Kap. 3: Hierarchische Zeichenverfahren
3.4 Kreuzungsminimierung

Prof. Dr. Petra Mutzel

Lehrstuhl für
Algorithm Engineering LS11
Universität Dortmund

8. VO WS07/08 6. November 2007

Überblick zu Kapitel 3

Literatur für diese VO

Originalliteratur:

- M.R. Garey und D.S. Johnson: Crossing Number is NP-complete, SIAM J. Algebraic and Discrete Methods 4, 312-316, 1983
- P. Eades und N.C. Wormald: Edge crossings in drawing bipartite graphs, Algorithmica 11, 379-403, 1994

Überblick

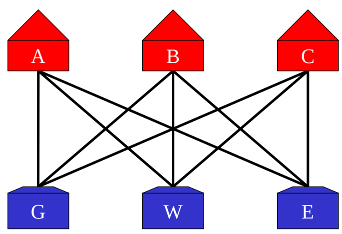
- Einführung
- ➡ Komplexitätsanalysen
- Heuristiken zur Kreuzungsminimierung und Analysen
  - Barycenter
  - Median
  - Greedy-Insert
  - Greedy-Switch
  - Split

3.4 Kreuzungsminimierung

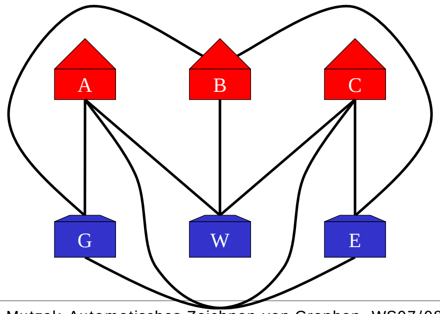
Problem: Bestimmung von Knotenpermutationen innerhalb der Schichten, so dass so wenige Kreuzungen wie möglich entstehen.

1. Übung: Ein Rätsel

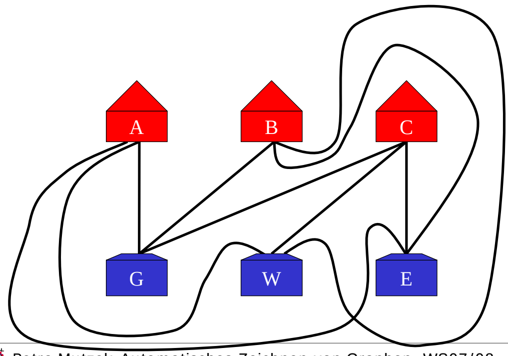
Rätselbuch von Dudeney, 1911



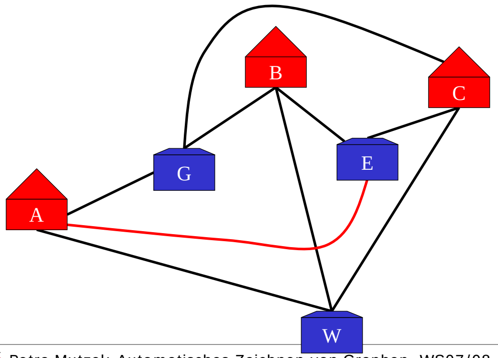
Erster Versuch



Neuer Versuch



Nach Umordnung



Komplexität des Problems

M.R. Garey und D.S. Johnson [1983] haben bewiesen, dass das allgemeine Kreuzungsminimierungsproblem für G=(V,E) und $K \in \mathcal{N}$ NP-vollständig ist.

Allgemeines Kreuzungsminimierungsproblem: Gibt es eine Zeichnung von G auf der Ebene mit höchstens K Kantenüberkreuzungen?

Ein Abfallprodukt dieser Arbeit ist ein Beweis, dass folgendes Problem NP-vollständig ist.

Komplexität

BIPARTITE MULTIGRAPH KREUZUNGSZAHL (BMKZ)

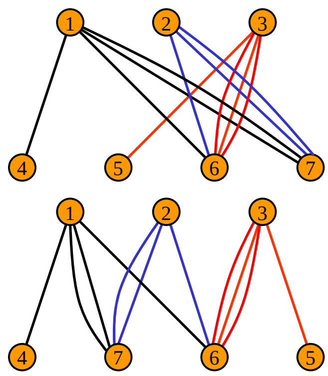
Eingabe: Zusammenhängender bipartiter Multigraph $G=(V_1,V_2,E)$ und Zahl $K \in \mathcal{N}$.

Frage: Existiert eine Zeichnung von G im Einheitsquadrat, in der alle $v \in V_1$ auf der Nordgrenze, und alle $v \in V_2$ auf der Südgrenze platziert werden und in der höchstens K Kantenkreuzungen vorkommen?

Multigraph: Graph mit parallelen Kanten

Beispiel: Multigraph mit K=2?

JA:



Komplexität

Satz (Garey & Johnson, 1983): BMKZ ist NP-vollständig.

Beweis: BMKZ$\in\mathcal{NP}$: Kreuzungen zählen ✓

Transformation vom NP-vollständigen Problem OLA:

OPTIMAL LINEAR ARRANGEMENT (OLA)
Eingabe: Graph $G=(V,E)$, $K\in N$
Frage: Existiert eine Bijektion

$$f: V \to \{1,2,\dots,|V|\} \text{ mit } \sum_{(u,v)\in E} |f(u)-f(v)| \le K \;?$$

Transformation von OLA

Beweis: Sei $(G=(V,E),K)$ eine Instanz von OLA und $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$. O.B.d.A. sei G zusammenhängend.

- Konstruktion einer Instanz $(G'=(V_1,V_2,E_1\cup E_2),K')$ von BMKZ:

$$V_1=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$$
$$V_2=\{w_1,w_2,\dots,w_n\}$$
$$E_1=\left\{|E|^2 \text{ Kopien von } (u_i,w_i) \,\middle|\, 1\le i\le n\right\}$$
$$E_2=\left\{(u_i,w_j) \,\middle|\, i<j \text{ und } (v_i,v_j)\in E\right\}$$
$$K'=|E|^2(K-|E|)+\left(|E|^2-1\right)$$

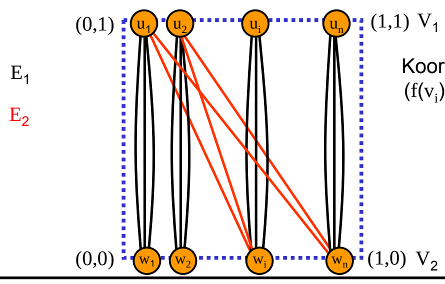
- Konstruktion ist in Polynomialzeit möglich
- G' ist auch zusammenhängend

Komplexitätsbeweis ff.

Wir zeigen:
(G,K) ist JA-Instanz für OLA ⇔ (G',K') ist JA-Instanz für BMKZ.

„⇒“: Geg. $f: V \to \{1,2,\dots,|V|\}$ mit $\sum_{(u,v)\in E} |f(u)-f(v)| \le K$

Konstruktion eines Layouts von G':



Koordinaten:
$(f(v_i)/(n+1),0)$

Komplexitätsbeweis ff.

- Jede (rote) Kante $(u_i,w_j)\in E_2$ kreuzt $(|f(v_j)-f(v_i)|-1)\,|E|^2$ (schwarze) Kanten aus E_1.
- Gesamtzahl der rot-schwarz Kreuzungen:

$$\sum_{(u,v)\in E} (|f(u)-f(v)|-1)\,|E|^2 \le (K-|E|)\,|E|^2$$

- Gesamtzahl der Kreuzungen zwischen roten Kanten aus E_2 ist höchstens $|E|^2-1$
- ⇒ Gesamtzahl aller Kreuzungen ist höchstens

$$(K-|E|)\,|E|^2+|E|^2-1=K'$$

Komplexitätsbeweis ff.

„⇐“: Geg. Zeichnung mit höchstens K' Kreuzungen

- Konstruktion von Bijektionen $f_1: V_1\to\{1,2,\dots,n\}$ und $f_2: V_2\to\{1,2,\dots,n\}$ durch Nummerierung von Westen nach Osten.
- Es muss gelten $f_1(u_i)=f_2(w_i)$ für alle $1\le i\le n$, sonst würde eine Kreuzung von zwei Parallelbünden bereits $|E|^4$ Kreuzungen schwarz/schwarz erzeugen, Widerspruch zu #Kreuzungen ≤ K'.
- Die Zeichnung ist im wesentlichen die vorhin gezeigte.
- Jede rote Kante $(u_i,w_j)\in E_2$ wird wenigstens $(|f(v_i)-f(v_j)|-1)\,|E|^2$ mal gekreuzt (sooft mit schwarzen, dazu andere rote Kanten)
- $\sum_{(u,v)\in E} (|f_1(u)-f_1(v)|-1)|\cancel{E}|^2\le K'=(K-|E|)|E|^2+(|E|^2-1)=|\cancel{E}|^2(K-|E|+1-1/|E|^2$
- $\sum_{(u,v)\in E} (|f_1(u)-f_1(v)|-\cancel{1}) \le K-|E|+(1-1/|E|^2)<K-|\cancel{E}|+1$ wg. L.S. ganzzahlig → R.S. ≤ $|K|$ ✓

Bemerkung zur Komplexität

- Aus diesem Resultat für Multigraphen folgern viele Publikationen, dass Kreuzungsminimierung in geschichteten Graphen, die keine Multigraphen sind, NP-schwierig ist, insbesondere schon für zwei Schichten.
- Das ist nicht bewiesen, aber vermutlich richtig.
- Wir gehen als Arbeitshypothese davon aus.

Offenes Problem

Grundprinzip der gängigen Heuristiken

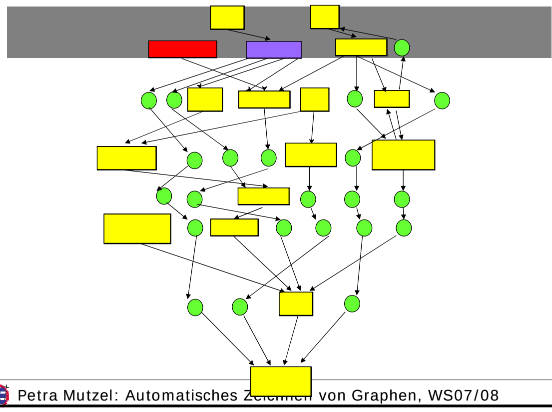
„Layer-by-Layer Sweep“:

- **Traversierung der Schichten runter und rauf:**
  - Betrachte nur zwei benachbarte Schichten:
  - Fixiere die Permutation der zuvor besuchten Schicht und
  - permutiere auf aktueller Schicht mit dem Ziel möglichst wenige Kreuzungen zu erhalten.

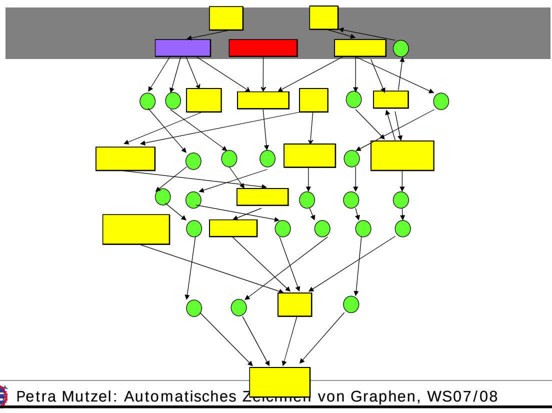
→ neues Problem:

2-Schichten Kreuzungsminimierung mit einer fixierten Schicht

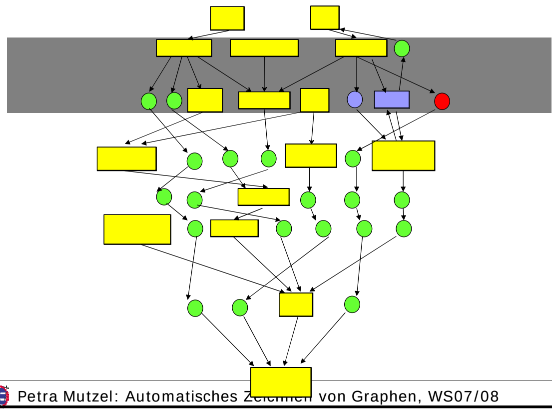
Kreuzungsreduktion



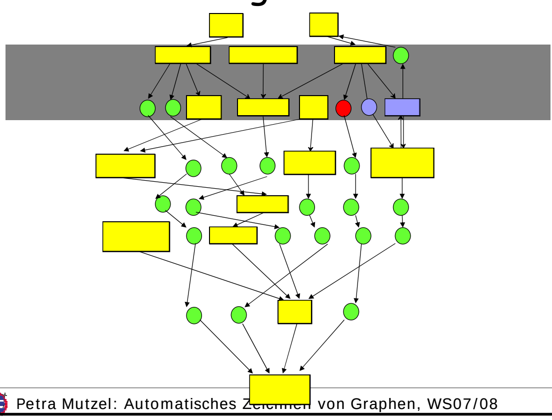
Kreuzungsreduktion



Kreuzungsreduktion



Kreuzungsreduktion



Fixierte 2-Schichten-Kreuzungsminimierung

2-SCHICHTEN-KREUZUNGSMINIMIERUNG MIT EINER FIXIERTEN SCHICHT (2SKM1F)

Eingabe: Zusammenhängender bipartiter (einfacher) Graph $G=(V_1,V_2,E)$ mit fixierten Positionen der Knoten in V_1 und Zahl $K \in \mathbb{N}$.

Frage: Existiert eine Zeichnung von G im Einheitsquadrat, in der alle $v \in V_1$ mit den vorgegebenen Positionen auf der Nordgrenze, und alle $v \in V_2$ (auf beliebigen Positionen) auf der Südgrenze platziert werden und in der höchstens K Kantenkreuzungen vorkommen?

Komplexität

Satz (P. Eades & M. Wormald 1994): E2SKM1F ist NP-vollständig.

Beweis: E2SKM1F$\in\mathcal{NP}$: Kreuzungen zählen ✓

Transformation vom NP-vollständigen Problem FAS:

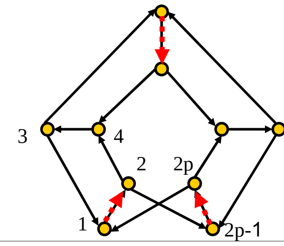
FEEDBACK ARC SET (FAS)
Eingabe: Digraph D=(U,B), K$\in N$
Frage: Existiert A⊆B mit |A|≤K, so dass D´=(U,B\A) azyklisch ist? (A heißt „feedback arc set" F.A.S.)

Beispiel:

FEEDBACK ARC SET (FAS)
Eingabe: Digraph D=(U,B), K$\in N$
Frage: Existiert A⊆B mit |A|≤K, so dass D´=(U,B\A) azyklisch ist? (A heißt „feedback arc set" F.A.S.)

K=2: NEIN!

K=3: JA!



Komplexitätsbeweis

Beweis: Sei (D=(U,B),K) eine Instanz von FAS.
Konstruktion einer Instanz (G=(V_1,V_2,E),M) von E2SKM1F:

$V_1 = \cup_{b\in B} C(b)$ mit $C(b) = \{c_1(b), c_2(b), \dots, c_6(b)\}$ „Klumpen"

$V_2 = U$

E: Für jedes Paar $u \in U, b \in B$ zwei Kanten in E, nämlich

$(u, c_1(b)), (u, c_5(b))$ falls $b = uv$

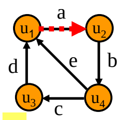
$(u, c_2(b)), (u, c_6(b))$ falls $b = vu$

$(u, c_3(b)), (u, c_4(b))$ falls u nicht inzident mit b

$$M = 4\binom{|B|}{2}\binom{|U|}{2} + |B|\binom{|U|-2}{2} + 4|B|(|U|-2) + |B| + 2K$$

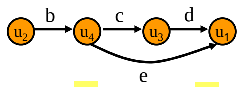
Beispiel:

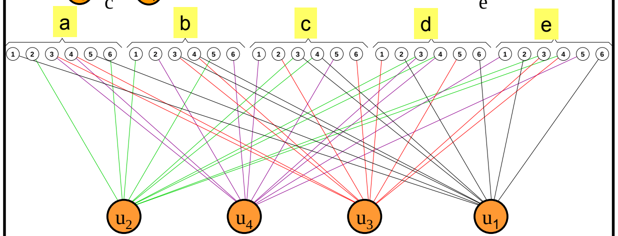
|U|=4, |B|=5, K=1, M=240+5+40+5+2=292



FAS: {a}, d.h. K=1

TOPSORT





Komplexitätsbeweis

- Sei π_1 eine beliebige Permutation von V_1, in der jeder Klumpen zusammen und in natürlicher Ordnung ist, d.h. $\pi_1(c_i(b))<\pi_1(c_j(b))$ für $1 \le i<j\le 6$ und b∈B.

Wir zeigen: D hat F.A.S. der Größe höchstens K ⇔ es existiert Permutation π_2 von V_2, die höchstens M Kreuzungen erzeugt.

Komplexitätsbeweis

Lemma: Ist π_2 eine Permutation von V_2 und $B' = \{(u,v)\in B \mid \pi_2(u) > \pi_2(v)\}$, so gibt es

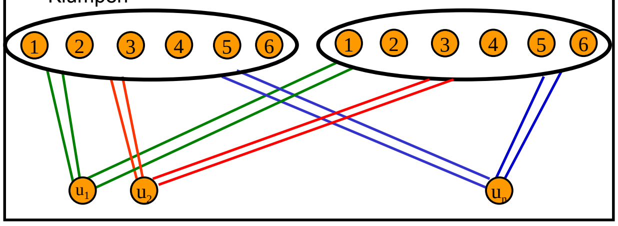
$$M = 4\binom{|B|}{2}\binom{|U|}{2} + |B|\binom{|U|-2}{2} + 4|B|(|U|-2) + |B| + 2|B'|$$

Kreuzungen.

Komplexitätsbeweis ff.

Beweis:

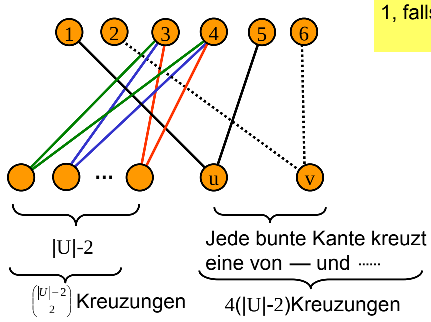
- Kreuzungen zwischen verschiedenen Klumpen: a,b∈B, a≠b
  - $4\binom{|U|}{2}$ Kreuzungen zwischen Kanten, die inzident mit C(a) und C(b) sind denn: für jedes Paar aus U: 4 Kreuzungen
- ⇒ $4\binom{|B|}{2}\binom{|U|}{2}$ Kreuzungen zwischen Kanten verschiedener Klumpen



Komplexitätsbeweis ff.

- Kreuzungen innerhalb eines Klumpens: a=(u,v)∈B
- Ausserdem Kreuzungen zwischen — und ······ :

1, falls $\pi_2(u) < \pi_2(v)$, und…

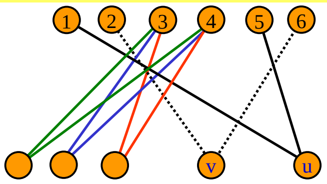


Komplexitätsbeweis ff.

- Kreuzungen innerhalb eines Klumpens: a=(u,v)∈B
- Ausserdem Kreuzungen zwischen — und ······ :

1, falls $\pi_2(u) < \pi_2(v)$, und

3, falls $\pi_2(u) > \pi_2(v)$



- Gesamtzahl der Kreuzungen zwischen Kanten von C(a):

$$\binom{|U|-2}{2}+4(|U|-2)+1 \text{ falls } \pi_2(u)<\pi_2(v)$$

$$\binom{|U|-2}{2}+4(|U|-2)+3 \text{ falls } \pi_2(u)>\pi_2(v)$$ → Def. von B´

Komplexitätsbeweis ff.

- Summe der Kreuzungen innerhalb aller Klumpen:

$$|B|\binom{|U|-2}{2}+4|B|(|U|-2)+|B|+2|B'|$$

- Gesamtzahl der Kreuzungen (zwischen und innerhalb der Klumpen) : wie in Lemma behauptet ✓

ENDE Lemma

weiter im Beweis des Satzes

- „⇒“: D hat F.A.S. B´ der Größe höchstens K
  - D´=(U,B\B´) ist azyklisch
  - Bestimme π_2 mittels TOPSORT
  - → Lemma: höchstens M Kreuzungen, da |B´|≤K
- „⇐“: Es existiert Permutation π_2 von V_2,die höchstens M Kreuzungen erzeugt
  - Sei B´={(u,v)∈B | $\pi_2(u)>\pi_2(v)$}
  - →Lemma: |B´|≤K und
  - D´=(U,B\B´) ist azyklisch d.h. B´ ist ein F.A.S.

ENDE Satz

Bemerkung zur Komplexität

- Die im Beweis verwendeten Graphen sind sehr dicht: $|E|=|V_1||V_2|/3$
- Graphen in der Praxis sind jedoch oft dünn.
- **Frage:** Bleibt E2SKM1F NP-vollständig für dünne Graphen?
- **Antwort:** JA! X. Munos, W. Unger, I. Vrt´o [2002] haben NP-Vollständigkeit für eine Klasse von Graphen mit $|E|=4|V_1|$ gezeigt.

Ende Komplexität