Kap. 5: Planaritätsbasierte Verfahren

Prof. Dr. Petra Mutzel

Lehrstuhl für

Algorithm Engineering LS11

Universität Dortmund

23. VO WS07/08 21. Januar 2008

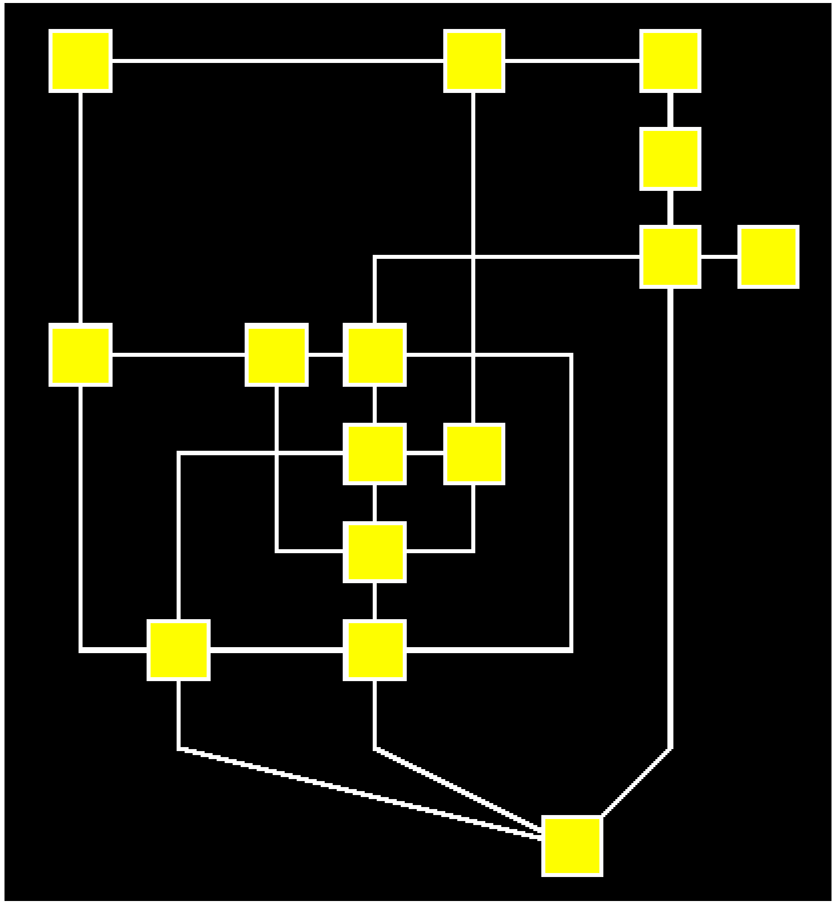
Literatur für diese VO

- M. Kaufmann, D. Wagner (Eds.): Drawing Graphs: Methods and Models, Lecture Notes in Computer Science, Tutorial, Vol. 2025, 2001, ISBN 3-540-42062-2.

- M. Jünger, P. Mutzel (Eds.): Kapitel 2: Technical Foundations aus: Graph Drawing Software, Mathematics and Visualization, Springer Verlag, 2004, ISBN 3-540-00881-0.

Kap. 5: Planaritätsbasierte Verfahren

- Zustandsdiagramme
- State Charts
- Datenmodelle
- ER-Diagramme
- UML Diagramme
- ...



Batini, Nardelli, Tamassia 1986

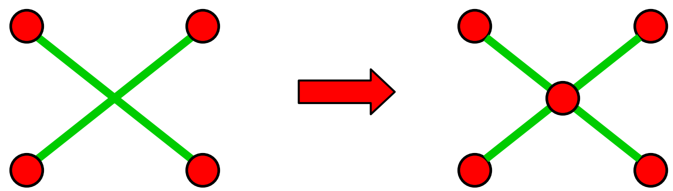
Planarisierungsverfahren - Idee

(1) Finde kreuzungsminimale Zeichnung

Kreuzungsminimierungsproblem

➡ Größtes Planares Untergraphenproblem

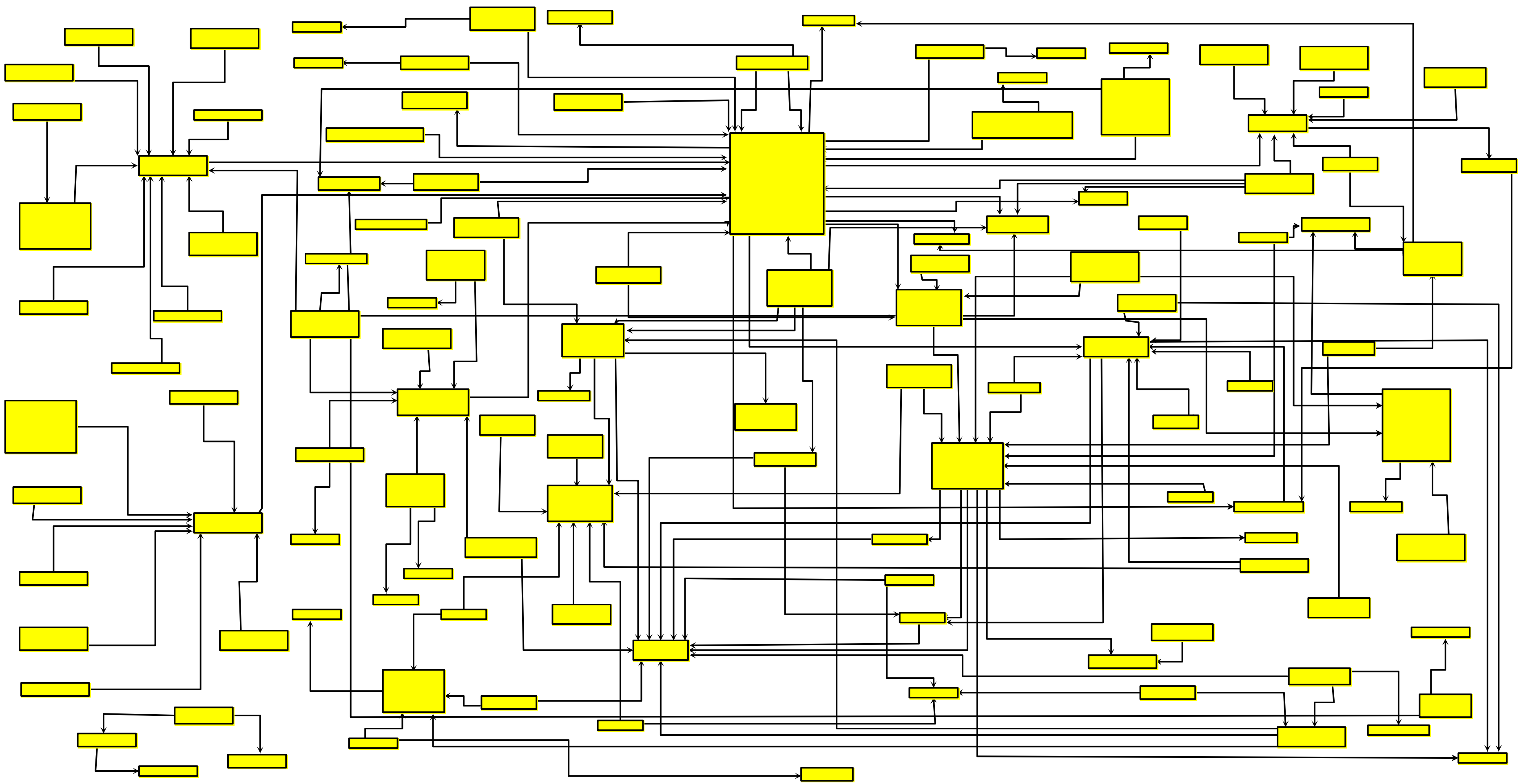
(2) Ersetze die Kreuzungen durch Knoten



(3) Verwende planares Zeichenverfahren

Animation des Planarisierungsverfahrens mittels größter planarer Untergraph

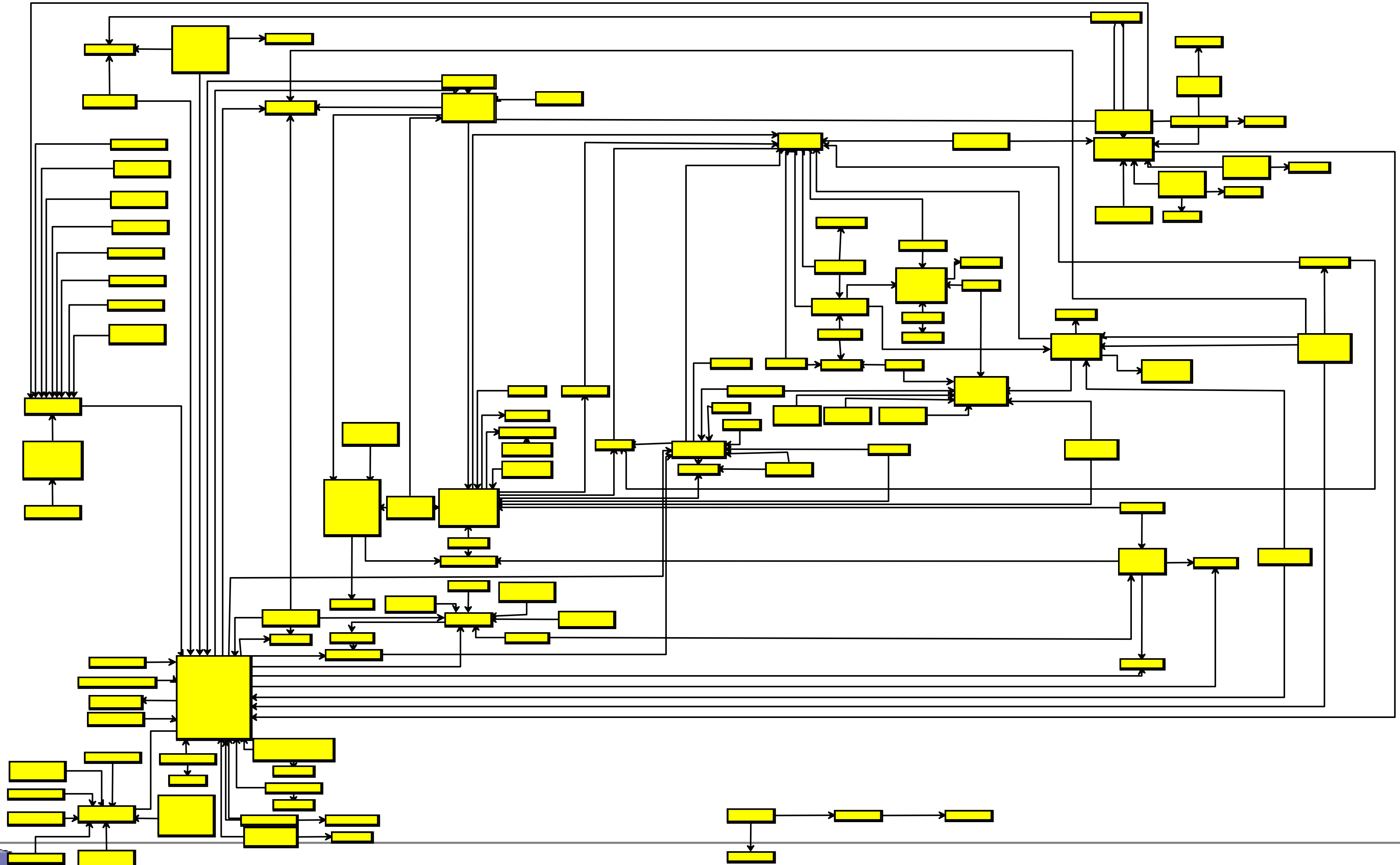
Datenbank Versicherung



Datenbank Versicherung

Datenmodell	Originalzeichnung	Unsere Zeichnungen
- 120 Objekte - 161 Relationen	- 122 Kreuzungen - nicht-hierarchisch - Anomalien	- Hierarchie - Planarisierung (7 Kreuzungen)

Datenbank Versicherung



Planarisierungsverfahren

1. Grösstes Planares Untergraphenproblem

   ➡ Graphenalgorithmen

   NP-schwierige Optimierung

2. Berechnung einer kombinatorischen Einbettung

   Planaritätstest ✓, Einbettung mit maximaler Außenfläche ✓, Einbettung mit Constraints ✓

3. Wiedereinfügen der entfernten Kanten

   Kürzeste Wege Algorithmen ✓, Optimales Kanteneinfügen ✓, Kanteneinfügen mit Constraints ✓

4. Anwendung planarer Zeichenalgorithmen

   Planare straightline Verfahren mittels kanonischer Ordnung ✓
   ➡ Planare orthogonale Verfahren mittels Netzwerkflüssen

zu 1) Bestimmung eines größten planaren Untergraphen

- **Definition:** Ein Untergraph $H=(W,P)$ mit $W \subseteq V$, $P \subseteq E$, eines Graphen G heisst (ungewichteter) **größter planarer Untergraph** (**maximum pl**anar **s**ubgraph, **MPS**) von G, wenn für jeden planaren Untergraphen $H'=(W',P')$ gilt: $|P'| \leq |P|$.

Bemerkungen:

- MPS ist äquivalent zum Problem in G die kleinste Kantenmenge zu entfernen, so dass der Restgraph planar ist.
- Berechnung eines MPS ist NP-schwer.

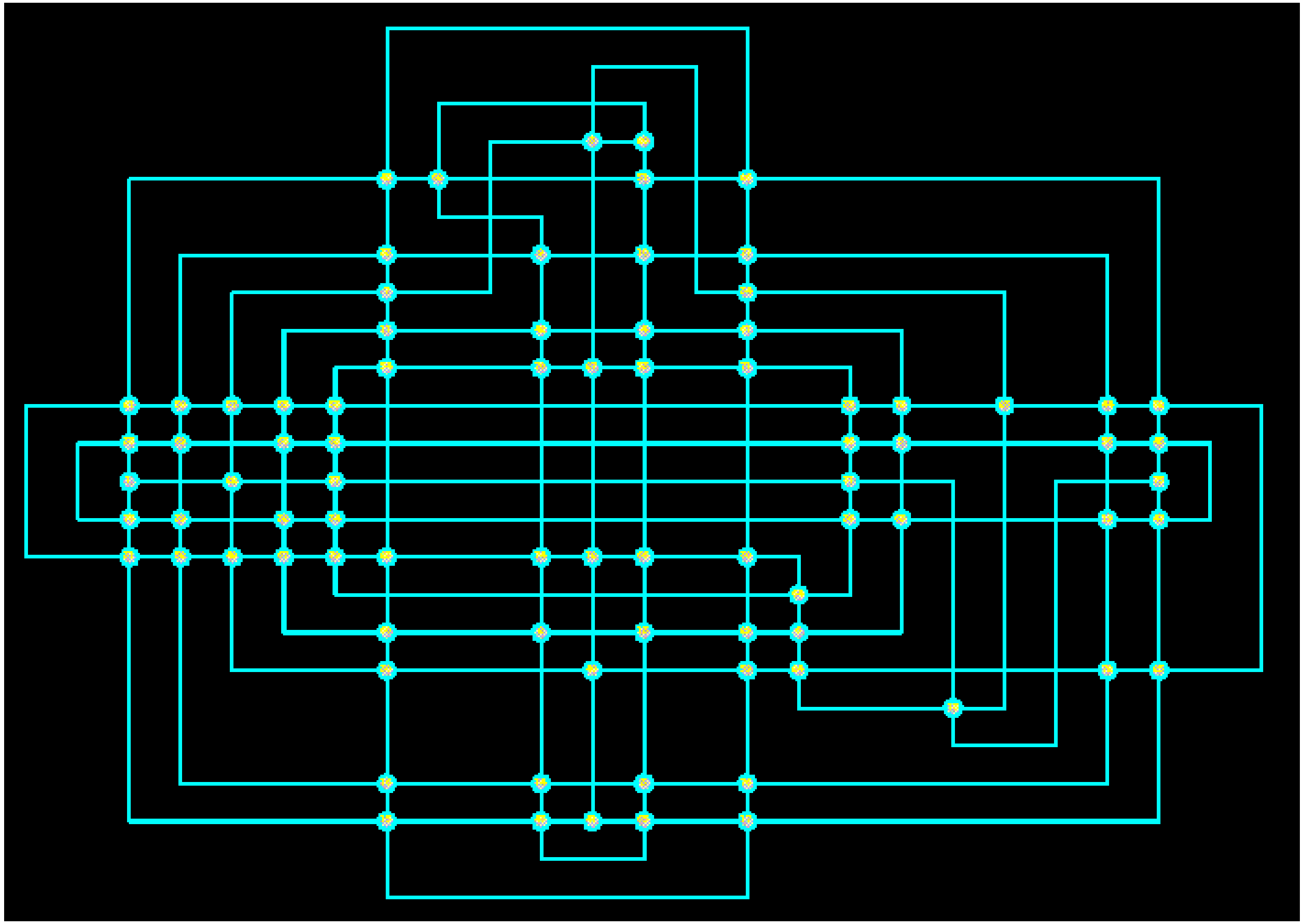
Maximal planarer Untergraph

- **Definition:** Ein Untergraph $H=(V,P)$ mit $P \subseteq E$ eines Graphen G heisst **maximal planarer Untergraph** (**maximal** planar subgraph) von G, wenn keine Kante $e \in E \setminus P$ existiert, so dass $H=(V, P \cup \{e\})$ planar ist.

Bemerkungen:

- Beispiel:
- Ein maximal planarer Untergraph kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Maximum vs. Maximal Planar Subgraph



Verfahren zur Bestimmung eines maximal planaren Untergraphen

Gegeben: $G=(V,E)$, Greedy-Algorithmus:

1. Initialisierung: $P=\emptyset$
2. Für alle $e \in E$:
   - Falls $G'=(V,P\cup\{e\})$ planar ist, dann: $P= P\cup\{e\}$

Behauptung: $H=(V,P)$ ist ein maximal planarer Untergraph von G.

Beweis: Untergraph: ✓ planar: ✓ maximal: existiert eine Kante, so dass $P\cup\{e\}$ planar? nein ✓

Laufzeit: naiv implementiert: quadratisch: $|E||V|$, aber es gibt auch inkrementelle Planaritätstests, dann geht es (theoretisch) fast linear. Mit SPQR-Baum: $|E| \log |V|$.

Qualität des Greedy-Verfahrens

Behauptung: Die optimale Lösung ist höchstens 3 Mal besser als die gefundene Lösung, d.h. der obige Greedy-Algorithmus ist ein 1/3-Approximationsalgorithmus für das MPS Problem.

Beweis: Die berechnete Greedy-Lösung enthält mindestens V -1 Kanten. Die optimale Lösung höchstens $3|V|-6$ Kanten.

Damit: $|P_{ALG}| \geq |V|-1 \geq |V|-2 = 1/3\ (3|V|-6) \geq 1/3|P_{OPT}|$

s. Beispiel

Bemerkung: Das ist zwar theoretisch schön (konstanter Approximationsfaktor), aber bezüglich der entfernten Kanten in der Praxis nicht gut genug.

Alternative Verfahren

- Planarer Untergraph basierend auf Planaritätstest von Lempel-Even-Cederbaum
  - Untergraphen sind zwar nicht maximal, aber dafür relativ groß (besser als Greedy, obwohl nicht maximal)
  - Es gibt eine Reihe von Publikationen, die jeweils versucht haben, die Untergraphen maximal zu machen, die aber alle fehlerhaft sind
  - wir konnten dann zeigen, dass es grundsätzlich nicht möglich ist, mit dem Verfahren maximale Untergraphen zu erhalten

- **Maximal** planare Untergraphen basierend auf dem Planaritätstest von Hopcroft-Tarjan

Offenes Problem: Planare Untergraphen basierend auf dem Planaritätstest von Boyer-Myrvold.

Verfahren zur Bestimmung eines maximum planaren Untergraphen

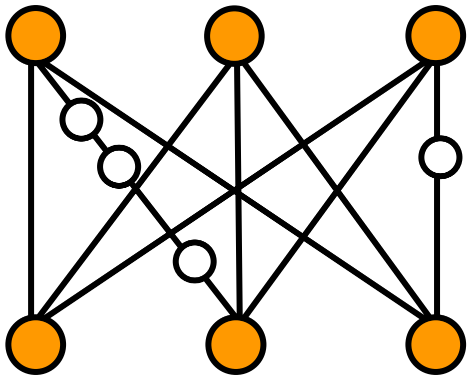
- Es existiert ein 4/9-Approximationsalgorithmus
  [Calinescu, Fernandes, Finkler, Karloff: A better approximation algorithm for finding planar subgraphs, Journal of Algorithms, vol. 27, no. 2, 269-302, 1998]

- **Branch-and-Cut Algorithmus für MPS: →**

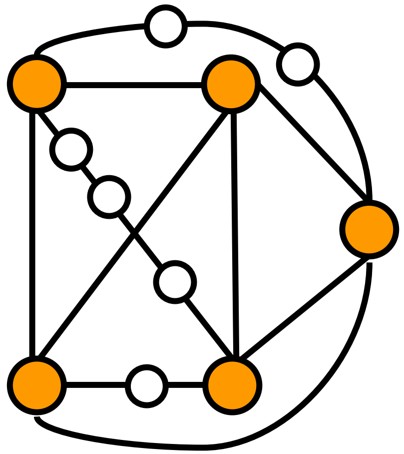
ILP-Formulierung für das Maximum Planar Subgraph Problem

Basiert auf:

Kuratowski´s Theorem: Ein Graph ist **planar** if genau dann wenn er keine Unterteilung von $\mathbf{K_{3,3}}$ oder $\mathbf{K_5}$ enthält.



$K_{3,3}$



K_5

Unterteilungen

Integer Linear Programming Formulierung

Variablen x_e für alle Kanten e

$$x_e \in \begin{cases} 0 & \text{Kante } e \text{ ist nicht im Subgraph} \\ 1 & \text{Kante } e \text{ ist im Subgraph} \end{cases}$$

Zielfunktion: $$\max \sum_{e \in E} x_e$$

Kuratowski Ungleichungen:

$$\sum_{e \in K} x_e \leq |K| - 1 \quad \forall \text{ Kuratowski Subgraphen } K \text{ in } G$$

$K_{3,3}$ and K_5 Unterteilungen

Branch-and-Cut Algorithmus für Maximum Planare Subgraphen

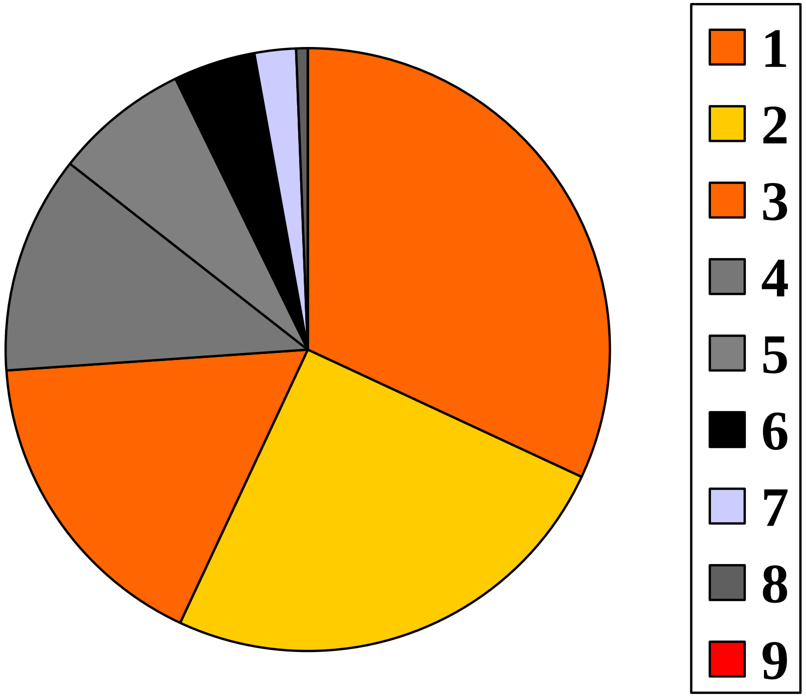
- Planares Untergraphenpolytop: [Jünger, Mutzel ´93, ´96]
  - Kuratowski Ungleichungen, Euler Ungleichungen, s-chorded cycle inequalities, even Moebius ladders, ...

- Branch-and-cut code (ABACUS) [Fialko ´98, Jansen 2007]
  - Heuristische Separationsroutinen für Kuratowski und Euler Ungleichungen

Leider keine Zeit mehr uns das genauer anzuschauen
schade ☹

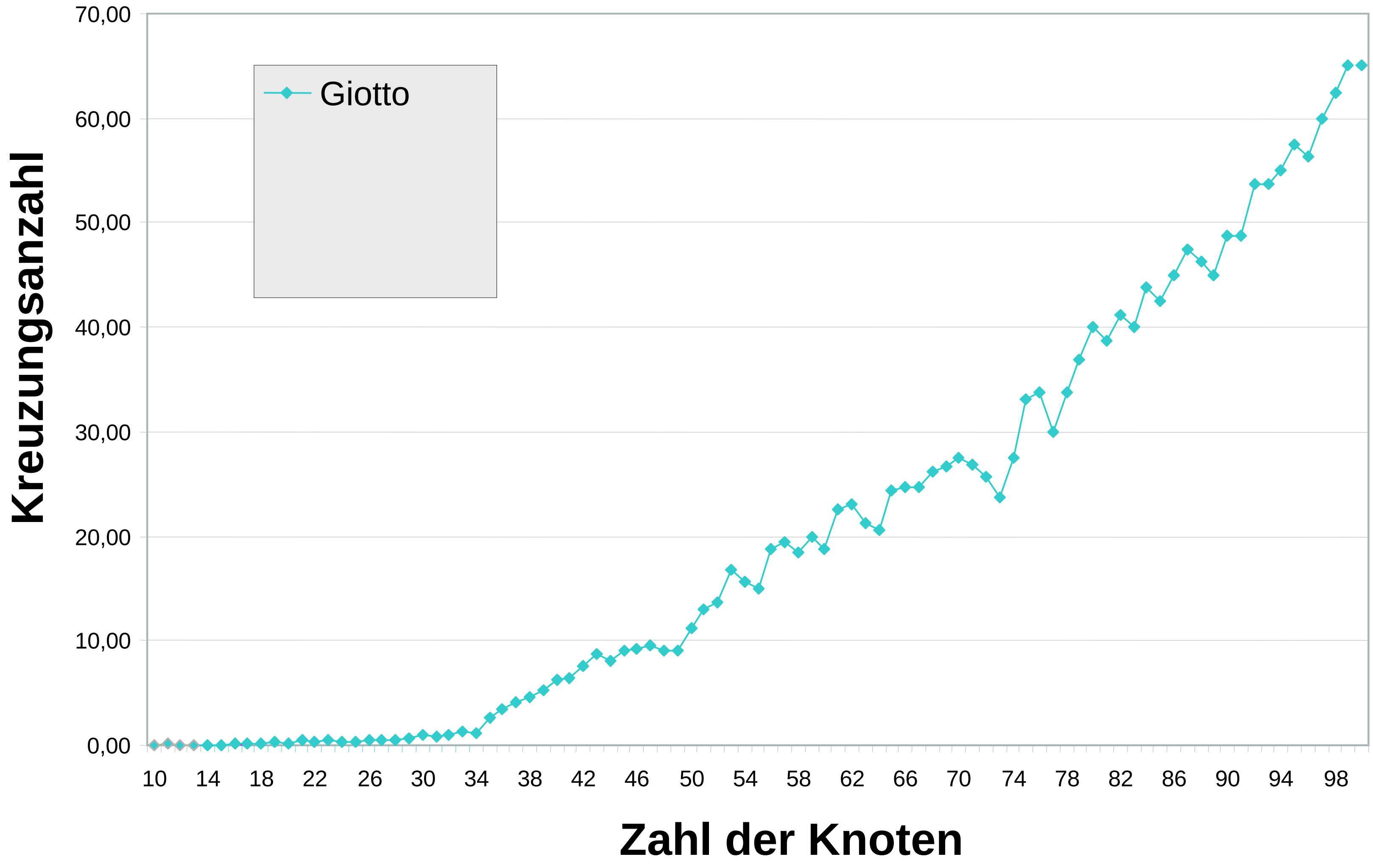
Experimentelle Resultate aus dem Jahr 1997

Anzahl der entfernten Kanten



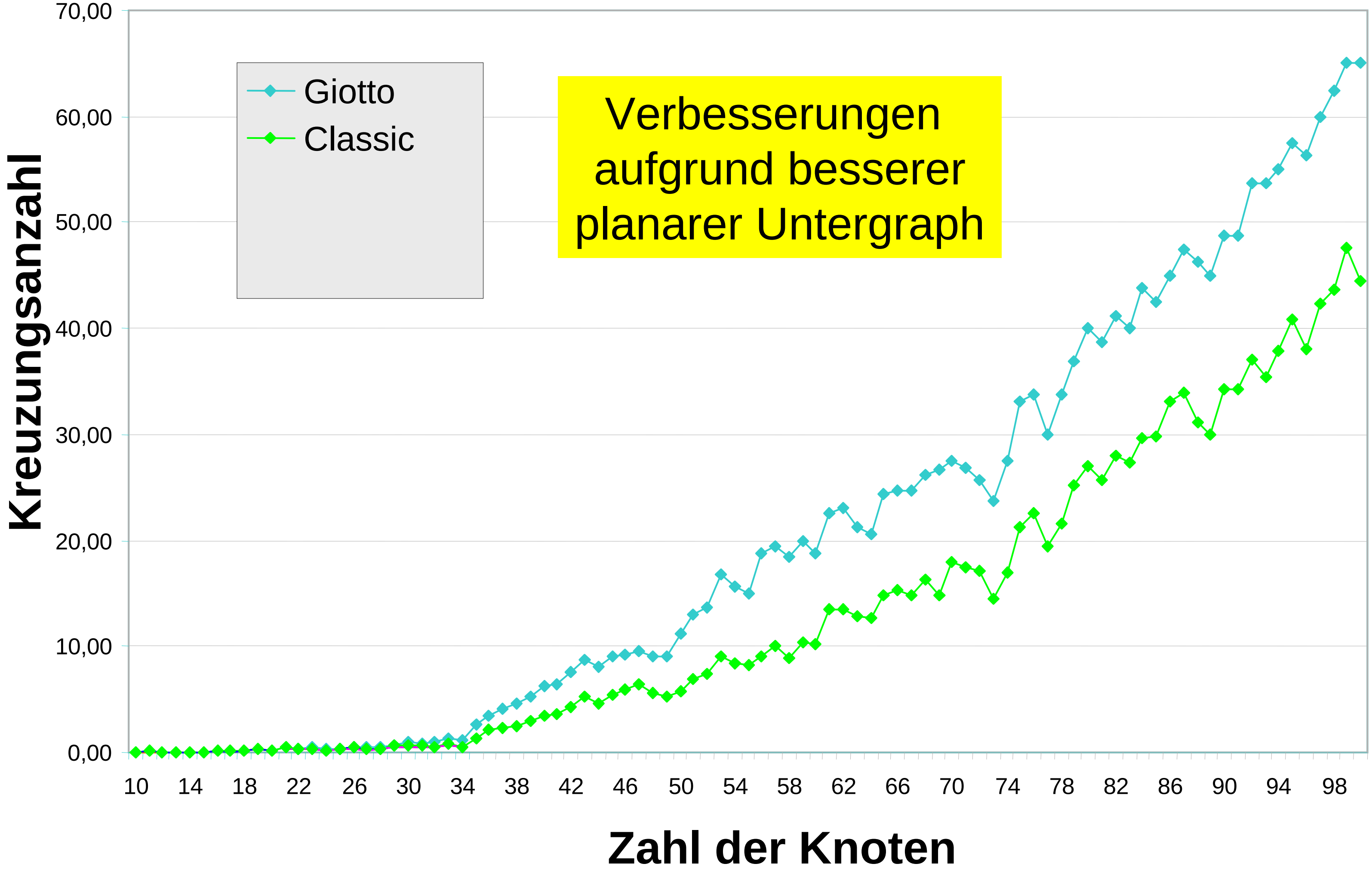
- 11529 Graphen (Rom-Lib)
  - 3280 planar
  - 8249 nicht-planar
- 10-100 Knoten
- Ergebnisse bis zu 65 Knoten:
  - insgesamt 7925 Graphen
  - 4654 nicht-planar
  - 4460 (96%) optimal innerhalb 1 hour CPU

Fortschritte bei der Planarisierungsmethode
Anzahl der Kreuzungen für Benchmarks

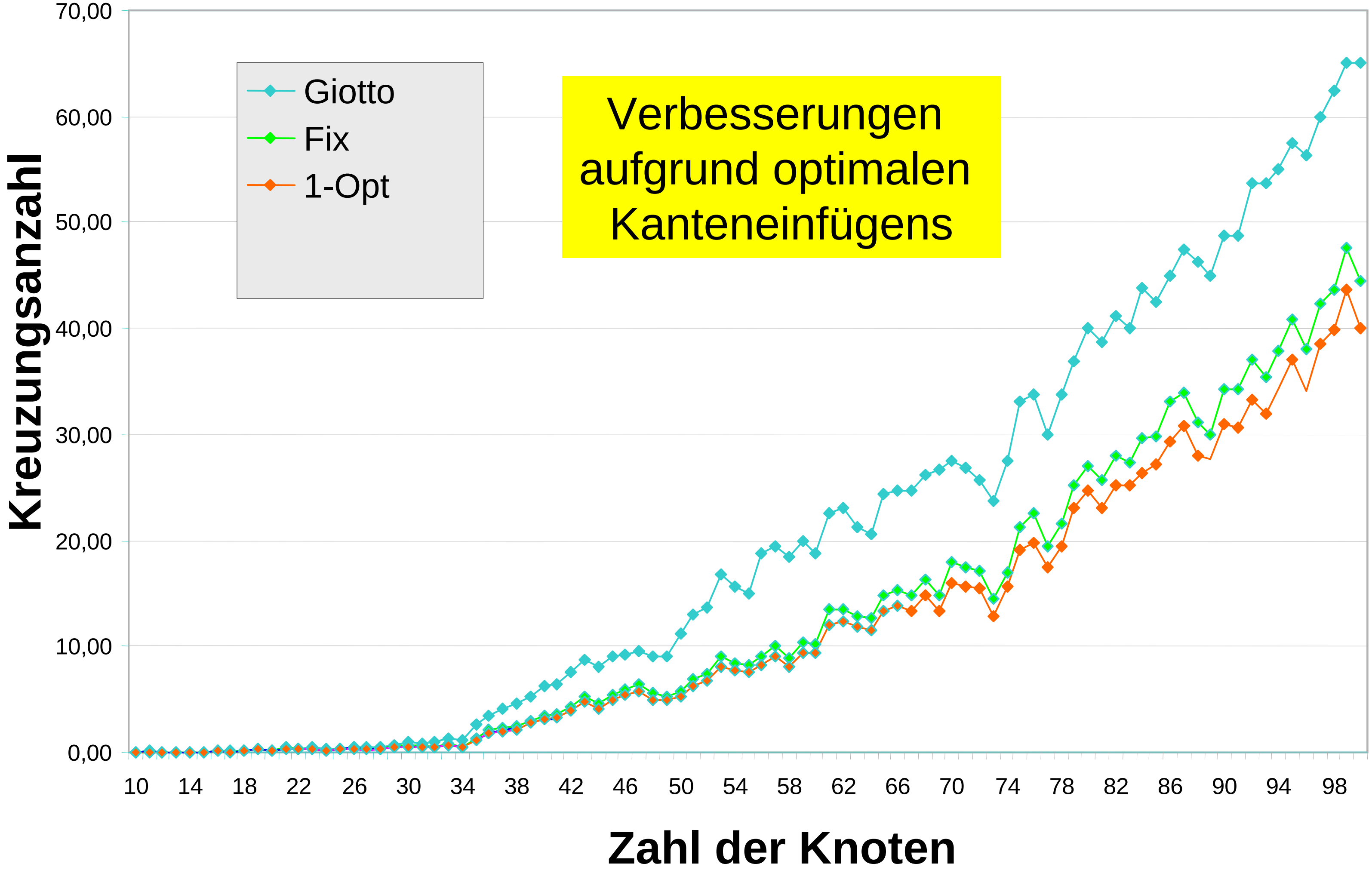


Anzahl der Kreuzungen für Benchmarks

(Unsere experimentelle Werte 2004)



Anzahl der Kreuzungen für Benchmarks



Anzahl der Kreuzungen für Benchmarks