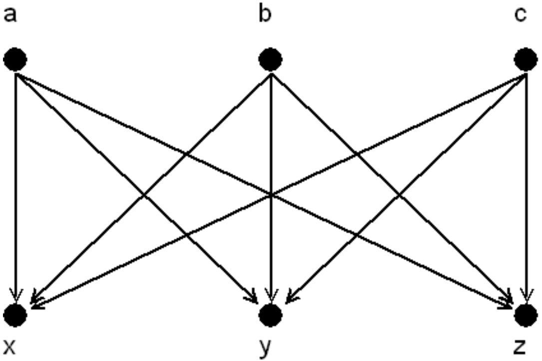
Definition

Ein Kreis C im Vertex-Exchange Graph heißt ungerade-gelabelt, falls der Subgraph von C im Ursprungsgraph eine ungerade Anzahl an Kreuzungen hat. Sonst heißt er gerade-gelabelt.

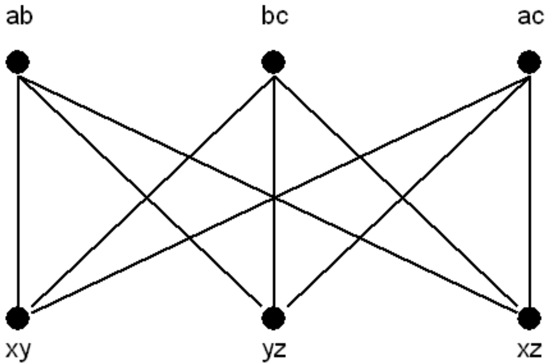
Theorem

Ein Graph G ist genau dann level-planar wenn sein Vertex-Exchange Graph keine ungerade-gelabelten Kreise besitzt.

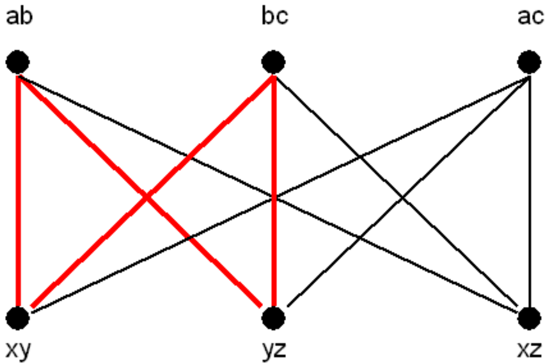
Beispiel Graph, $K_{3,3}$



Beispiel Vertex-Exchange Graph zum $K_{3,3}$



Beispiel Ungerade-gelabelter Kreis



Beweisidee zum Theorem

- Zeige, dass sich die entsprechenden LP Bedingungen äquivalent zu den Eigenschaften des Vertex-Exchange Graphen verhalten.
- Zeige, dass die 3er-Kreis-Ungleichungen erfüllt werden.
- Dies wird durch Konstruktion von gerade- und ungerade-gelabelten Pfaden gezeigt, aus denen nicht level planaren Ursprungsgraphen entstehen.

Zusätzliche Ungleichungen

Ziel: Nur gerade gelabelte Kreise.

Um das zu erreichen

- in schon gerade gelabelten Kreisen immer eine gerade Anzahl c_{ijkl} tauschen
- in ungerade gelabelten Kreisen immer eine ungerade Anzahl c_{ijkl} tauschen
  $\rightarrow$ Kreis danach gerade gelabelt

$\forall$ ungeraden Kreise C_u:

$$\sum_{e \epsilon C_u} c_e = 2k + 1, \quad mit \quad 0 \leq k \leq |C_u| /2 - 1$$

$\forall$ geraden Kreise C_g:

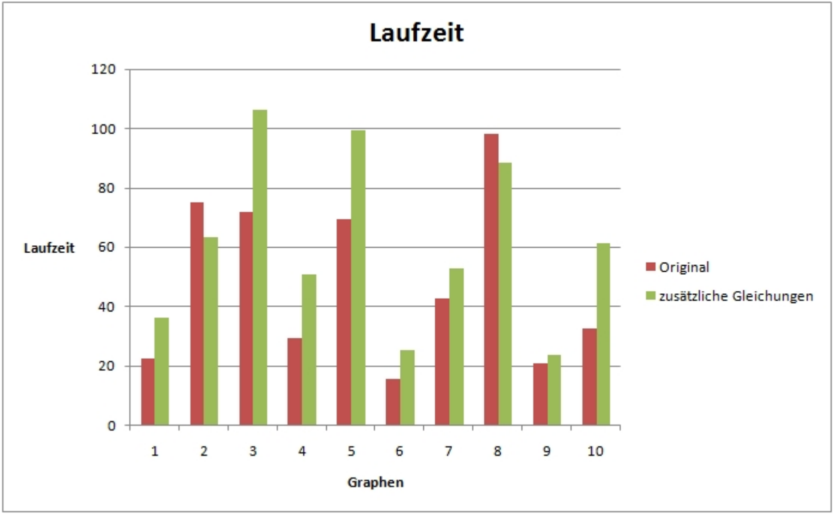
$$\sum_{e \epsilon C_g} c_e = 2k, \quad mit \quad 0 \leq k \leq |C_g| /2$$

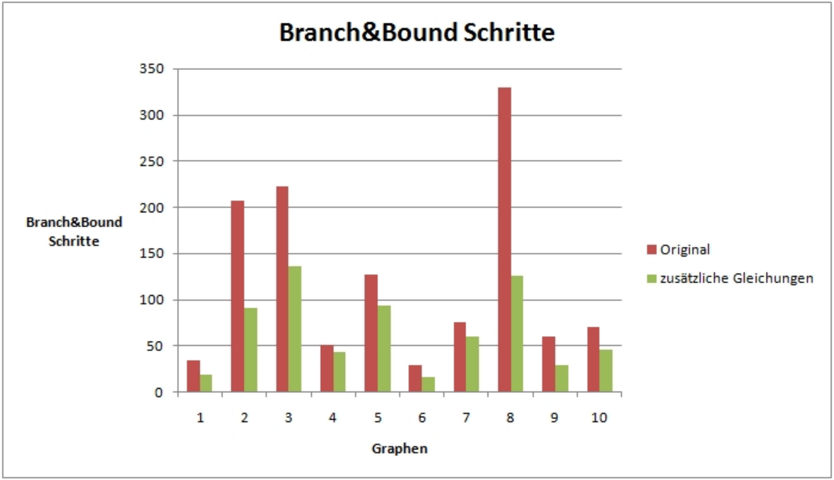
In der Praxis lohnt sich auch schon:

$$1 \leq \sum_{e \epsilon C} c_e \leq |C| - 1$$

Experimente

- 10 Zufallsgraphen
- 8 Schichten
- 12 Knoten pro Schicht (96 gesamt)
- 110 Kanten gesamt
- DEC Alpha 300 Mhz


Laufzeit
120
100
80
60
40
20
0
Laufzeit
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Graphen
Original
zusätzliche Gleichungen


Branch&Bound Schritte
350
300
250
200
150
100
50
0
Branch&Bound Schritte
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Graphen
Original
zusätzliche Gleichungen

Ende

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit