

Kap. 4: Planare Zeichenverfahren

4.1 Einführung (kurz)

4.3 Geradlinige planare Zeichenverfahren



Prof. Dr. Petra Mutzel

Lehrstuhl für

Algorithm Engineering LS11

Universität Dortmund

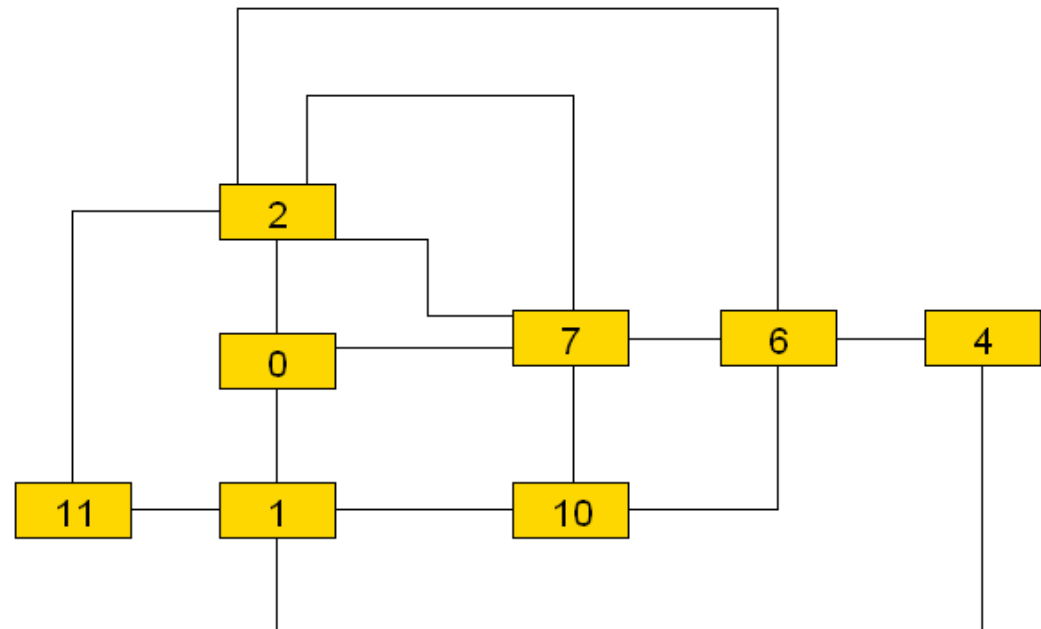
14./17./18. VO

WS07/08

27.11./10.+11.12.2007

Planare Zeichenverfahren

- Zustandsdiagramme
- State Charts
- Datenmodelle
- ER-Diagramme
- UML Diagramme
- ...



Planare Verfahren: AGD



Überblick zu Kapitel 4

4.1 Einführung Planarität, Einbettungen, Überblick

4.2 Planaritätstest und Einbettungsberechnung

 4.3 Geradlinige planare Zeichenverfahren

4.4 Orthogonale planare Verfahren (flussbasiert)

Literatur für diese VO

- Originalartikel: De Fraysseix, Pach und Pollack: How to draw a planar graph on a grid, *Combinatorica* 10 (1990) 41-51

- Auch interessant: Chrobak und Payne: A linear time algorithm for drawing planar graphs, *Information Processing Letters* 54 (1995) 241-246

4.1 Einführung Planarität

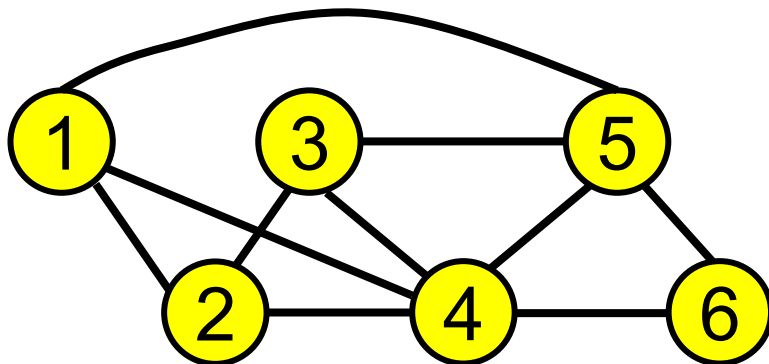
- $G=(V,E)$ ist **planar** genau dann, wenn eine injektive Abbildung der Knoten und Kanten von G auf die Ebene existiert, die folgende Bedingungen erfüllt:
 - Jedem Knoten wird ein Punkt zugeordnet und
 - jede Kante vw wird auf eine stetige Kurve abgebildet, die die Bilder von v und w verbindet.
 - Dabei dürfen die Bilder verschiedener Kanten nur die Bilder ihrer gemeinsamen Endpunkte gemeinsam haben.

- Das Bild einer solchen Abbildung heißt **planare Zeichnung**.

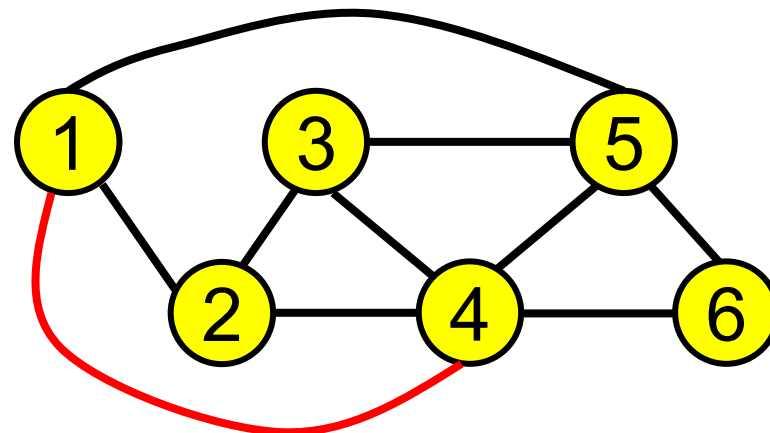
- G ist also planar, wenn er eine planare Zeichnung besitzt (d.h. ohne Kantenkreuzungen in die Ebene gezeichnet werden kann).

Planare Graphen

- G heißt **eben**, wenn G planar in die Ebene eingebettet ist.
- Ein ebener Graph unterteilt die Ebene in verschiedene zusammenhängende **Gebiete (Flächen, engl.: faces)**. Eine davon ist unbegrenzt, sie heißt **Außenfläche**.

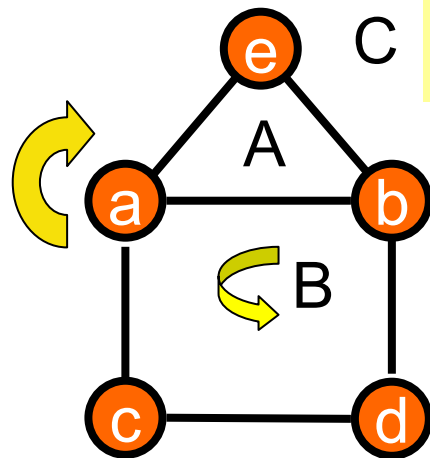


G ist **planar**



und jetzt auch **eben**

Kombinatorische Planare Einbettungen

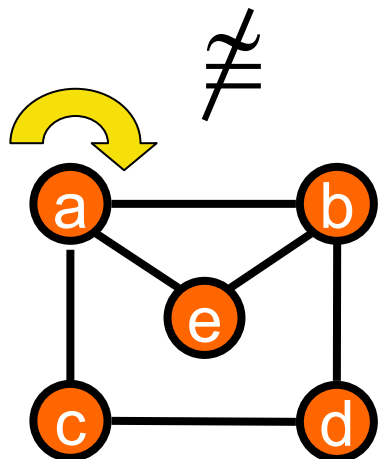


Geordnete Liste (Uhrzeiger) der Nachbarn für jeden Knoten:

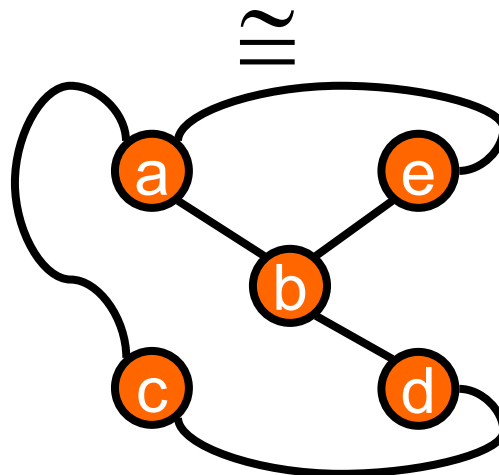
a: c, e, b
 b: e, d, a
 c: a, d
 d: b, c
 e: b, a

Liste (Gegenuhrzeiger) der Randknoten jeder Region:

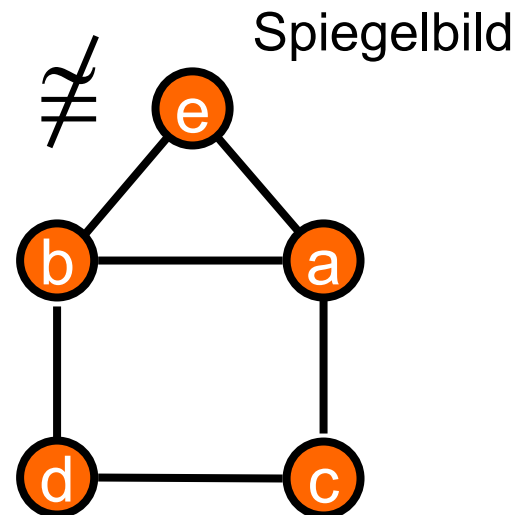
A: a, b, e
 B: b, a, c, d
 C: c, a, e, b, d



\neq



\cong



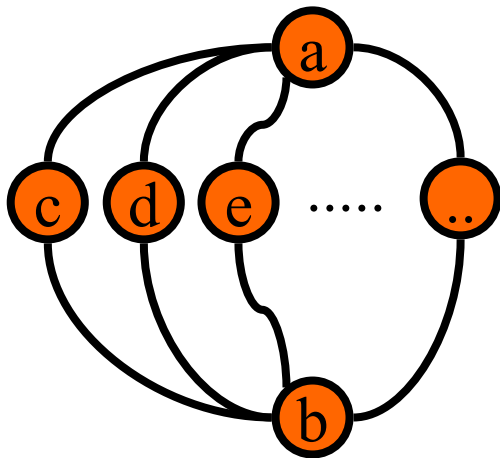
Spiegelbild

\neq

Ein planarer 3-zusammenhängender Graph hat genau 2 kombinatorische Einbettungen

Kombinatorische Einbettungen

Ein (planarer) Graph kann exponentiell viele verschiedene Einbettungen besitzen

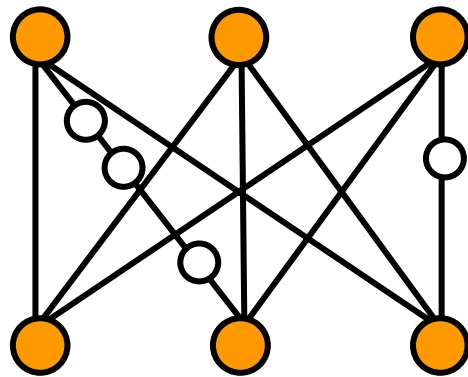


Graph G mit n Knoten und $(n-2)!$ kombinatorischen Einbettungen

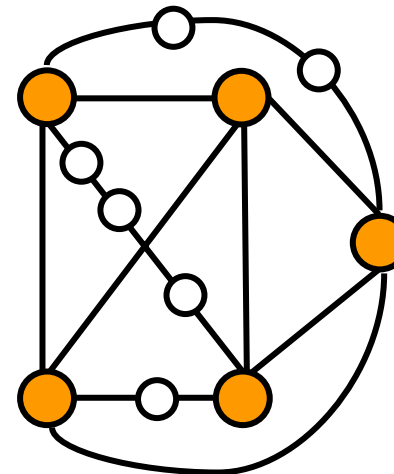
Viele Optimierungsprobleme über der Menge aller kombinatorischen Einbettungen sind NP-schwierig

Theorem von Kuratowski

Ein Graph ist genau dann **planar** wenn er **keine Unterteilung** des $K_{3,3}$ und K_5 enthält.



$K_{3,3}$



K_5

Planaritätstest und Einbettungsberechnung:
lineare Zeit (s. nächste VO)

4.3 Geradlinige planare Zeichenverfahren

4.3.1 Einführung

4.3.2 Kanonische Ordnung

4.3.3 Platzierung der Knoten

4.3.4 Algorithmus und Analyse

4.3.5 Erweiterungen

4.3.1 Einführung

- **Theorem:** Jeder planare Graph kann geradlinig (ohne Kantenknicke) kreuzungsfrei gezeichnet werden.
- **Beweis:** Dies wurde unabhängig von Wagner 1936, Fáry 1948 und Steinitz 1951 bewiesen.

Geradlinige planare Zeichnungen heißen auch manchmal „Fary-Einbettungen“.

Einführung

- Diese Beweise waren zwar konstruktiv, führten aber zu Gitterzeichnungen mit exponentiellem Platzverbrauch.
- Es war lange eine offene Frage, ob geradlinige planare Zeichnungen auch mit polynomieller Gittergröße erzielt werden können.

Lösung: De Fraysseix, Pach und Pollack (1988 STOC-Konferenz → später Zeitschriftenartikel):
Algorithmus in Gitter $(2n-4) \times (n-2)$ bei n Knoten.

Film: Planar Straightline Graph Drawing

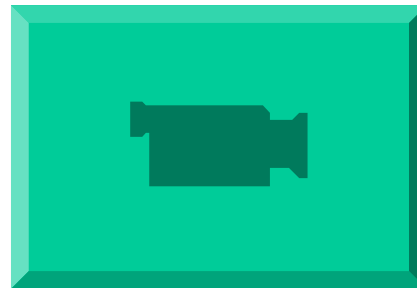
von

Petra Mutzel

und

Ralf Brockenauer

Max-Planck-Institut für Informatik, 1998

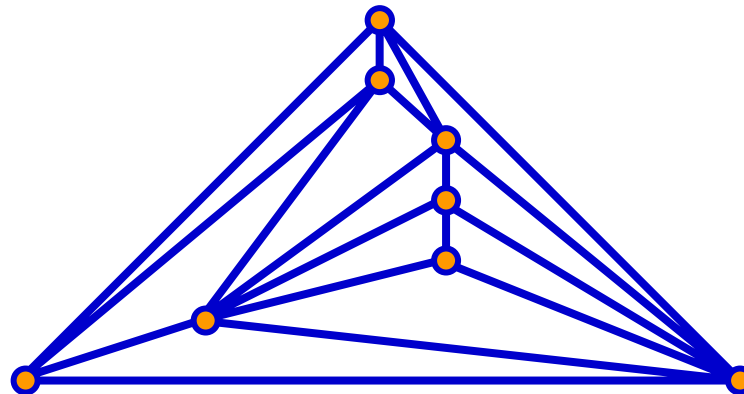


Algorithmus von de Fraysseix et al. für triangulierte planare Graphen

Geradlinige Zeichnungen für **triangulierte** planare Graphen:

Eingabe: Graph G mit planarer Einbettung

- Idee: 2-Phasen Algorithmus:
 - (1) Berechne eine kanonische Ordnung
 - (2) Füge iterativ einzelne Knoten hinzu, dabei werden jeweils ausgewählte Mengen von bereits platzierten Knoten um je 1 Einheit nach rechts verschoben



Triangulierte Graphen

Definitionen:

- Ein **maximal planarer Graph** ist ein einfacher planarer Graph, zu dem keine Kante mehr hinzugefügt werden kann, ohne die Planarität zu zerstören.
- Eine **Triangulation** ist ein einfacher planar eingebetteter Graph in dem jede Fläche durch einen 3-er Kreis begrenzt ist.

Theorem: Für einen einfachen planar eingebetteten Graphen $G=(V,E)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- $|E|=3|V|-6$
- G ist eine Triangulation
- G ist ein maximal planarer Graph

Triangulierte Graphen

Theorem: Für einen einfachen planar eingebetteten Graphen $G=(V,E)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- $|E|=3|V|-6$
- G ist eine Triangulation
- G ist ein maximal planarer Graph

Beweis:

ii. \Leftrightarrow i.: Jede Fläche ist durch 3-Kreis begrenzt und G ist zusammenhängend \Leftrightarrow zähle Kanten über Flächen:

$2|E|=3|F| \Leftrightarrow$ Einsetzen in Eulers Polyederformel liefert

$$|E|=3|V|-6 \quad \checkmark$$

ii. \Leftrightarrow iii.: Bw. durch Widerspruch: Annahme: Es existiert Fläche $f \in F$ mit $e(f) > 3 \Leftrightarrow$ Es existiert eine Kante $e \notin E$ deren Hinzufügen Planarität erhält. 

4.3.2 Kanonische Ordnung

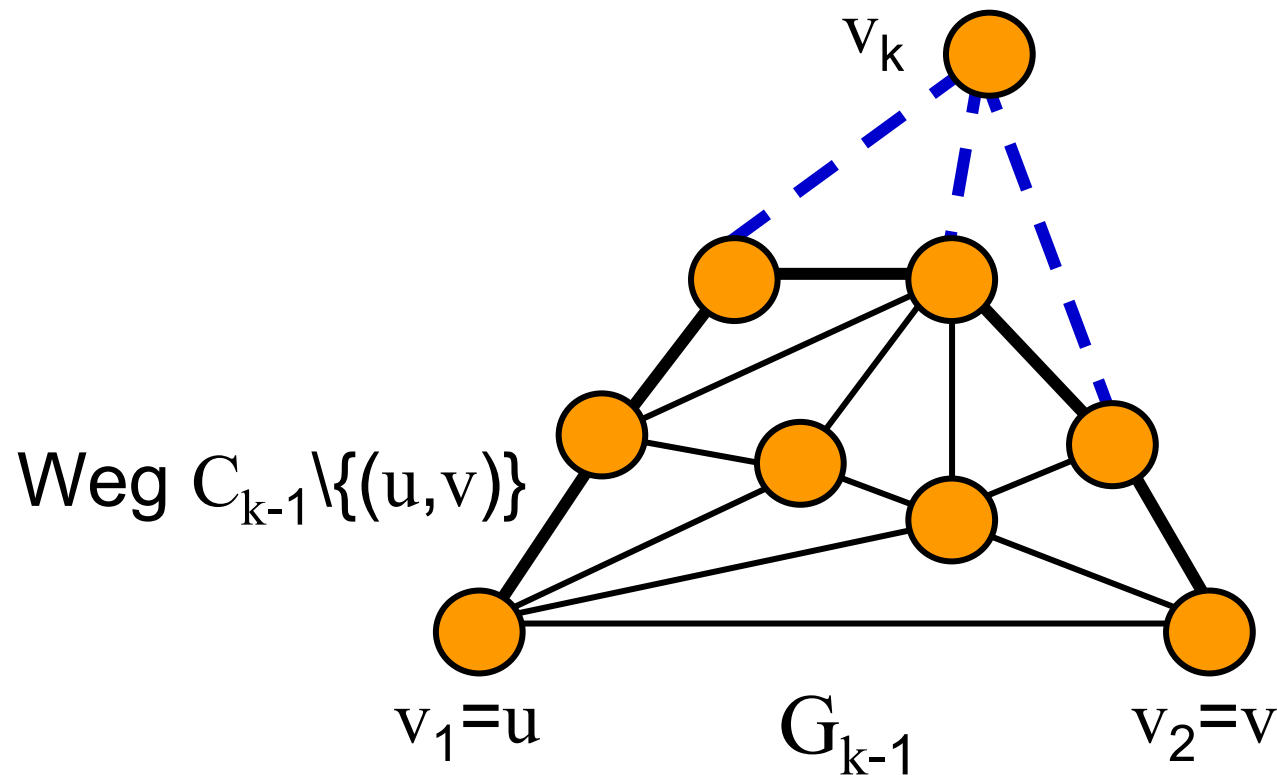
Theorem: Sei $G=(V,E)$, $n=|V|$, ein triangulierter planar eingebetteter Graph mit Außenfläche $u,v,w \in V$. Dann existiert eine **Knotenordnung** $v_1=u, v_2=v, v_3, v_4, \dots, v_{n-1}, v_n=w$ mit den folgenden Eigenschaften für $4 \leq k \leq n$.

1. Der von v_1, v_2, \dots, v_{k-1} induzierte Teilgraph G_{k-1} ist 2-zusammenhängend und die Außenfläche wird durch einen Kreis C_{k-1} begrenzt, der die Kante (u,v) enthält.
2. v_k liegt in der Außenfläche von G_{k-1} und seine Nachbarn in G_{k-1} bilden ein wenigstens 2-elementiges Intervall auf dem Weg $C_{k-1} \setminus \{(u,v)\}$.

Diese Ordnung heißt **kanonische Ordnung**.

Beweis: gleich

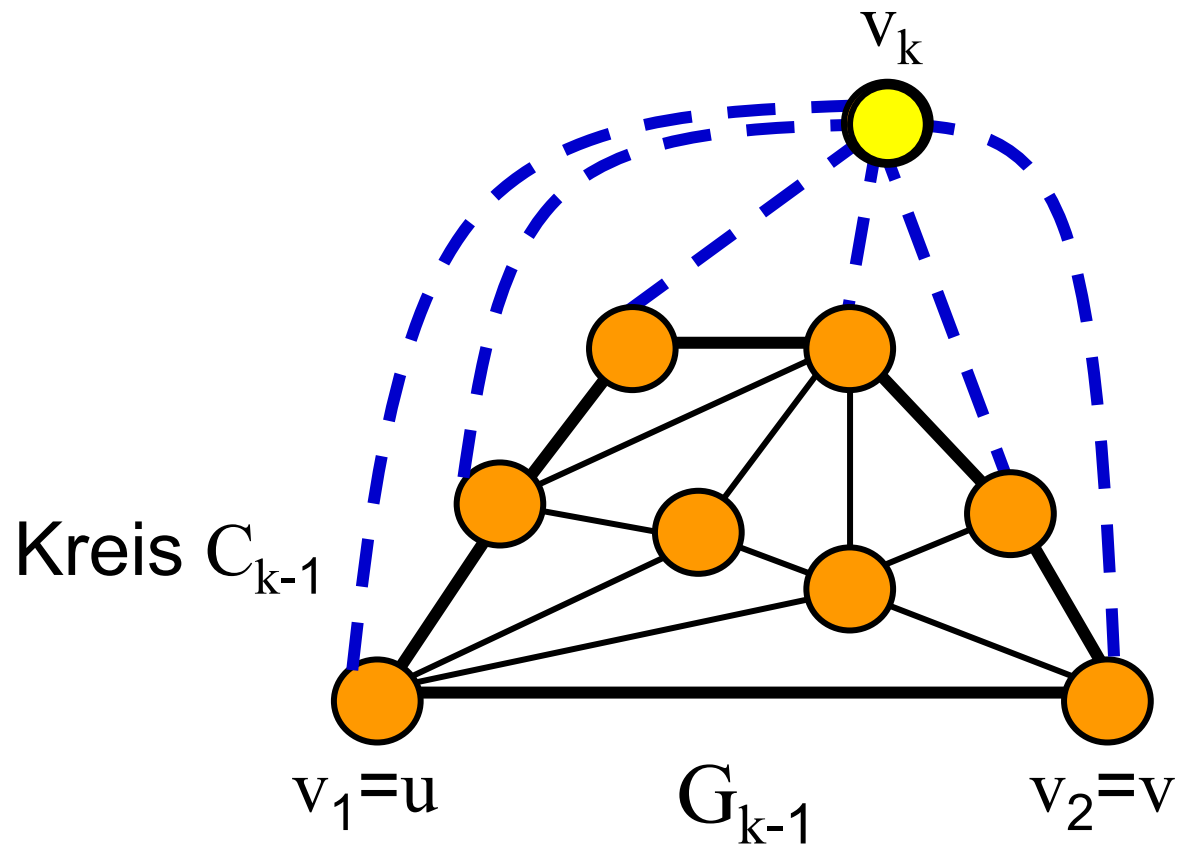
Kanonische Ordnung: Visualisierung



Beweis-Idee:

Idee (konstruktiv): Entferne nacheinander v_n, v_{n-1}, \dots, v_3

Problem: muss 2-zusammenhängend bleiben,
dies ist bei Nachbar zu Innensehne nicht der Fall.



Kanonische Ordnung

Lemma: Sei $G=(V,E)$, $n=|V|$, ein einfacher planar eingebetteter Graph und $u=u_1, u_2, \dots, u_k=v$ ein Kreis in G . Dann existiert ein Knoten $w' \notin \{u, v\}$ auf dem Kreis, der nicht adjazent zu einer inneren Sehne des Kreises ist.

Beweis: Sei (u_i, u_j) , $j > i+1$ eine innere Sehne mit $j-i$ minimum.

- Wegen Minimalität gilt: keine innere Sehne adjazent zu u_{i+1} endet im Bereich u_i, u_{i+1}, \dots, u_j
- Wegen Planarität gilt: keine innere Sehne adjazent zu u_{i+1} endet im Bereich $\{u_1, u_2, \dots, u_k\} \setminus \{u_i, \dots, u_j\}$
- Wähle also $w' = u_{i+1}$ ✓

Beweis (kanonischen Ordnung)

Beweis: Wir definieren v_n, v_{n-1}, \dots, v_3 durch Rückwärtsinduktion.

- **Induktionsanfang:**

- $v_n = w$, Sei G_{n-1} der Teilgraph von G nach Entfernung von w
- G ist trianguliert: Die Nachbarn von w formen Kreis C_{n-1} , der (u, v) enthält und Außenfläche von G_{n-1} definiert. ✓

- **Induktionsannahme:**

- Sei v_k definiert für $k > i$, so dass G_{k-1} die Bedingungen 1) und 2) erfüllt. Sei C_{k-1} der die Außenfläche begrenzende Kreis. Wir wenden das Lemma auf C_i in G_i ($i = k-1$) an.
- Es ex. $w' \in C_i \setminus \{u, v\}$ mit w' ist nicht adjazent zu einer Innensehne von C_i
- Für $v_i := w'$ erfüllt G_{i-1} die Bedingungen 1) und 2) ✓

4.3.3 Platzierung

Satz von de Fraysseix, Pach, Pollack: Jeder planar eingebettete Graph mit $|V|=n$ Knoten besitzt eine Fary-Einbettung auf einem $(2n-4) \times (n-2)$ Gitter.

Beweis: Konstruktiv: Vorbemerkungen:

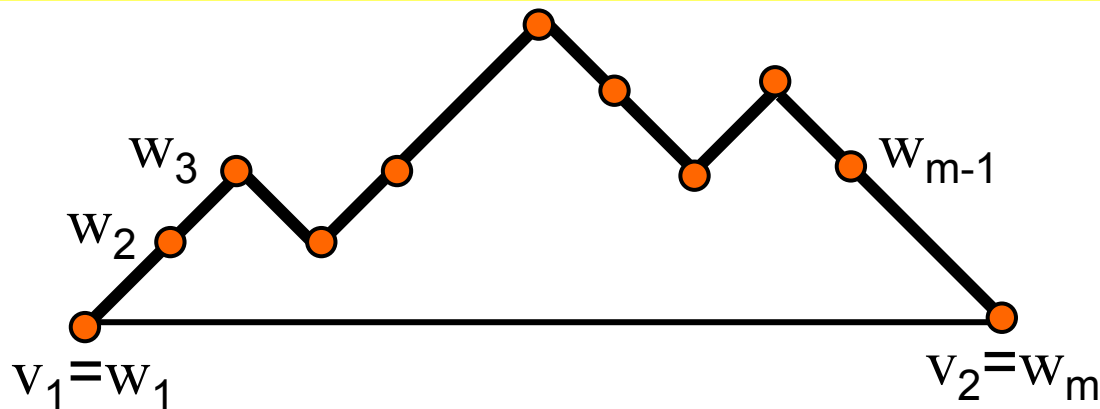
- Gitterposition von $v \in V$: $P(v) = (x(v), y(v)) \in \mathbb{Z}$
- Manhattan Distanz von $A = (x_1, y_1)$ und $B = (x_2, y_2)$:
- $d(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.
- Es gilt: Haben A und B gerade Manhattan Distanz, dann hat der Schnitt der Geraden durch A mit Steigung 1 und durch B mit Steigung -1 ganzzahlige Koordinaten:
- Schnittpunkt $\mu(A, B) = 1/2 (x_1 - y_1 + x_2 + y_2, -x_1 + y_1 + x_2 + y_2)$

Beweis

Algorithmus: Sei v_1, v_2, \dots, v_n die kanonische Ordnung.
Knotenliste $L(w)$ für alle $w \in V$.

- **Initialisierung:** Setze $P(v_1) = (0, 0)$, $P(v_2) = (2, 0)$, $P(v_3) = (1, 1)$ und $L(v_i) := \emptyset$ für alle $i = 1, \dots, n$, $L(v_2) = \{v_2\}$

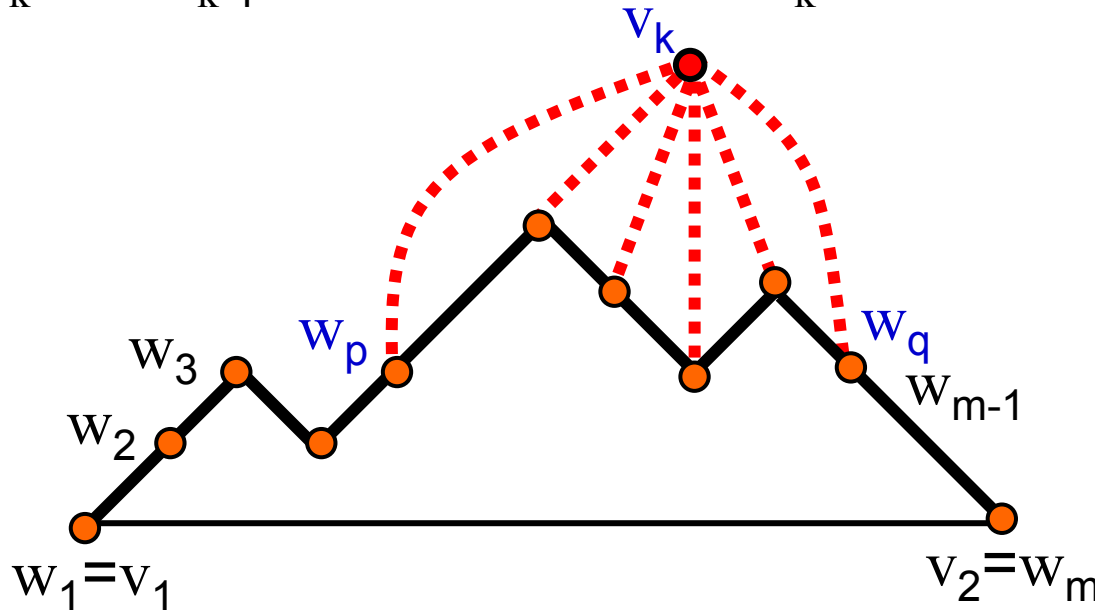
- **Induktionsvoraussetzungen:** In Schritt k sei G_{k-1} eingebettet, so dass
- (1) $P(v_1) = (0, 0)$, $P(v_2) = (2(k-1) - 4, 0)$
- (2) $x(w_1) < x(w_2) < \dots < x(w_m)$, wobei $C_{k-1} = (v_1 = w_1, w_2, \dots, w_{m-1}, w_m = v_2)$
- (3) Alle Kanten (Liniensegmente) $(P(w_i), P(w_{i+1}))$ für $i = 1, 2, \dots, m-1$ haben Steigung $+1$ oder -1



Beweis ff

- **Induktionsvorausss.:** In Schritt k sei G_{k-1} eingebettet, so dass
- (1) $P(v_1)=(0,0)$, $P(v_2)=(2(k-1)-4,0)$
- (2) $x(w_1)<x(w_2)<\dots<x(w_m)$, wobei $C_{k-1}=(v_1=w_1, w_2, \dots, w_{m-1}, w_m=v_2)$
- (3) Alle Kanten (Liniensegmente) $(P(w_i), P(w_{i+1}))$ für $i=1, 2, \dots, m-1$ haben Steigung $+1$ oder -1

- **Induktionsschritt:** Seien $w_p, w_{p+1}, \dots, w_{q-1}, w_q$ die Nachbarn von v_k auf C_{k-1} . Dann überdeckt v_k die Knoten w_{p+1}, \dots, w_{q-1}



Problem:

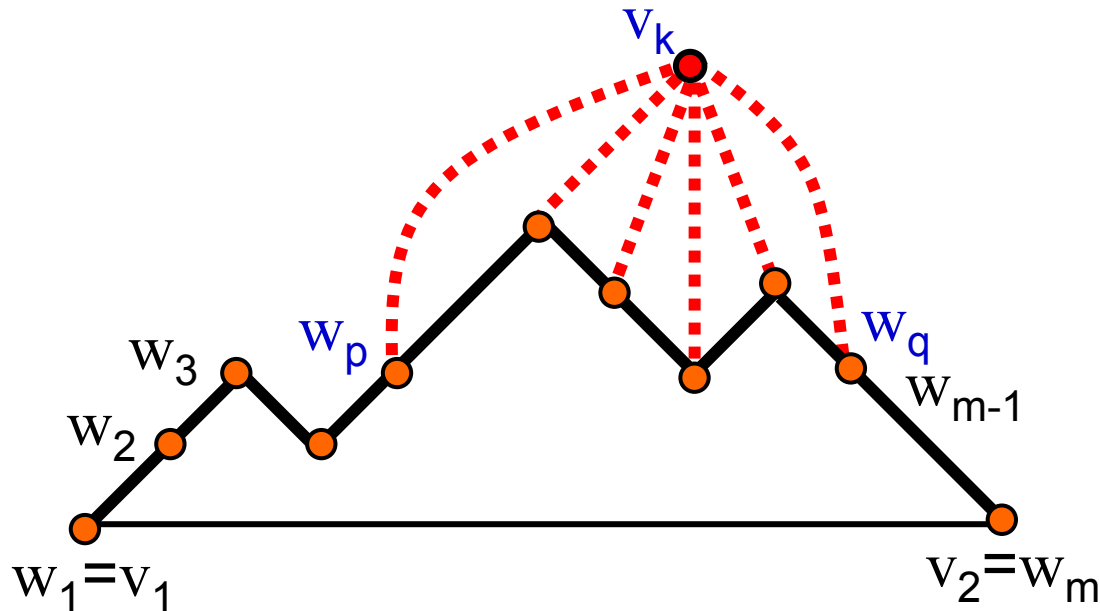
v_k muss alle Knoten w_p, \dots, w_q sehen.

Lösung:

Sicherstellung durch geeignete Verschiebungen

Beweis fff

- For each $v \in \bigcup_{i=q}^m L(w_i)$ do $x(v) := x(v) + 2$
- For each $v \in \bigcup_{i=p+1}^{q-1} L(w_i)$ do $x(v) := x(v) + 1$
- $P(v_k) := \mu(P(w_p), P(w_q))$
- $L(v_k) := \{v_k\} \cup \bigcup_{i=p+1}^{q-1} L(w_i)$ (Im Fall $p+1=q$ ist $\bigcup L(w_i) = \emptyset$)



Problem:

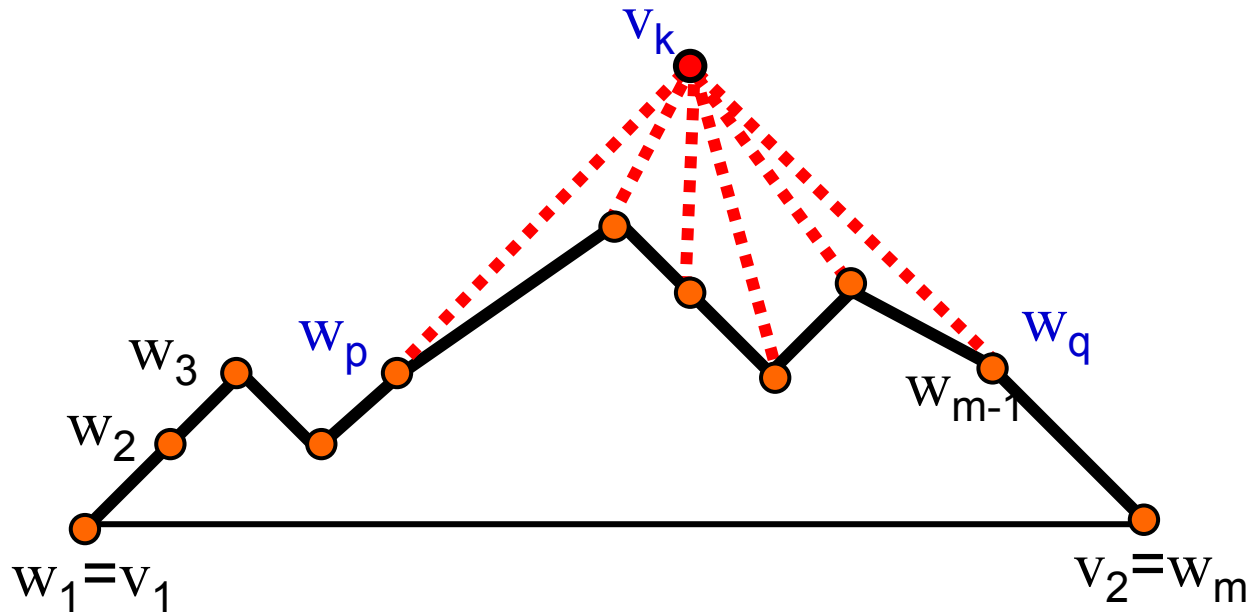
v_k muss alle Knoten w_p, \dots, w_q sehen.

Lösung:

Sicherstellung durch geeignete Verschiebungen

Beweis fff

- For each $v \in \bigcup_{i=q}^m L(w_i)$ do $x(v) := x(v) + 2$
- For each $v \in \bigcup_{i=p+1}^{q-1} L(w_i)$ do $x(v) := x(v) + 1$
- $P(v_k) := \mu(P(w_p), P(w_q))$
- $L(v_k) := \{v_k\} \cup \bigcup_{i=p+1}^{q-1} L(w_i)$ (Im Fall $p+1=q$ ist $\bigcup L(w_i) = \emptyset$)



Beweis ffff

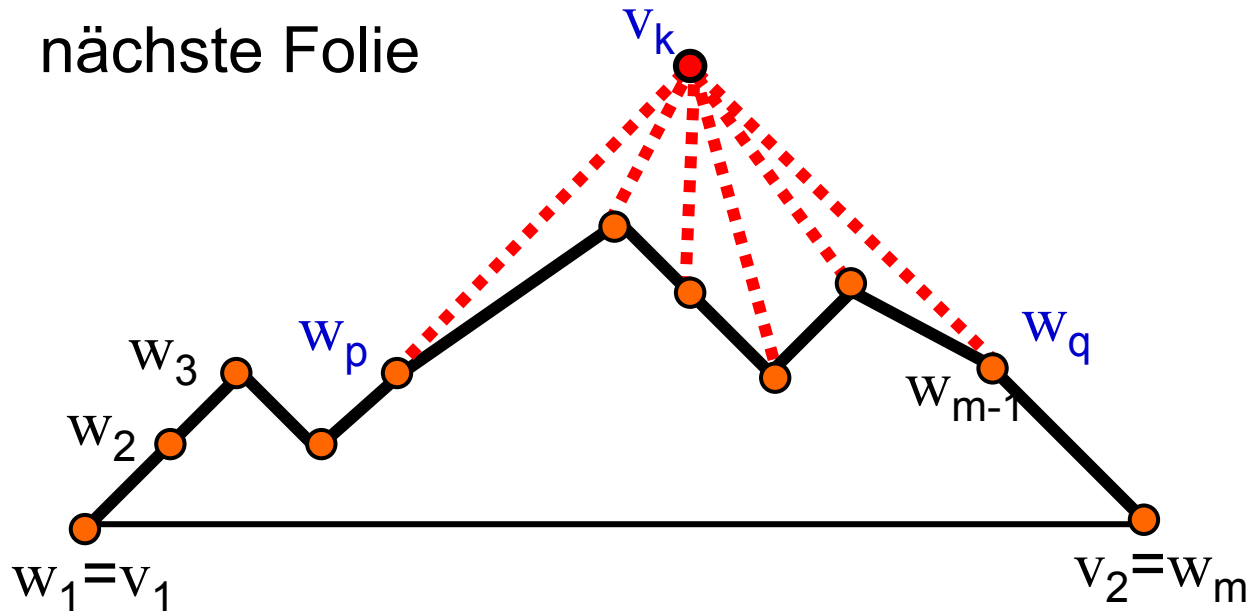
Invariante: Ist G_{k-1} Fary eingebettet mit (1), (2) und (3) und man berechnet die Einbettung von G_k wie oben, so ist G_k Fary eingebettet mit (1), (2), (3).

Denn: Erhalt von (1), (2) und (3) offensichtlich.

Wenn Fary-Einbettung bewiesen \rightarrow dann Invariante gezeigt

z.z.: im Inneren überkreuzt sich weiterhin nichts \rightarrow Beweis s.

nächste Folie



Beweis fffff

Lemma: Für alle $3 \leq k \leq n$ gilt: Sind $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_m$ nicht-negative ganze Zahlen und werden für $i=1,2,\dots,m$ alle Knoten in $L(w_i)$ um α_i nach rechts verschoben, so bleibt die Fary-Eigenschaft erhalten.

Beweis von Lemma: Induktion über k : $k=3$: offensichtlich

- Die Behauptung gelte für G_{k-1} mit Kontur w_1, w_2, \dots, w_m . Wir fügen v_k hinzu und erhalten die neue Kontur

$w_1, w_2, \dots, w_p, v_k, w_q, \dots, w_m$.

Beweis von Lemma ff

- Seien $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_p \leq \alpha \leq \alpha_q \leq \dots \leq \alpha_m$ ganze Zahlen und betrachte die Verschiebungen der Listen $L(w_i)$ ($i=1,2,\dots,p,q,\dots,m$) um α'_i und $L(v_k)$ um α
- **Wir zeigen:** G_k ist danach Fary-eingebettet.
- Seien $0 \leq \alpha'_1 \leq \alpha'_2 \leq \dots \leq \alpha'_m$ wie folgt:
- $$\alpha'_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{für } i=1,2,\dots,p \\ \alpha+1 & \text{für } i=p+1,p+2,\dots,q-1 \\ \alpha_i+2 & \text{für } i=q,q+1,\dots,m \end{cases}$$

Induktionsannahme:

- \Rightarrow Alles unterhalb der Kontur G_{k-1} bleibt Fary eingebettet (Induktion). Die Kontur bewegt sich zwischen w_{p+1} und w_{q-1} fest um 1 nach rechts.
- \Rightarrow Alles oberhalb der Kontur (v_k und inzidente Kanten) ist Fary eingebettet.

Beweis-Ende

Beweis ffffff:

Schliesslich gilt in $G=G_n$:

$$P(v_1)=(0,0)$$

$$P(v_2)=(2n-4,0)$$

$$\Rightarrow \mu(P(v_1),P(v_2)) = (n-2,n-2)$$

$\Rightarrow G$ ist im $(2n-4) \times (n-2)$ Gitter Fary-eingebettet.

4.3.4 Algorithmus und Analyse

- **Eingabe:** planarer Graph $G(V,E)$ mit planarer Einbettung mittels geordneter Adjazenzlisten
- **Output:** geradlinige Zeichnung (Knotenkoordinaten)
- 1) Herstellung einer Triangulierung: Übung

➔ 2) Berechnung einer kanonischen Ordnung

➔ 3) Berechnung der Koordinaten

Algorithmus kann in linearer Zeit realisiert werden.

Berechnung der kanonischen Ordnung

Idee:

- Merke für jeden Knoten, ob er außen ist
 - alle Nachbarn zwischen w_p und w_q kommen neu hinzu
- Zähle für jeden Knoten die Anzahl der Innensehnen an denen er beteiligt ist
 - s. nächste Folie: Beobachtungen
- Halte Kandidatenliste für alle Außenknoten, die keine Innensehnen haben
 - Teste dies bei Wegfall einer Innensehne
- Knoten können aus dieser Liste wieder in konstanter Zeit entfernt werden, falls Innensehnen hinzukommen
 - Halte Zeiger auf Listeneintrag

Beobachtungen

Wegfall von Innensehnen:

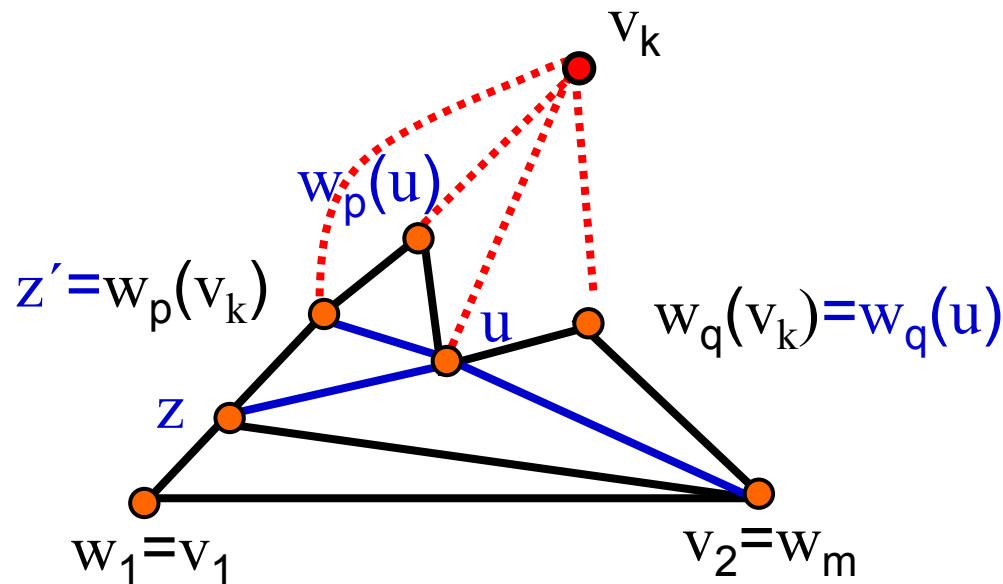
- Wenn w_p und w_q einzige Nachbarn von v_k sind, dann verlieren beide, p und q , je eine Innensehne.
- Dies ist der einzig mögliche Wegfall von Innensehnen.

Hinzukommen von Innensehnen:

- **Für** alle Nachbarn u von v_k echt zwischen $w_p(v_k)$ und $w_q(v_k)$:
- Bestimme $w_p(u)$ und $w_q(u)$
- Für alle Nachbarn z von u echt zwischen $w_p(u)$ und $w_q(u)$:
- **Falls** z außen, dann: erhöhen sich Innensehnen von u und z um je $+1$.

Beispiel: Entfernen von v_k

- Bei Entfernung von v_k entstehen 3 neue Innensehnen bei u
- Dies kann nur für u geschehen, die Nachbarn von v_k sind und echt zwischen $w_p(v_k)$ und $w_q(v_k)$ liegen.
- Man muss nur Nachbarn von u testen, die echt zwischen $w_p(u)$ und $w_q(u)$ liegen.



Berechnung der Koordinaten

- **Idee:** Darstellung von G_k als Wald bestehend aus Bäumen für $L(w_1), L(w_2), \dots, L(w_n)$ mit Wurzeln w_1, w_2, \dots, w_m

- **Beobachtung:** Wenn v_k eingebettet wird, brauchen wir die exakten Positionen von w_p und w_q nicht zu kennen.

Aus $y(w_p)$ und $y(w_q)$, sowie $x(w_q) - x(w_p)$ (relative x-Koordinaten) können wir berechnen:

$y(v_k)$ und $x(v_k) - x(w_p)$ (x-Verschiebung von v_k relativ zu w_p)

- **Idee:** Merke relativen Abstand zwischen benachbarten Knoten auf Außenkreis w_i und merke relativen Abstand der von v_k dominierten Knoten zu v_k (upper)

Berechnung der Koordinaten

- **Phase 1:**
- Hinzufügen der Knoten
- Berechnung von x -Verschiebungen und y -Koordinaten

- **Phase 2:**
- Berechnung der endgültigen x -Koordinaten durch Akkumulation von x -Verschiebungen

Koordinatenberechnung: Phase 1

For $k=3, \dots, n$: Hinzufügen von v_k

- Berechne Abstand zwischen w_p und w_q nach dem Hinzufügen von v_k :

$$x_q = 2 + \sum_{i=p+1}^q x(w_i)$$

- Berechne Schnittpunkt (relativ bzgl. w_p):

$$x(v_k) = (x_q + y(w_q) - y(w_p))/2 \text{ und } y(v_k) = (x_q + y(w_q) + y(w_p))/2$$

- $x(w_q) = x_q - x(v_k)$

- Berechne relativen Abstand von w_{p+1}, \dots, w_{q-1} zu v_k :

For $i=p+1$ to $q-1$ **do** {

$$x(w_i) = 1 + \sum_{j=p+1}^i x(w_j) - x(v_k)$$

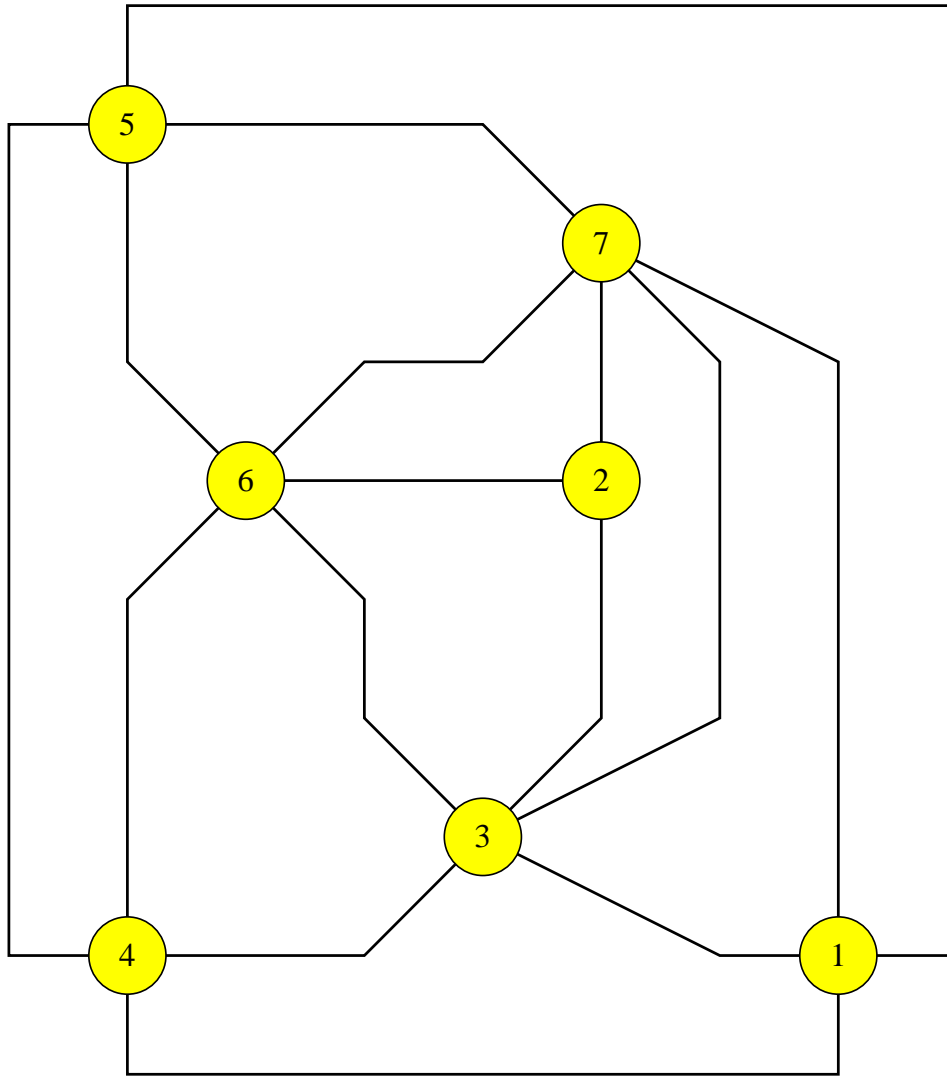
upper(w_i) = v_k }

Koordinatenberechnung: Phase 2

- Bestimme absolute x -Koordinaten auf der Außenregion
(= v_1, v_2, v_n)
- $x(v_1) = 0$
 $x(v_2) = x(v_n) + x(v_2)$
- Bestimme absolute x -Koordinaten für alle inneren Knoten
For $k=n-1$ to 3 **do**
 $x(v_k) = x(v_k) + x(\text{upper}(v_k))$

Lemma: Die Koordinatenberechnung benötigt lineare Zeit.

Beispiel



Kanonische Ordnung:

$$v_1=1,$$

$$v_2=5,$$

$$v_3=7,$$

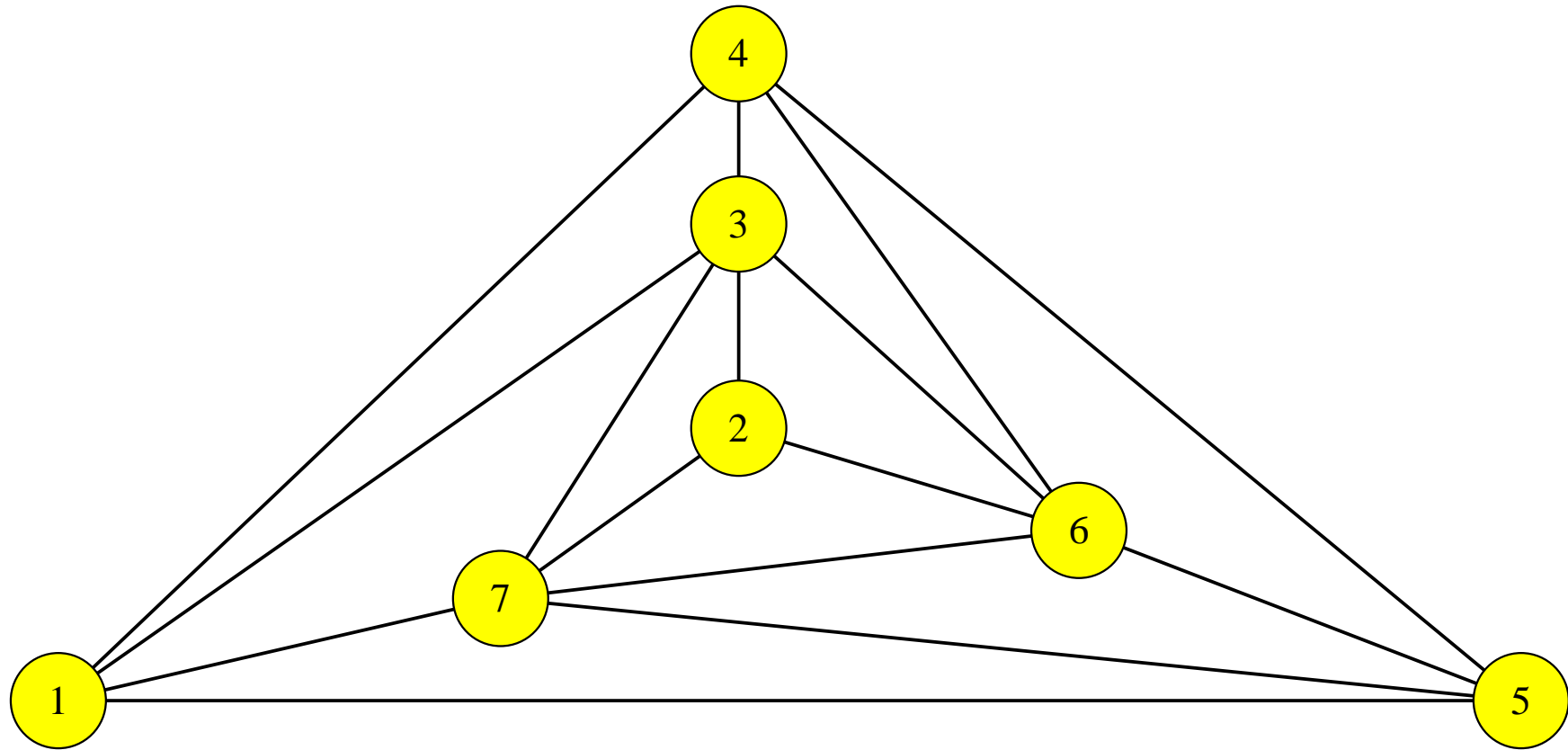
$$v_4=6,$$

$$v_5=2,$$

$$v_6=3,$$

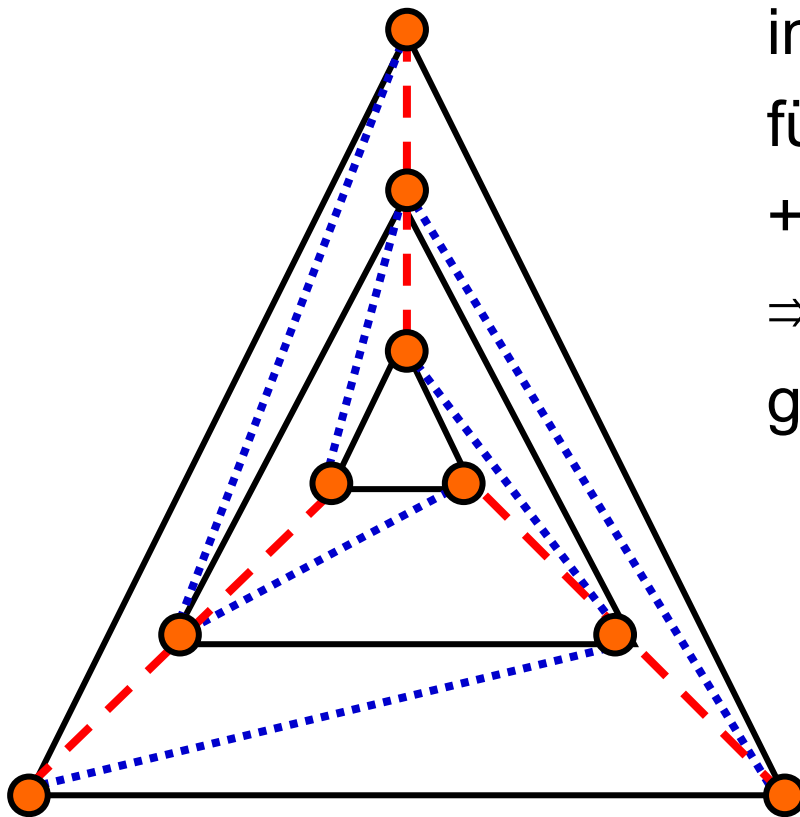
$$v_7=4$$

Zeichnung des Beispiels



Qualität des Platzbedarfs

Betrachte $n/3$ ineinander verschachtelte Dreiecke plus Kanten zur Triangulierung



inneres Dreieck: Breite/Höhe ≥ 1

für jedes weitere Dreieck:

+2 Breite und +2 Höhe

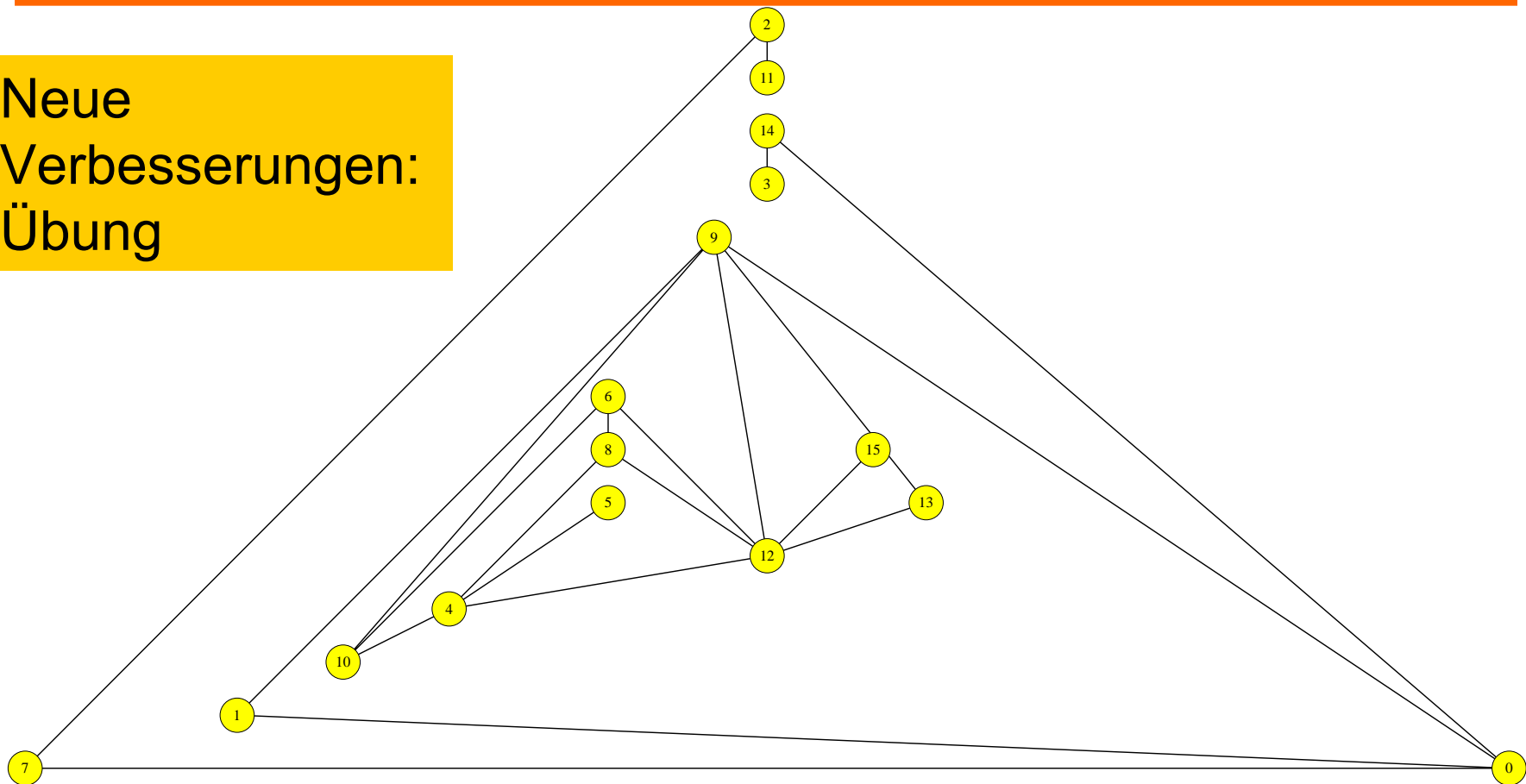
\Rightarrow Breite $\geq 1 + 2(n/3 - 1) = 2/3 n - 1$

gleiches gilt für Höhe

4.3.5 Erweiterungen

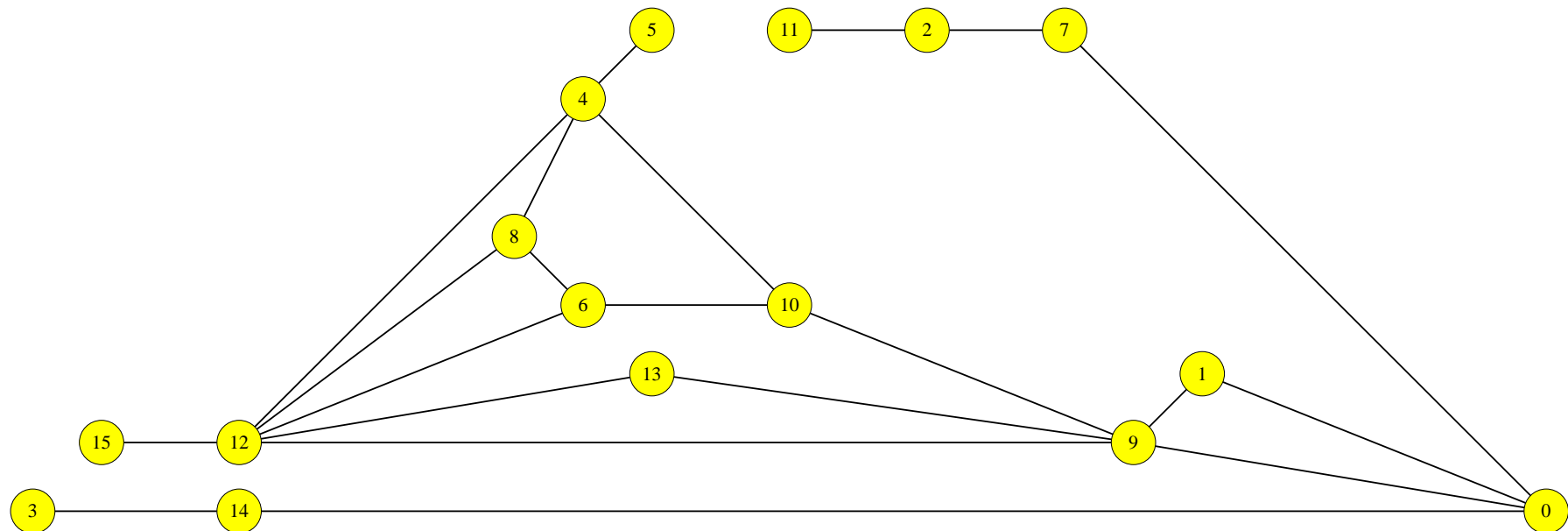
- **Problem 1:** Forderung der maximalen Planarität: Nach Entfernung der künstlichen Kanten sieht die Zeichnung eventuell merkwürdig aus:

Neue
Verbesserungen:
Übung



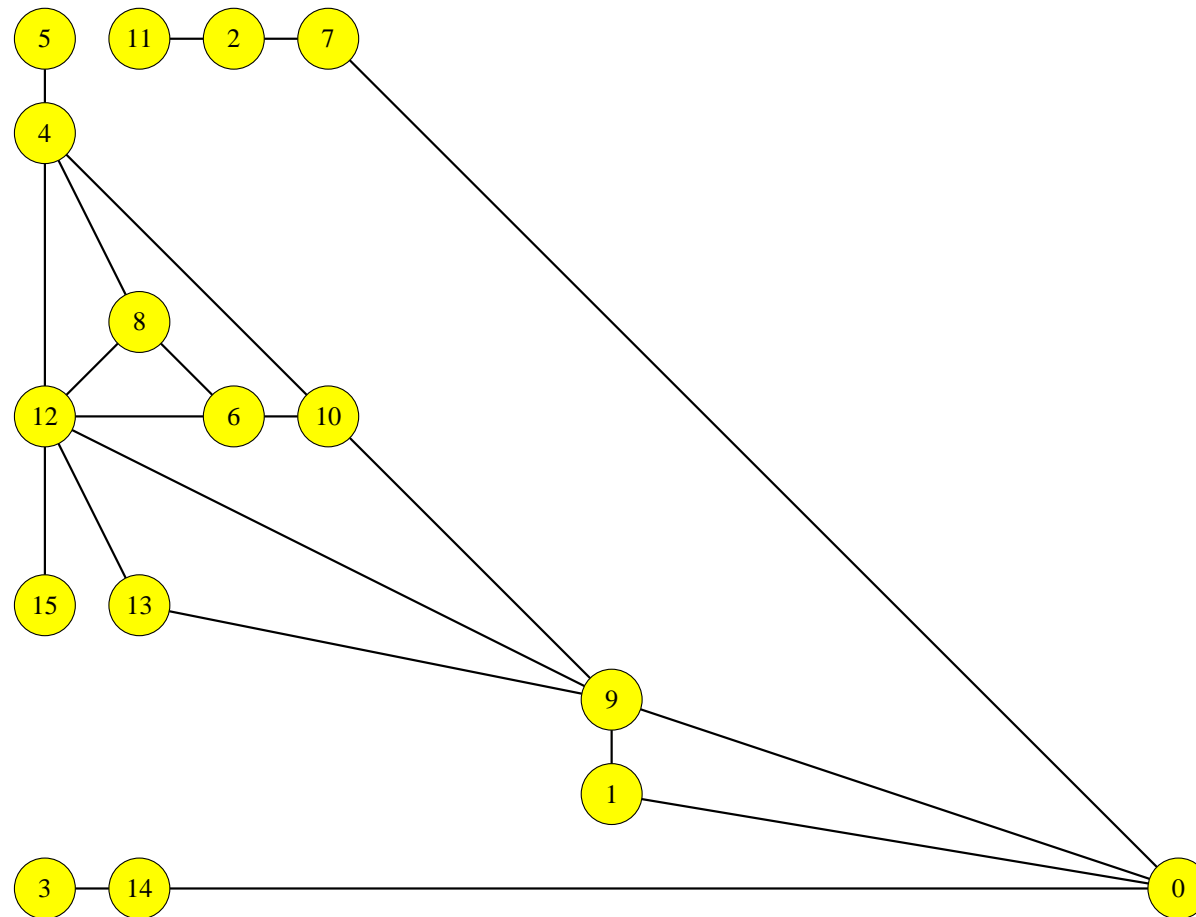
Lösungen zu Problem 1

- Kanonische Ordnung für 3-zusammenhängende (nicht notwendig triangulierte) Graphen: Kant [1996]
- Kanonische Ordnungen für 2-zusammenhängende Graphen: Gutwenger und Mutzel [1998] (auch $O(n)$ Zeit)



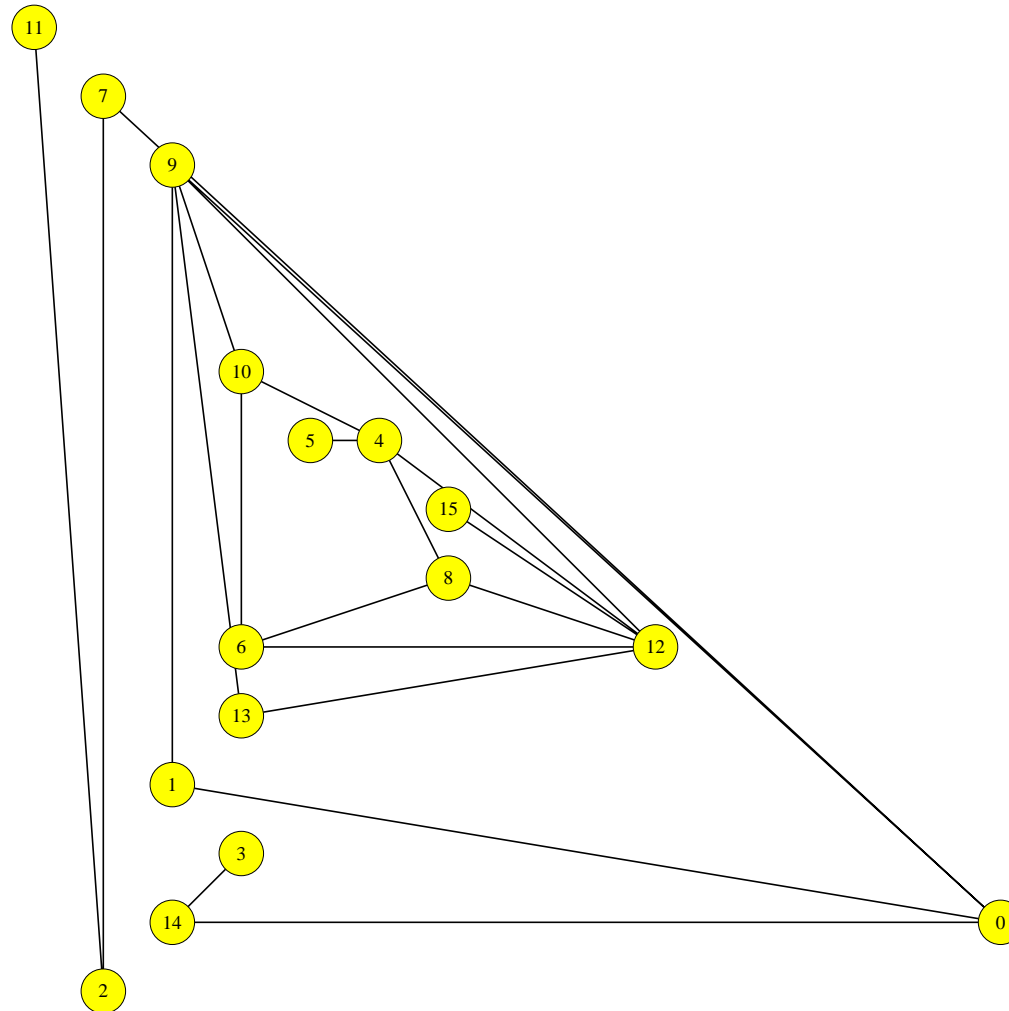
Problem 2: Gittergröße

Kleineres Gitter: Größe $(n-2) \times (n-2)$ Chrobak und Kant [1997]



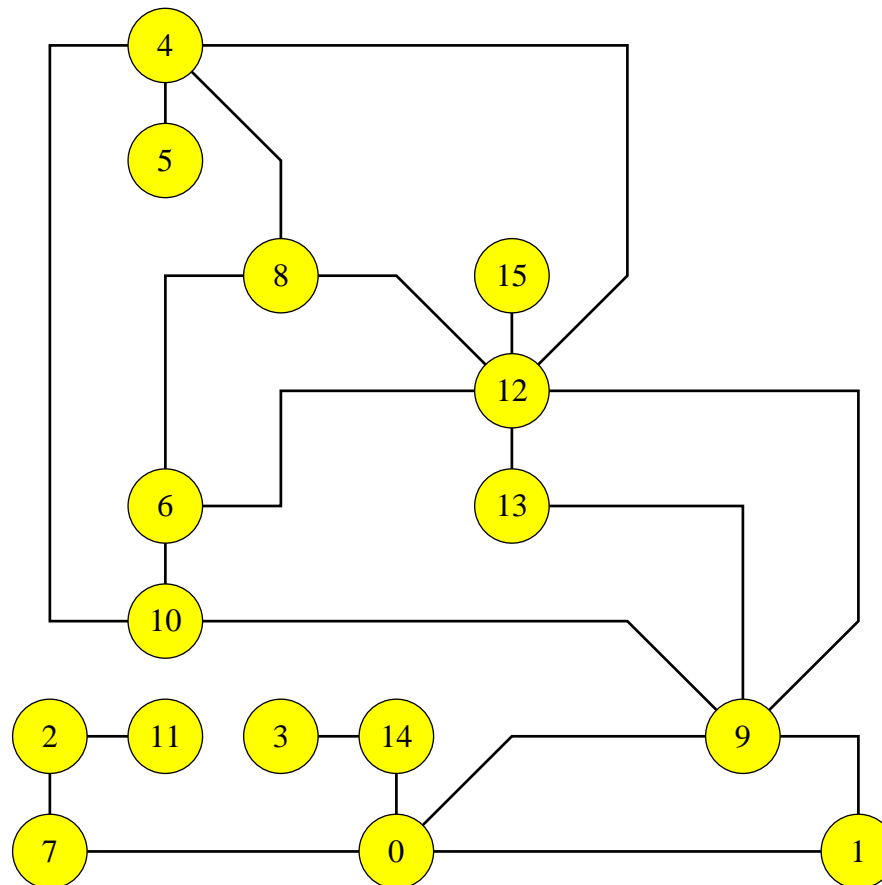
Problem 2: Gittergröße

Alternativ: Schnyder [1990] (ganz anders) Größe $(n-2) \times (n-2)$



Problem 3: Kleine Winkel

Lösung: Quasi-orthogonales Zeichnen d.h. orthogonal bis auf rechteckige Umgebungen um die Knoten: Kant [1996], Gutwenger und Mutzel [1998]

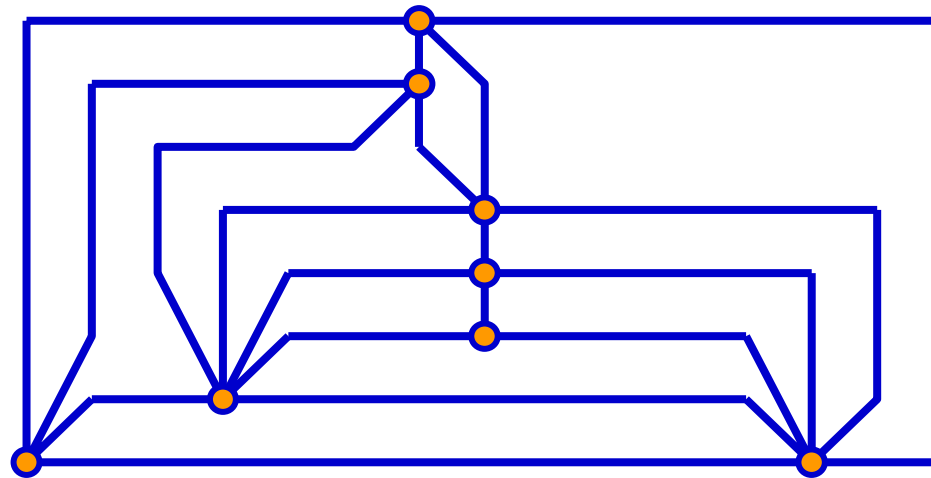


Polyline Zeichnungen

Kant 1996

Gutwenger, Mutzel 1998

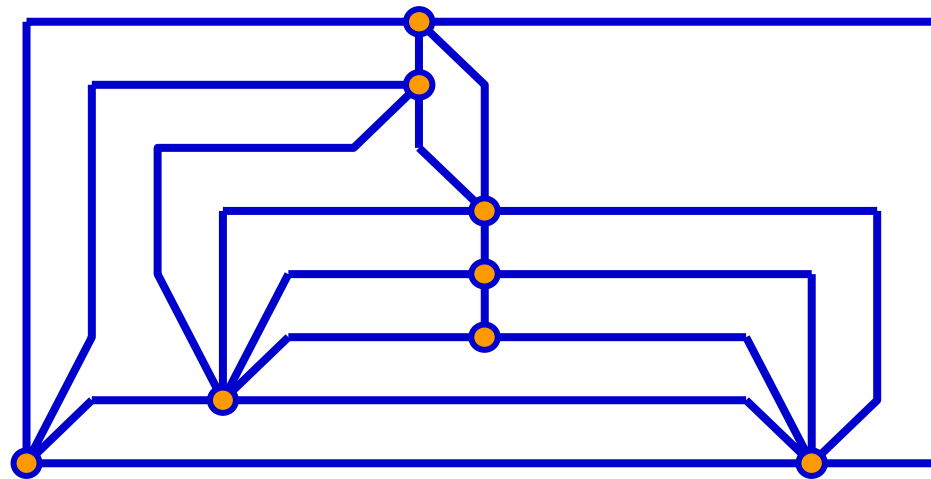
- Polylinien Zeichnungen für 2-zusammenhängende planare Graphen
- **2-Phasen Algorithmus:**
 - (1) berechne die kanonische Ordnung
 - (2) füge iterativ einzelne Knoten oder Knotenkette(n) hinzu



Polyline Zeichnungen

Gutwenger und Mutzel 1998

- Eigenschaften: 1-zusammenhängende Graphen
- Gittergröße: $(2n-5) \times (3/2n-7/2)$
- $5n-15$ Knicke, maximal 3 Knicke pro Kante
- Winkel größer gleich $2/D$ (D: maximaler Knotengrad)
- Idee: Knotenboxen



Übung

