

## Kap. 4: Planare Zeichenverfahren

4.1 Einführung (kurz)

4.3 Geradlinige planare Zeichenverfahren

Prof. Dr. Petra Mutzel

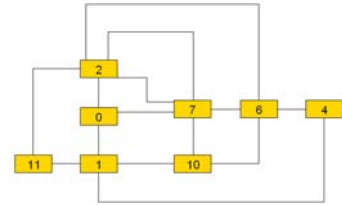


Lehrstuhl für  
Algorithm Engineering LS11  
Universität Dortmund

14./17./18. VO    WS07/08    27.11./10.+11.12.2007

## Planare Zeichenverfahren

- Zustandsdiagramme
- State Charts
- Datenmodelle
- ER-Diagramme
- UML Diagramme
- ...



Planare Verfahren: AGD



Petra Mutzel: Automatisches Zeichnen von Graphen, WS07/08

2

## Überblick zu Kapitel 4

4.1 Einführung Planarität, Einbettungen, Überblick

4.2 Planaritätstest und Einbettungsberechnung

→ 4.3 Geradlinige planare Zeichenverfahren

4.4 Orthogonale planare Verfahren (flussbasiert)

Petra Mutzel: Automatisches Zeichnen von Graphen, WS07/08

3

## Literatur für diese VO

• Originalartikel: De Fraysseix, Pach und Pollack: How to draw a planar graph on a grid, *Combinatorica* 10 (1990) 41-51

• Auch interessant: Chrobak und Payne: A linear time algorithm for drawing planar graphs, *Information Processing Letters* 54 (1995) 241-246

Petra Mutzel: Automatisches Zeichnen von Graphen, WS07/08

4

## 4.1 Einführung Planarität

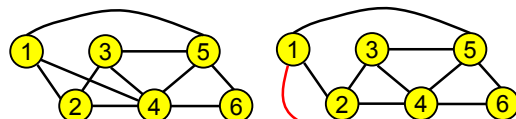
- $G=(V,E)$  ist **planar** genau dann, wenn eine injektive Abbildung der Knoten und Kanten von  $G$  auf die Ebene existiert, die folgende Bedingungen erfüllt:
  - Jedem Knoten wird ein Punkt zugeordnet und
  - jede Kante  $vw$  wird auf eine stetige Kurve abgebildet, die die Bilder von  $v$  und  $w$  verbindet.
  - Dabei dürfen die Bilder verschiedener Kanten nur die Bilder ihrer gemeinsamen Endpunkte gemeinsam haben.

• Das Bild einer solchen Abbildung heißt **planare Zeichnung**.

•  $G$  ist also planar, wenn er eine planare Zeichnung besitzt (d.h. ohne Kantenkreuzungen in die Ebene gezeichnet werden kann).

## Planare Graphen

- $G$  heißt **eben**, wenn  $G$  planar in die Ebene eingebettet ist.
- Ein ebener Graph unterteilt die Ebene in verschiedene zusammenhängende **Gebiete (Flächen, engl.: faces)**. Eine davon ist unbegrenzt, sie heißt **Außenfläche**.



$G$  ist planar

und jetzt auch eben

Petra Mutzel: Automatisches Zeichnen von Graphen, WS07/08

6

### Kombinatorische Planare Einbettungen

Geordnete Liste (Uhrzeiger) der Nachbarn für jeden Knoten:

- a: c, e, b
- b: e, d, a
- c: a, d
- d: b, c
- e: b, a

Liste (Gegenuhrzeiger) der Randknoten jeder Region:

- A: a, b, e
- B: b, a, c, d
- C: c, a, e, b, d

Ein planarer 3-zusammenhängender Graph hat genau 2 kombinatorische Einbettungen

### Kombinatorische Einbettungen

Ein (planarer) Graph kann exponentiell viele verschiedene Einbettungen besitzen

Graph G mit  $n$  Knoten und  $(n-2)!$  kombinatorischen Einbettungen

Viele Optimierungsprobleme über der Menge aller kombinatorischen Einbettungen sind NP-schwierig

5 Petra Mutzel: Automatisches Zeichnen von Graphen, WS07/08 8

### Theorem von Kuratowski

Ein Graph ist genau dann **planar** wenn er **keine Unterteilung** des  $K_{3,3}$  und  $K_5$  enthält.

Planaritätstest und Einbettungsberechnung: lineare Zeit (s. nächste VO)

5 Petra Mutzel: Automatisches Zeichnen von Graphen, WS07/08 9

### 4.3 Geradlinige planare Zeichenverfahren

- 4.3.1 Einführung
- 4.3.2 Kanonische Ordnung
- 4.3.3 Platzierung der Knoten
- 4.3.4 Algorithmus und Analyse
- 4.3.5 Erweiterungen

5 Petra Mutzel: Automatisches Zeichnen von Graphen, WS07/08 10

### 4.3.1 Einführung

- Theorem:** Jeder planare Graph kann geradlinig (ohne Kantenknicken) kreuzungsfrei gezeichnet werden.
- Beweis:** Dies wurde unabhängig von Wagner 1936, Fáry 1948 und Steinitz 1951 bewiesen.

Geradlinige planare Zeichnungen heißen auch manchmal „Fáry-Einbettungen“.

5 Petra Mutzel: Automatisches Zeichnen von Graphen, WS07/08 11

### Einführung

- Diese Beweise waren zwar konstruktiv, führten aber zu Gitterzeichnungen mit exponentiellem Platzverbrauch.
- Es war lange eine offene Frage, ob geradlinige planare Zeichnungen auch mit polynomieller Gittergröße erzielt werden können.

**Lösung:** De Fraysseix, Pach und Pollack (1988 STOC-Konferenz → später Zeitschriftenartikel): Algorithmus in Gitter  $(2n-4) \times (n-2)$  bei  $n$  Knoten.

5 Petra Mutzel: Automatisches Zeichnen von Graphen, WS07/08 12

## Film: Planar Straightline Graph Drawing

von  
Petra Mutzel  
und  
Ralf Brockenauer  
Max-Planck-Institut für Informatik, 1998



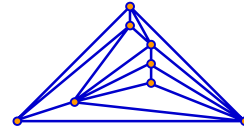
## Algorithmus von de Fraysseix et al. für triangulierte planare Graphen

**Geradlinige Zeichnungen** für triangulierte planare Graphen:

Eingabe: Graph  $G$  mit planarer Einbettung

• Idee: 2-Phasen Algorithmus:

- (1) Berechne eine kanonische Ordnung
- (2) Füge iterativ einzelne Knoten hinzu, dabei werden jeweils ausgewählte Mengen von bereits platzierten Knoten um je 1 Einheit nach rechts verschoben



## Triangulierte Graphen

### Definitionen:

- Ein **maximal planarer Graph** ist ein einfacher planarer Graph, zu dem keine Kante mehr hinzugefügt werden kann, ohne die Planarität zu zerstören.
- Eine **Triangulation** ist ein einfacher planar eingebetteter Graph in dem jede Fläche durch einen 3-er Kreis begrenzt ist.

**Theorem:** Für einen einfachen planar eingebetteten Graphen  $G=(V,E)$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- $|E|=3|V|-6$
- $G$  ist eine Triangulation
- $G$  ist ein maximal planarer Graph

## Triangulierte Graphen

**Theorem:** Für einen einfachen planar eingebetteten Graphen  $G=(V,E)$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- $|E|=3|V|-6$
- $G$  ist eine Triangulation
- $G$  ist ein maximal planarer Graph

### Beweis:

ii.  $\Leftrightarrow$  i.: Jede Fläche ist durch 3-Kreis begrenzt und  $G$  ist zusammenhängend  $\Leftrightarrow$  zähle Kanten über Flächen:  
 $2|E|=3|F| \Leftrightarrow$  Einsetzen in Eulers Polyederformel liefert

$$|E|=3|V|-6 \quad \checkmark$$

ii.  $\Leftrightarrow$  iii.: Bw. durch Widerspruch: Annahme: Es existiert Fläche  $f \in F$  mit  $e(f) > 3 \Leftrightarrow$  Es existiert eine Kante  $e \notin E$  deren Hinzufügen Planarität erhält.

## 4.3.2 Kanonische Ordnung

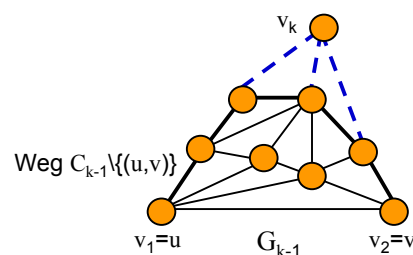
**Theorem:** Sei  $G=(V,E)$ ,  $n=|V|$ , ein triangulierter planar eingebetteter Graph mit Außenfläche  $u,v,w \in V$ . Dann existiert eine **Knotenordnung**  $v_1=u, v_2=v, v_3, v_4, \dots, v_{n-1}, v_n=w$  mit den folgenden Eigenschaften für  $4 \leq k \leq n$ .

1. Der von  $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$  induzierte Teilgraph  $G_{k-1}$  ist 2-zusammenhängend und die Außenfläche wird durch einen Kreis  $C_{k-1}$  begrenzt, der die Kante  $(u,v)$  enthält.
2.  $v_k$  liegt in der Außenfläche von  $G_{k-1}$  und seine Nachbarn in  $G_{k-1}$  bilden ein wenigstens 2-elementiges Intervall auf dem Weg  $C_{k-1} \setminus \{(u,v)\}$ .

Diese Ordnung heißt **kanonische Ordnung**.

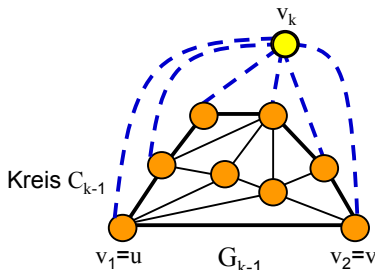
Beweis: gleich

## Kanonische Ordnung: Visualisierung



## Beweis-Idee:

**Idee (konstruktiv):** Entferne nacheinander  $v_n, v_{n-1}, \dots, v_3$   
**Problem:** muss 2-zusammenhängend bleiben, dies ist bei Nachbar zu Innensehne nicht der Fall.



## Kanonische Ordnung

**Lemma:** Sei  $G=(V,E)$ ,  $n=|V|$ , ein einfacher planar eingebetteter Graph und  $u=u_1, u_2, \dots, u_k=v$  ein Kreis in  $G$ . Dann existiert ein Knoten  $w' \notin \{u, v\}$  auf dem Kreis, der nicht adjazent zu einer inneren Sehne des Kreises ist.

**Beweis:** Sei  $(u_i, u_j)$ ,  $j > i + 1$  eine innere Sehne mit  $j-i$  minimum.

- Wegen Minimalität gilt: keine innere Sehne adjazent zu  $u_{i+1}$  endet im Bereich  $u_i, u_{i+1}, \dots, u_j$
- Wegen Planarität gilt: keine innere Sehne adjazent zu  $u_{i+1}$  endet im Bereich  $\{u_1, u_2, \dots, u_k\} \setminus \{u_i, \dots, u_j\}$
- Wähle also  $w' = u_{i+1}$  ✓

## Beweis (kanonischen Ordnung)

**Beweis:** Wir definieren  $v_n, v_{n-1}, \dots, v_3$  durch Rückwärtsinduktion.

- **Induktionsanfang:**
- $v_n = w$ , Sei  $G_{n-1}$  der Teilgraph von  $G$  nach Entfernung von  $w$
- $G$  ist trianguliert: Die Nachbarn von  $w$  formen Kreis  $C_{n-1}$ , der  $(u, v)$  enthält und Außenfläche von  $G_{n-1}$  definiert. ✓
- **Induktionsannahme:**
- Sei  $v_k$  definiert für  $k > i$ , so dass  $G_{k-1}$  die Bedingungen 1) und 2) erfüllt. Sei  $C_{k-1}$  der die Außenfläche begrenzende Kreis. Wir wenden das Lemma auf  $C_i$  in  $G_i$  ( $i=k-1$ ) an.
- Es ex.  $w' \in C_i \setminus \{u, v\}$  mit  $w'$  ist nicht adjazent zu einer Innensehne von  $C_i$
- Für  $v_i := w'$  erfüllt  $G_{i-1}$  die Bedingungen 1) und 2) ✓

## 4.3.3 Platzierung

**Satz von de Fraysseix, Pach, Pollack:** Jeder planar eingebettete Graph mit  $|V|=n$  Knoten besitzt eine Fary-Einbettung auf einem  $(2n-4) \times (n-2)$  Gitter.

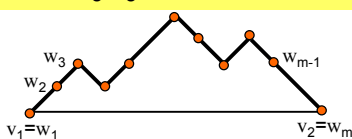
**Beweis:** Konstruktiv: Vorbemerkungen:

- Gitterposition von  $v \in V$ :  $P(v) = (x(v), y(v)) \in \mathbb{Z}$
- Manhattan Distanz von  $A = (x_1, y_1)$  und  $B = (x_2, y_2)$ :  
 $d(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ .
- Es gilt: Haben  $A$  und  $B$  gerade Manhattan Distanz, dann hat der Schnitt der Geraden durch  $A$  mit Steigung 1 und durch  $B$  mit Steigung -1 ganzzahlige Koordinaten:
- Schnittpunkt  $\mu(A, B) = 1/2 (x_1 - y_1 + x_2 + y_2, -x_1 + y_1 + x_2 + y_2)$

## Beweis

**Algorithmus:** Sei  $v_1, v_2, \dots, v_n$  die kanonische Ordnung. Knotenliste  $L(w)$  für alle  $w \in V$ .

- **Initialisierung:** Setze  $P(v_1) = (0, 0)$ ,  $P(v_2) = (2, 0)$ ,  $P(v_3) = (1, 1)$  und  $L(v_i) = \emptyset$  für alle  $i = 1, \dots, n$ ,  $L(v_2) = \{v_2\}$
- **Induktionsvoraus.: In Schritt  $k$  sei  $G_{k-1}$  eingebettet, so dass**
- (1)  $P(v_1) = (0, 0)$ ,  $P(v_2) = (2(k-1), 0)$
- (2)  $x(w_1) < x(w_2) < \dots < x(w_m)$ , wobei  $C_{k-1} = (v_1 = w_1, w_2, \dots, w_{m-1}, w_m = v_2)$
- (3) Alle Kanten (Liniensegmente)  $(P(w_i), P(w_{i+1}))$  für  $i = 1, 2, \dots, m-1$  haben Steigung +1 oder -1



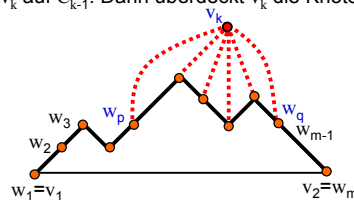
## Beweis ff

- **Induktionsvoraus.:** In Schritt  $k$  sei  $G_{k-1}$  eingebettet, so dass
- (1)  $P(v_1) = (0, 0)$ ,  $P(v_2) = (2(k-1), 0)$
- (2)  $x(w_1) < x(w_2) < \dots < x(w_m)$ , wobei  $C_{k-1} = (v_1 = w_1, w_2, \dots, w_{m-1}, w_m = v_2)$
- (3) Alle Kanten (Liniensegmente)  $(P(w_i), P(w_{i+1}))$  für  $i = 1, 2, \dots, m-1$  haben Steigung +1 oder -1

- **Induktionsschritt:** Seien  $w_p, w_{p+1}, \dots, w_{q-1}, w_q$  die Nachbarn von  $v_k$  auf  $C_{k-1}$ . Dann überdeckt  $v_k$  die Knoten  $w_{p+1}, \dots, w_{q-1}$

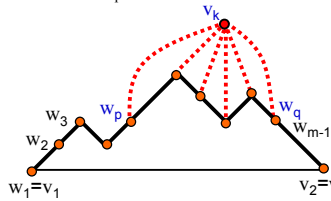
**Problem:**  
 $v_k$  muss alle Knoten  $w_{p+1}, \dots, w_{q-1}$  sehen.

**Lösung:**  
 Sicherstellung durch geeignete Verschiebungen



## Beweis fff

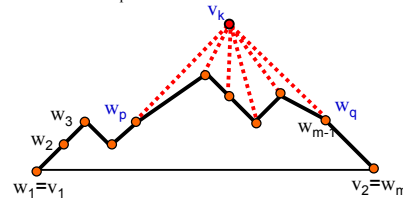
- For each  $v \in \bigcup_{i=q}^m L(w_i)$  do  $x(v) := x(v) + 2$
- For each  $v \in \bigcup_{i=p+1}^{q-1} L(w_i)$  do  $x(v) := x(v) + 1$
- $P(v_k) := \mu(P(w_p), P(w_q))$
- $L(v_k) := \{v_k\} \cup \bigcup_{i=p+1}^{q-1} L(w_i)$  (Im Fall  $p+1=q$  ist  $\bigcup_{i=p+1}^{q-1} L(w_i) = \emptyset$ )



**Problem:**  
 $v_k$  muss alle Knoten  $w_p, \dots, w_q$  sehen.  
**Lösung:**  
 Sicherstellung durch geeignete Verschiebungen

## Beweis fff

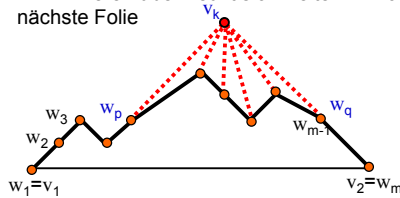
- For each  $v \in \bigcup_{i=q}^m L(w_i)$  do  $x(v) := x(v) + 2$
- For each  $v \in \bigcup_{i=p+1}^{q-1} L(w_i)$  do  $x(v) := x(v) + 1$
- $P(v_k) := \mu(P(w_p), P(w_q))$
- $L(v_k) := \{v_k\} \cup \bigcup_{i=p+1}^{q-1} L(w_i)$  (Im Fall  $p+1=q$  ist  $\bigcup_{i=p+1}^{q-1} L(w_i) = \emptyset$ )



## Beweis ffff

**Invariante:** Ist  $G_{k-1}$  Fary eingebettet mit (1), (2) und (3) und man berechnet die Einbettung von  $G_k$  wie oben, so ist  $G_k$  Fary eingebettet mit (1), (2), (3).

**Denn:** Erhalt von (1), (2) und (3) offensichtlich.  
 Wenn Fary-Einbettung bewiesen  $\rightarrow$  dann Invariante gezeigt  
 z.z.: im Inneren überkreuzt sich weiterhin nichts  $\rightarrow$  Beweis s. nächste Folie



## Beweis fffff

**Lemma:** Für alle  $3 \leq k \leq n$  gilt: Sind  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_m$  nicht-negative ganze Zahlen und werden für  $i=1, 2, \dots, m$  alle Knoten in  $L(w_i)$  um  $\alpha_i$  nach rechts verschoben, so bleibt die Fary-Eigenschaft erhalten.

**Beweis von Lemma:** Induktion über  $k$ :  $k=3$ : offensichtlich  
 • Die Behauptung gelte für  $G_{k-1}$  mit Kontur  $w_1, w_2, \dots, w_m$ . Wir fügen  $v_k$  hinzu und erhalten die neue Kontur  $w_1, w_2, \dots, w_p, v_k, w_q, \dots, w_m$ .

## Beweis von Lemma ff

- Seien  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_p \leq \alpha_q \leq \dots \leq \alpha_m$  ganze Zahlen und betrachte die Verschiebungen der Listen  $L(w_i)$  ( $i=1, 2, \dots, p, q, \dots, m$ ) um  $\alpha_i$  und  $L(v_k)$  um  $\alpha$
- **Wir zeigen:**  $G_k$  ist danach Fary-eingebettet.
- Seien  $0 \leq \alpha'_1 \leq \alpha'_2 \leq \dots \leq \alpha'_m$  wie folgt:
 
$$\alpha'_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{für } i=1, 2, \dots, p \\ \alpha+1 & \text{für } i=p+1, p+2, \dots, q-1 \\ \alpha_i+2 & \text{für } i=q, q+1, \dots, m \end{cases}$$

**Induktionsannahme:**  
 $\Rightarrow$  Alles unterhalb der Kontur  $G_{k-1}$  bleibt Fary eingebettet (Induktion). Die Kontur bewegt sich zwischen  $w_{p+1}$  und  $w_{q-1}$  fest um 1 nach rechts.  
 $\Rightarrow$  Alles oberhalb der Kontur ( $v_k$  und inzidente Kanten) ist Fary eingebettet.

## Beweis-Ende

**Beweis ffffff:**  
 Schliesslich gilt in  $G=G_n$ :  
 $P(v_1) = (0, 0)$   
 $P(v_2) = (2n-4, 0)$   
 $\Rightarrow \mu(P(v_1), P(v_2)) = (n-2, n-2)$   
 $\Rightarrow G$  ist im  $(2n-4) \times (n-2)$  Gitter Fary-eingebettet.

### 4.3.4 Algorithmus und Analyse

- **Eingabe:** planarer Graph  $G(V,E)$  mit planarer Einbettung mittels geordneter Adjazenzlisten
- **Output:** geradlinige Zeichnung (Knotenkoordinaten)
- 1) Herstellung einer Triangulierung: Übung
- 2) Berechnung einer kanonischen Ordnung
- 3) Berechnung der Koordinaten

Algorithmus kann in linearer Zeit realisiert werden.

### Berechnung der kanonischen Ordnung

#### Idee:

- Merke für jeden Knoten, ob er außen ist
  - alle Nachbarn zwischen  $w_p$  und  $w_q$  kommen neu hinzu
- Zähle für jeden Knoten die Anzahl der Innensehnen an denen er beteiligt ist
  - s. nächste Folie: Beobachtungen
- Halte Kandidatenliste für alle Außenknoten, die keine Innensehnen haben
  - Teste dies bei Wegfall einer Innensehne
- Knoten können aus dieser Liste wieder in konstanter Zeit entfernt werden, falls Innensehnen hinzukommen
  - Halte Zeiger auf Listeneintrag

### Beobachtungen

#### Wegfall von Innensehnen:

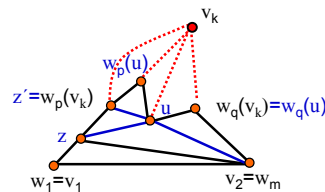
- Wenn  $w_p$  und  $w_q$  einzige Nachbarn von  $v_k$  sind, dann verlieren beide,  $p$  und  $q$ , je eine Innensehne.
- Dies ist der einzig mögliche Wegfall von Innensehnen.

#### Hinzukommen von Innensehnen:

- Für alle Nachbarn  $u$  von  $v_k$  echt zwischen  $w_p(v_k)$  und  $w_q(v_k)$ :
- Bestimme  $w_p(u)$  und  $w_q(u)$
- Für alle Nachbarn  $z$  von  $u$  echt zwischen  $w_p(u)$  und  $w_q(u)$ :
- Falls  $z$  außen, dann: erhöhen sich Innensehnen von  $u$  und  $z$  um je +1.

### Beispiel: Entfernen von $v_k$

- Bei Entfernung von  $v_k$  entstehen 3 neue Innensehnen bei  $u$
- Dies kann nur für  $u$  geschehen, die Nachbarn von  $v_k$  sind und echt zwischen  $w_p(v_k)$  und  $w_q(v_k)$  liegen.
- Man muss nur Nachbarn von  $u$  testen, die echt zwischen  $w_p(u)$  und  $w_q(u)$  liegen.



### Berechnung der Koordinaten

- **Idee:** Darstellung von  $G_k$  als Wald bestehend aus Bäumen für  $L(w_1), L(w_2), \dots, L(w_n)$  mit Wurzeln  $w_1, w_2, \dots, w_m$

- **Beobachtung:** Wenn  $v_k$  eingebettet wird, brauchen wir die exakten Positionen von  $w_p$  und  $w_q$  nicht zu kennen.

Aus  $y(w_p)$  und  $y(w_q)$ , sowie  $x(w_q)-x(w_p)$  (relative x-Koordinaten) können wir berechnen:

$y(v_k)$  und  $x(v_k)-x(w_p)$  (x-Verschiebung von  $v_k$  relativ zu  $w_p$ )

- **Idee:** Merke relativen Abstand zwischen benachbarten Knoten auf Außenkreis  $w_i$  und merke relativen Abstand der von  $v_k$  dominierten Knoten zu  $v_k$  (upper)

### Berechnung der Koordinaten

#### Phase 1:

- Hinzufügen der Knoten
- Berechnung von x-Verschiebungen und y-Koordinaten

#### Phase 2:

- Berechnung der endgültigen x-Koordinaten durch Akkumulation von x-Verschiebungen

## Koordinatenberechnung: Phase 1

For  $k=3, \dots, n$ : Hinzufügen von  $v_k$

- Berechne Abstand zwischen  $w_p$  und  $w_q$  nach dem Hinzufügen von  $v_k$ :

$$x_q = 2 + \sum_{i=p+1}^q x(w_i)$$

- Berechne Schnittpunkt (relativ bzgl.  $w_p$ ):

$$x(v_k) = (x_q + y(w_q) - y(w_p))/2 \text{ und } y(v_k) = (x_q + y(w_q) + y(w_p))/2$$

- $x(w_q) = x_q - x(v_k)$

- Berechne relativen Abstand von  $w_{p+1}, \dots, w_{q-1}$  zu  $v_k$ :

For  $i=p+1$  to  $q-1$  do {

$$x(w_i) = 1 + \sum_{j=p+1}^i x(w_j) - x(v_k)$$

$$\text{upper}(w_i) = v_k \}$$

## Koordinatenberechnung: Phase 2

- Bestimme absolute x-Koordinaten auf der Außenregion (=  $v_1, v_2, v_n$ )

$$x(v_1) = 0$$

$$x(v_2) = x(v_n) + x(v_2)$$

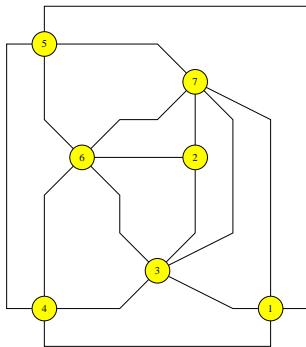
- Bestimme absolute x-Koordinaten für alle inneren Knoten

For  $k=n-1$  to 3 do

$$x(v_k) = x(v_k) + x(\text{upper}(v_k))$$

**Lemma:** Die Koordinatenberechnung benötigt lineare Zeit.

## Beispiel



Kanonische Ordnung:

$$v_1=1,$$

$$v_2=5,$$

$$v_3=7,$$

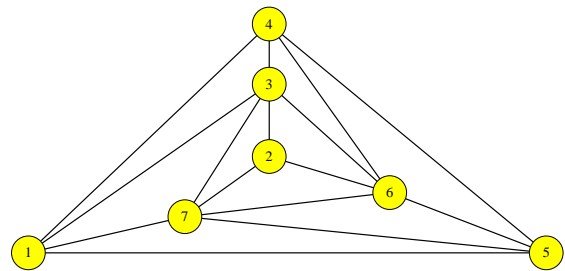
$$v_4=6,$$

$$v_5=2,$$

$$v_6=3,$$

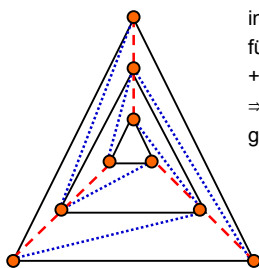
$$v_7=4$$

## Zeichnung des Beispiels



## Qualität des Platzbedarfs

Betrachte  $n/3$  ineinander verschachtelte Dreiecke plus Kanten zur Triangulierung



inneres Dreieck: Breite/Höhe  $\geq 1$

für jedes weitere Dreieck:

+2 Breite und +2 Höhe

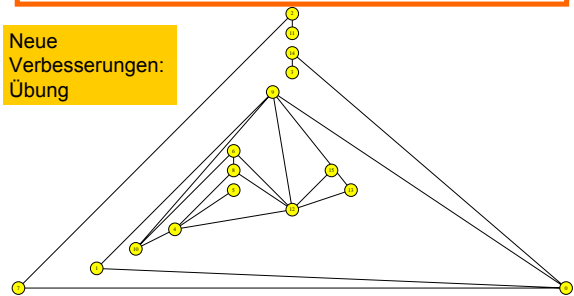
$\Rightarrow$  Breite  $\geq 1 + 2(n/3 - 1) = 2/3 n - 1$

gleiches gilt für Höhe

## 4.3.5 Erweiterungen

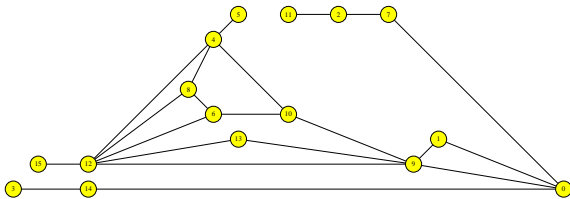
- Problem 1:** Forderung der maximalen Planarität: Nach Entfernung der künstlichen Kanten sieht die Zeichnung eventuell merkwürdig aus:

Neue Verbesserungen:  
Übung



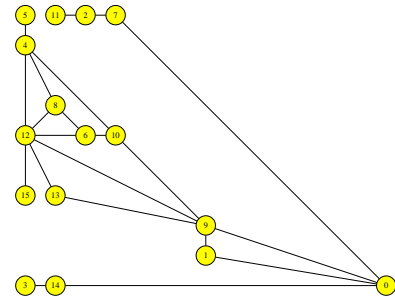
## Lösungen zu Problem 1

- Kanonische Ordnung für 3-zusammenhängende (nicht notwendig triangulierte) Graphen: Kant [1996]
- Kanonische Ordnungen für 2-zusammenhängende Graphen: Gutwenger und Mutzel [1998] (auch  $O(n)$  Zeit)



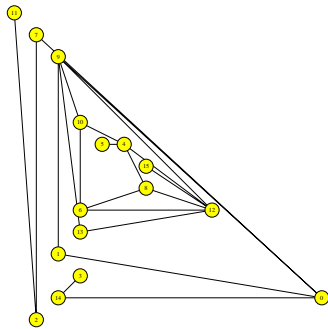
## Problem 2: Gittergröße

**Kleineres Gitter:** Größe  $(n-2) \times (n-2)$  Chrobak und Kant [1997]



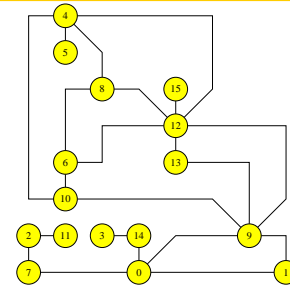
## Problem 2: Gittergröße

**Alternativ: Schnyder** [1990] (ganz anders) Größe  $(n-2) \times (n-2)$



## Problem 3: Kleine Winkel

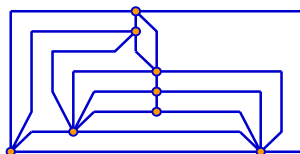
**Lösung:** Quasi-orthogonales Zeichnen d.h. orthogonal bis auf rechteckige Umgebungen um die Knoten: Kant [1996], Gutwenger und Mutzel [1998]



## Polyline Zeichnungen

Kant 1996  
Gutwenger, Mutzel 1998

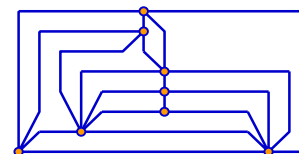
- Polylinien Zeichnungen für 2-zusammenhängende planare Graphen
- **2-Phasen Algorithmus:**
  - (1) berechne die kanonische Ordnung
  - (2) füge iterativ einzelne Knoten oder Knotenketten) hinzu



## Polyline Zeichnungen

Gutwenger und Mutzel 1998

- Eigenschaften: 1-zusammenhängende Graphen
- Gittergröße:  $(2n-5) \times (3/2n-7/2)$
- $5n-15$  Knicke, maximal 3 Knicke pro Kante
- Winkel größer gleich  $2/D$  ( $D$ : maximaler Knotengrad)
- Idee: Knotenboxen



Übung



