

Kap. 3: Hierarchische Zeichenverfahren

3.4 Kreuzungsminimierung

Prof. Dr. Petra Mutzel



Lehrstuhl für

Algorithm Engineering LS11

Universität Dortmund

8. VO

WS07/08

6. November 2007

Überblick zu Kapitel 3

3.1 Einführung und Überblick ✓

3.2 Schichtzuweisung ✓

3.3 Zählen von Kreuzungen ✓

 3.4 Kreuzungsminimierung

3.5 Koordinatenzuweisung

Literatur für diese VO

Originalliteratur:

- M.R. Garey und D.S. Johnson: Crossing Number is NP-complete, SIAM J. Algebraic and Discrete Methods 4, 312-316, 1983
- P. Eades und N.C. Wormald: Edge crossings in drawing bipartite graphs, Algorithmica 11, 379-403, 1994

Überblick

- Einführung



- Komplexitätsanalysen

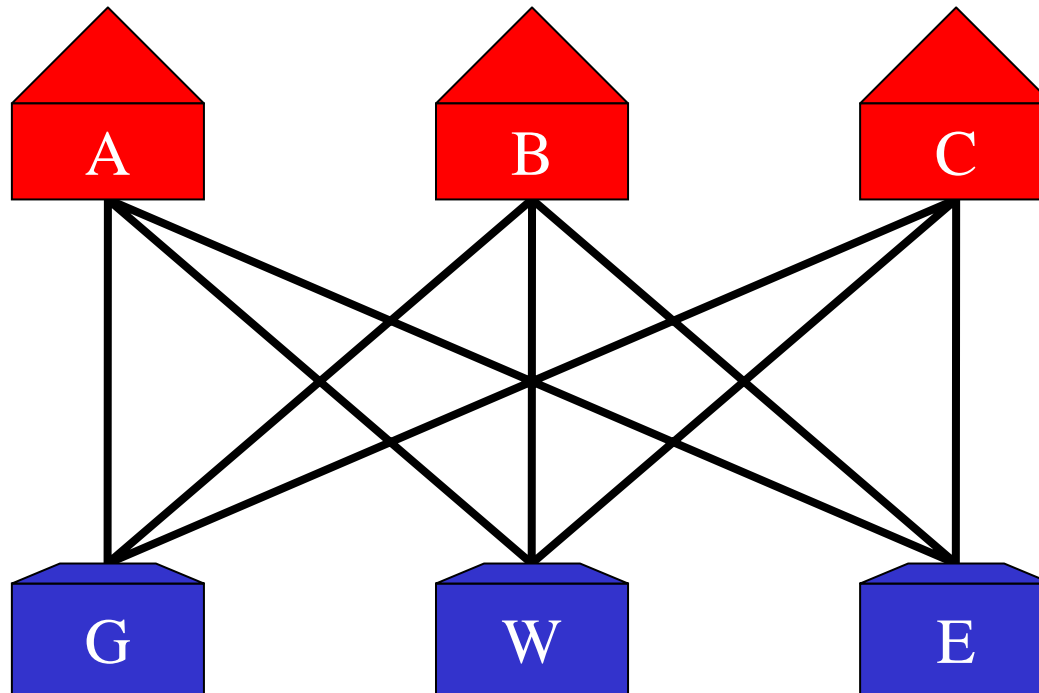
- Heuristiken zur Kreuzungsminimierung und Analysen
 - Barycenter
 - Median
 - Greedy-Insert
 - Greedy-Switch
 - Split

3.4 Kreuzungsminimierung

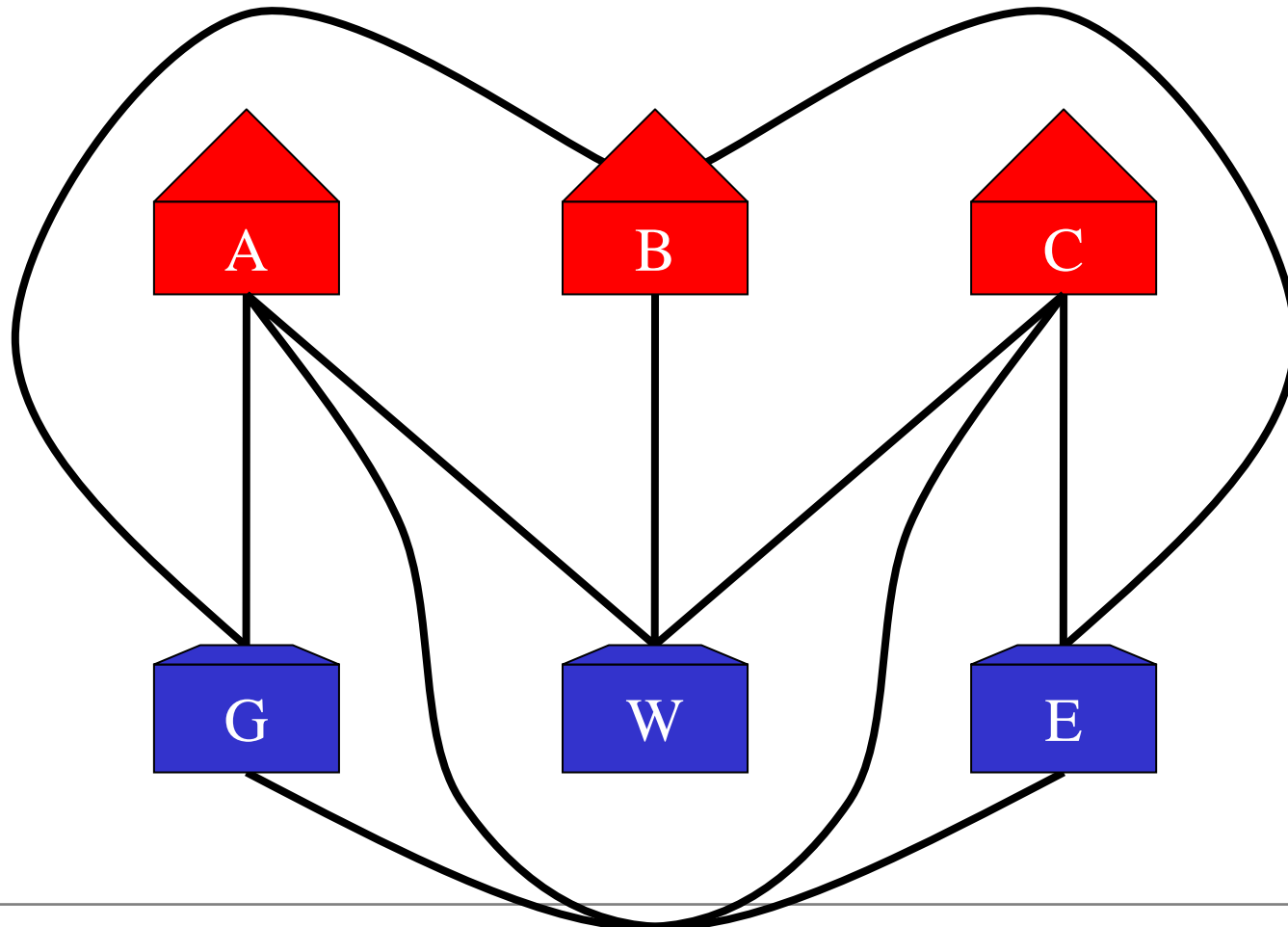
Problem: Bestimmung von Knotenpermutationen innerhalb der Schichten, so dass so wenige Kreuzungen wie möglich entstehen.

1. Übung: Ein Rätsel

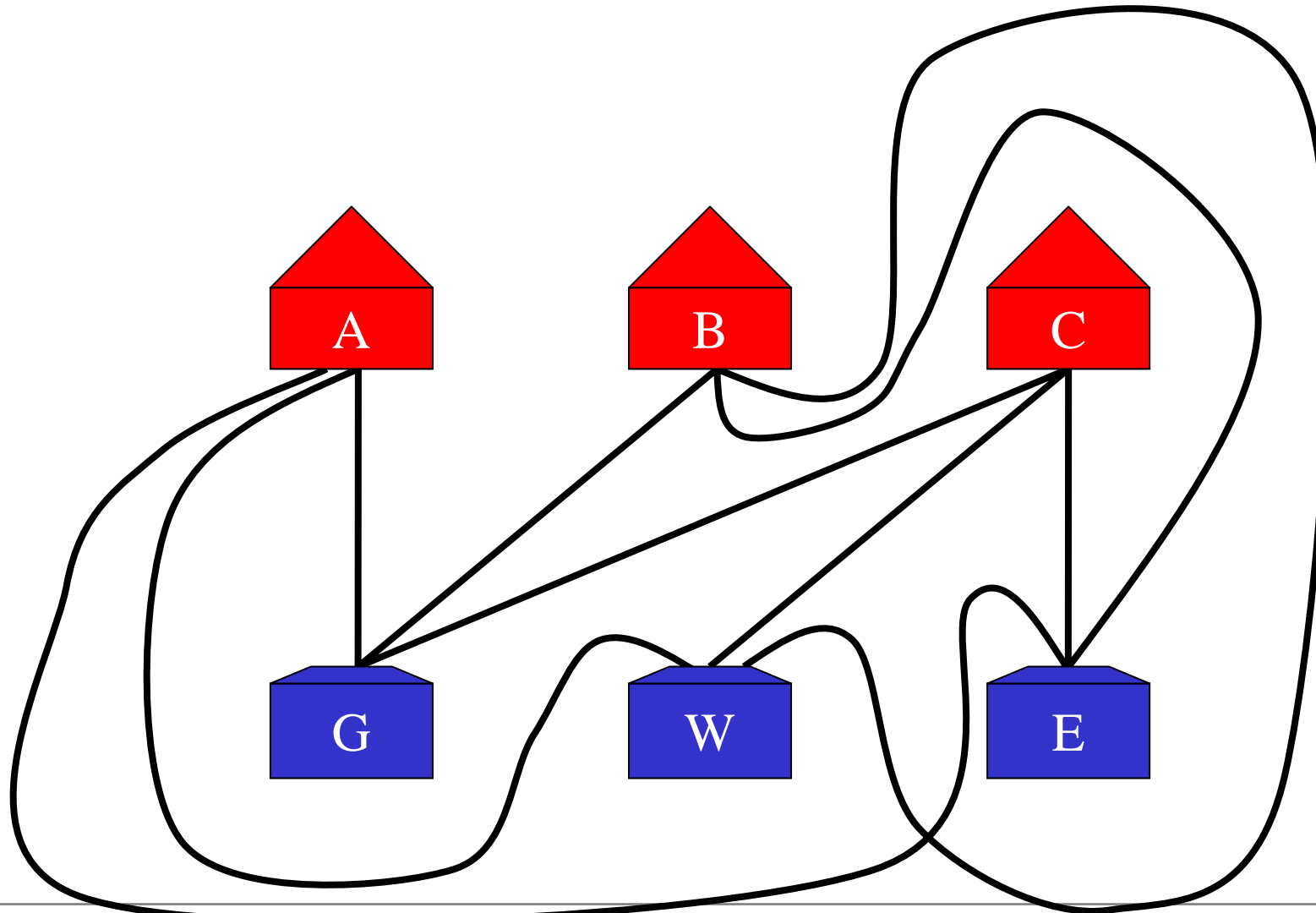
Rätselbuch von Dudeney, 1911



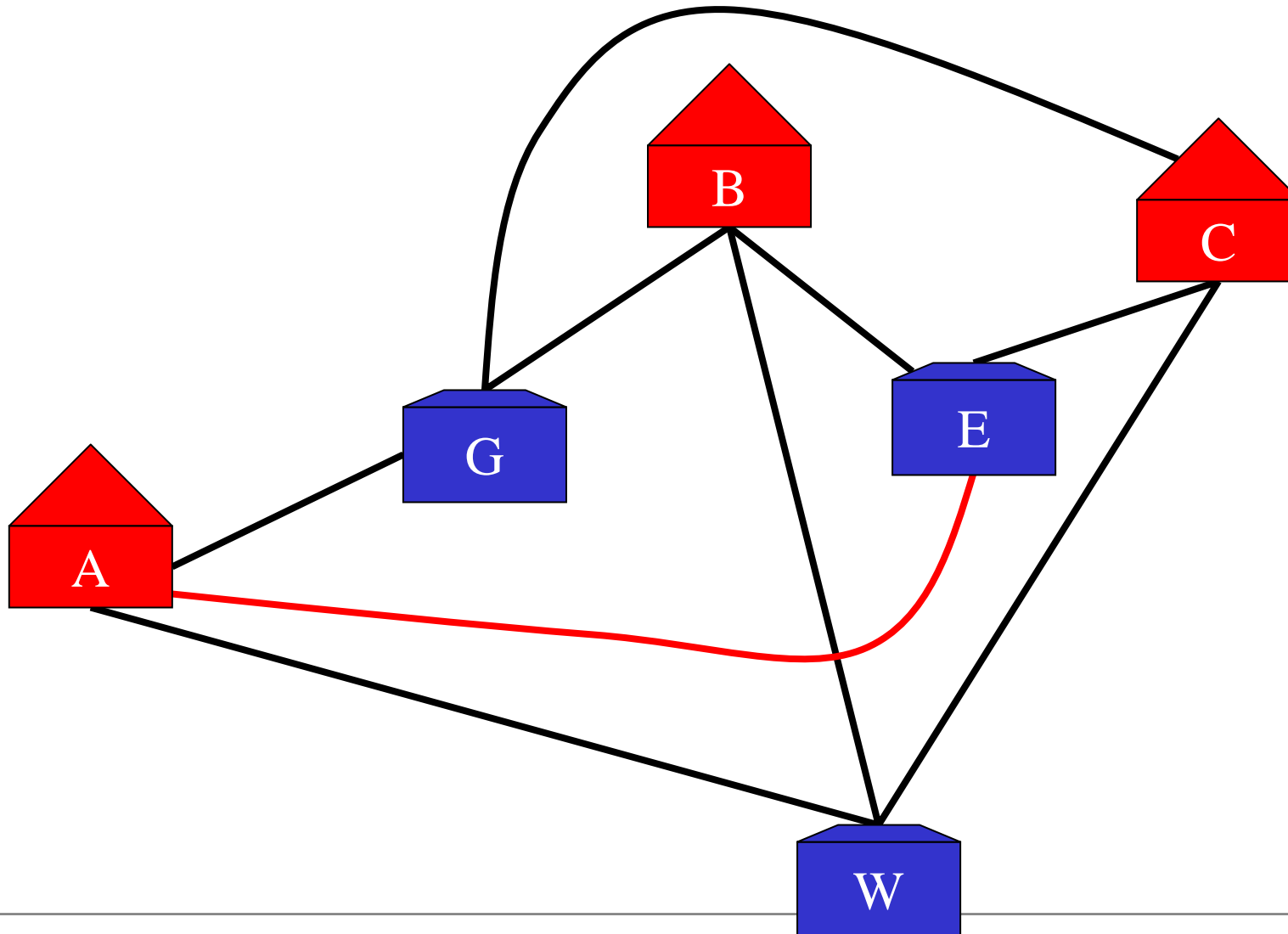
Erster Versuch



Neuer Versuch



Nach Umordnung



Komplexität des Problems

M.R. Garey und D.S. Johnson [1983] haben bewiesen, dass das allgemeine Kreuzungsminimierungsproblem für $G=(V,E)$ und $K \in \mathbb{N}$ NP-vollständig ist.

Allgemeines Kreuzungsminimierungsproblem: Gibt es eine Zeichnung von G auf der Ebene mit höchstens K Kantenüberkreuzungen?

Ein Abfallprodukt dieser Arbeit ist ein Beweis, dass folgendes Problem NP-vollständig ist.

Komplexität

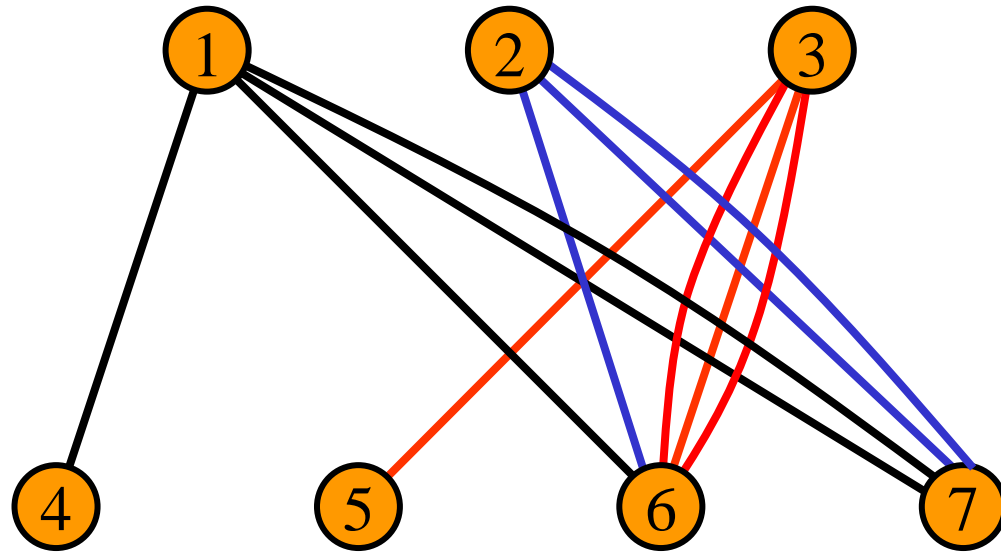
BIPARTITE MULTIGRAPH KREUZUNGSZAHL (BMKZ)

Eingabe: Zusammenhängender bipartiter Multigraph $G=(V_1, V_2, E)$ und Zahl $K \in \mathbb{N}$.

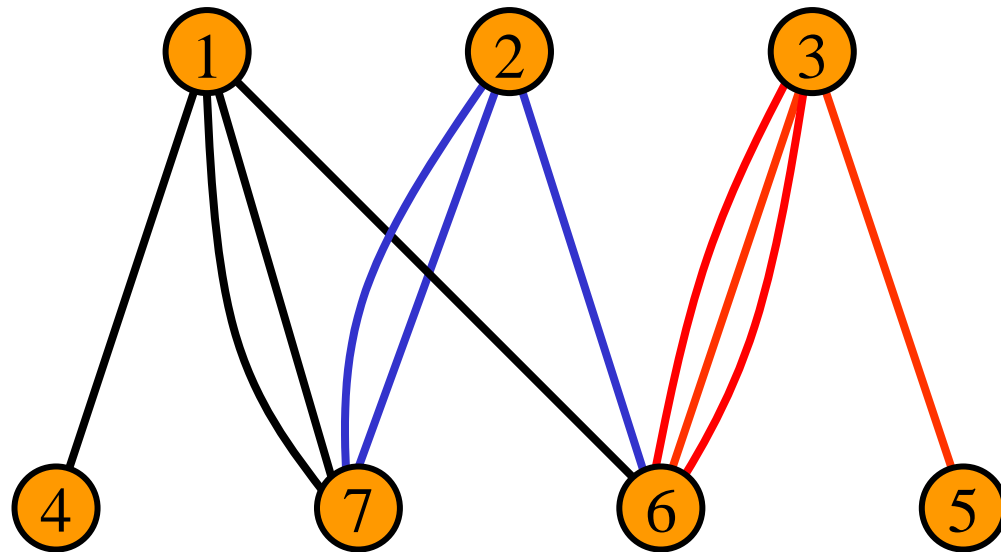
Frage: Existiert eine Zeichnung von G im Einheitsquadrat, in der alle $v \in V_1$ auf der Nordgrenze, und alle $v \in V_2$ auf der Südgrenze platziert werden und in der höchstens K Kantenkreuzungen vorkommen?

Multigraph: Graph mit parallelen Kanten

Beispiel: Multigraph mit $K=2$?



JA:



Komplexität

Satz (Garey & Johnson, 1983): BMKZ ist NP-vollständig.

Beweis: $\text{BMKZ} \in \mathcal{NP}$: Kreuzungen zählen ✓

Transformation vom NP-vollständigen Problem OLA:

OPTIMAL LINEAR ARRANGEMENT (OLA)

Eingabe: Graph $G=(V,E)$, $K \in \mathbb{N}$

Frage: Existiert eine Bijektion

$$f: V \rightarrow \{1,2,\dots,|V|\} \text{ mit } \sum_{(u,v) \in E} |f(u)-f(v)| \leq K ?$$

Transformation von OLA

Beweis: Sei $(G=(V,E),K)$ eine Instanz von OLA und $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$. O.B.d.A. sei G zusammenhängend.

- Konstruktion einer Instanz $(G'=(V_1,V_2,E_1\cup E_2),K')$ von BMKZ:

$$V_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

$$V_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

$$E_1 = \left\{ |E|^2 \text{ Kopien von } (u_i, w_i) \mid 1 \leq i \leq n \right\}$$

$$E_2 = \left\{ (u_i, w_j) \mid i < j \text{ und } (v_i, v_j) \in E \right\}$$

$$K' = |E|^2 (K - |E|) + (|E|^2 - 1)$$

- Konstruktion ist in Polynomialzeit möglich
- G' ist auch zusammenhängend

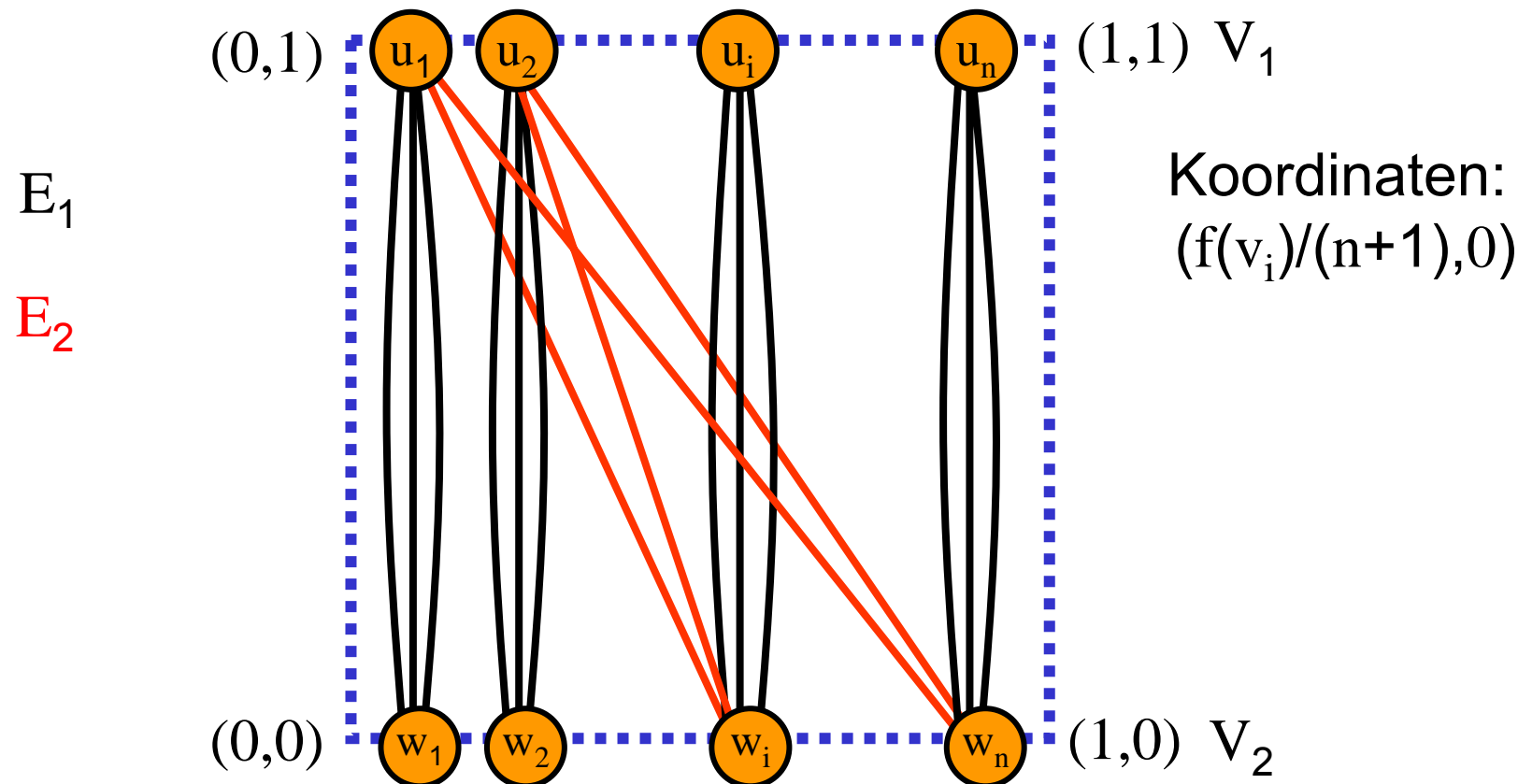
Komplexitätsbeweis ff.

Wir zeigen:

(G, K) ist JA-Instanz für OLA $\Leftrightarrow (G', K')$ ist JA-Instanz für BMKZ.

„ \Rightarrow “: Geg. $f: V \rightarrow \{1, 2, \dots, |V|\}$ mit $\sum_{(u,v) \in E} |f(u) - f(v)| \leq K$

Konstruktion eines Layouts von G' :



Komplexitätsbeweis ff.

- Jede (rote) Kante $(u_i, w_j) \in E_2$ kreuzt $(|f(v_j) - f(v_i)| - 1) |E|^2$ (schwarze) Kanten aus E_1 .

- Gesamtzahl der rot-schwarz Kreuzungen:

$$\sum_{(u,v) \in E} (|f(u) - f(v)| - 1) |E|^2 \leq (K - |E|) |E|^2$$

- Gesamtzahl der Kreuzungen zwischen roten Kanten aus E_2 ist höchstens $|E|^2 - 1$

- \Rightarrow Gesamtzahl aller Kreuzungen ist höchstens

$$(K - |E|) |E|^2 + |E|^2 - 1 = K'$$

Komplexitätsbeweis ff.

„ \Leftarrow “: Geg. Zeichnung mit höchstens K' Kreuzungen

- Konstruktion von Bijektionen $f_1: V_1 \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ und $f_2: V_2 \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ durch Nummerierung von Westen nach Osten.
- Es muss gelten $f_1(u_i) = f_2(w_i)$ für alle $1 \leq i \leq n$, sonst würde eine Kreuzung von zwei Parallelbündeln bereits $|E|^4$ Kreuzungen schwarz/schwarz erzeugen, Widerspruch zu $\# \text{Kreuzungen} \leq K'$.
- Die Zeichnung ist im wesentlichen die vorhin gezeigte.
- Jede rote Kante $(u_i, w_j) \in E_2$ wird wenigstens $(|f_1(u_i) - f_1(w_j)| - 1) |E|^2$ mal gekreuzt (sooft mit schwarzen, dazu andere rote Kanten)
- $\sum_{(u,v) \in E} (|f_1(u) - f_1(v)| - 1) |E|^2 \leq K' = (K - |E|) |E|^2 + (|E|^2 - 1) = |E|^2 (K - |E| + 1 - 1/|E|^2)$
- $\sum_{(u,v) \in E} (|f_1(u) - f_1(v)| - 1) \leq K - |E| + (1 - 1/|E|^2) < K - |E| + 1$ wg. L.S. ganzzahlig
 $\rightarrow \text{R.S.} \leq |K| \checkmark$

Bemerkung zur Komplexität

- Aus diesem Resultat für Multigraphen folgern viele Publikationen, dass Kreuzungsminimierung in geschichteten Graphen, die keine Multigraphen sind, NP-schwierig ist, insbesondere schon für zwei Schichten.
- Das ist nicht bewiesen, aber vermutlich richtig.
- Wir gehen als Arbeitshypothese davon aus.

Offenes Problem

Grundprinzip der gängigen Heuristiken

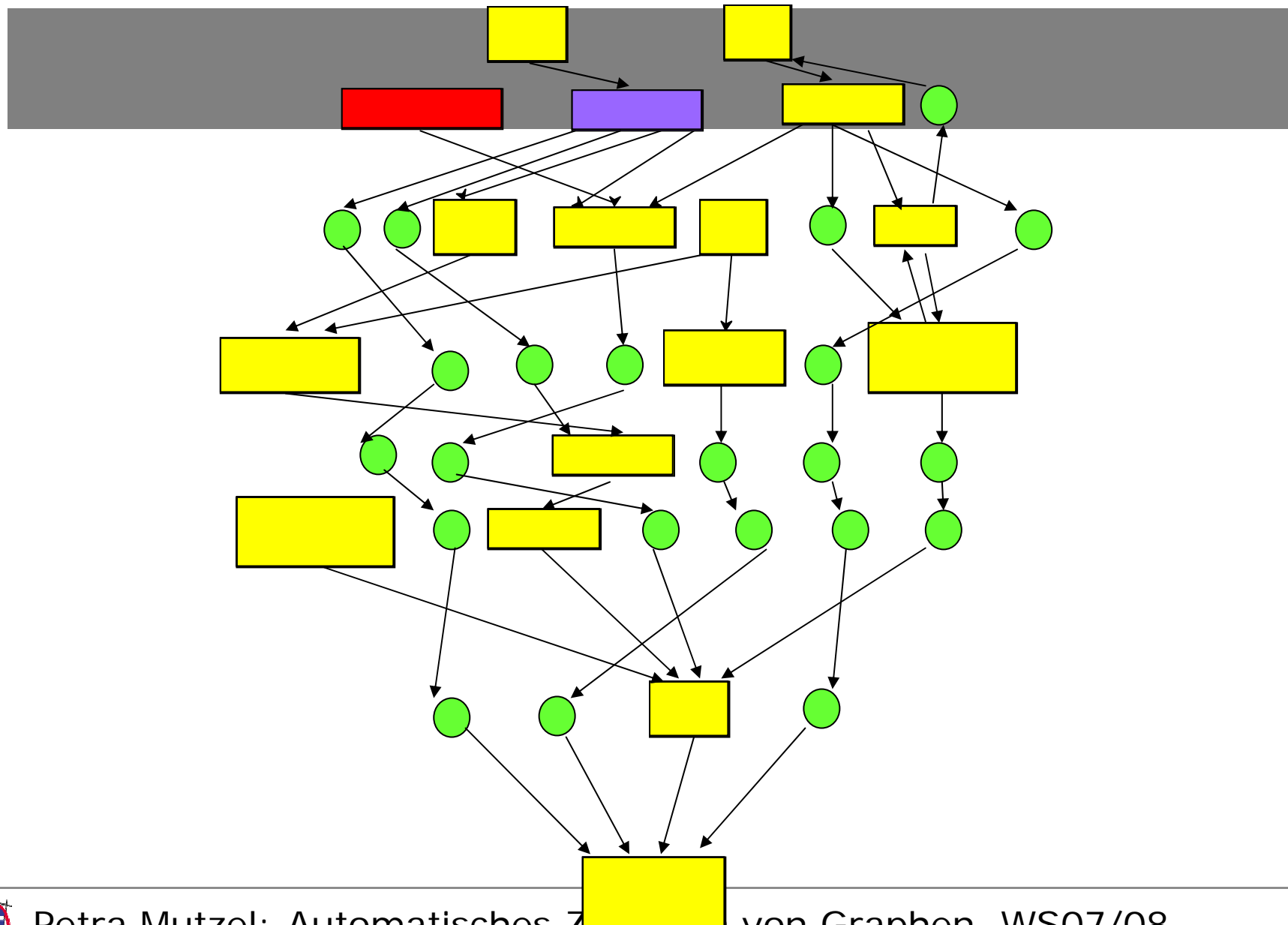
„Layer-by-Layer Sweep“:

- **Traversierung der Schichten runter und rauf:**
 - Betrachte nur zwei benachbarte Schichten:
 - Fixiere die Permutation der zuvor besuchten Schicht und
 - permutiere auf aktueller Schicht mit dem Ziel möglichst wenige Kreuzungen zu erhalten.

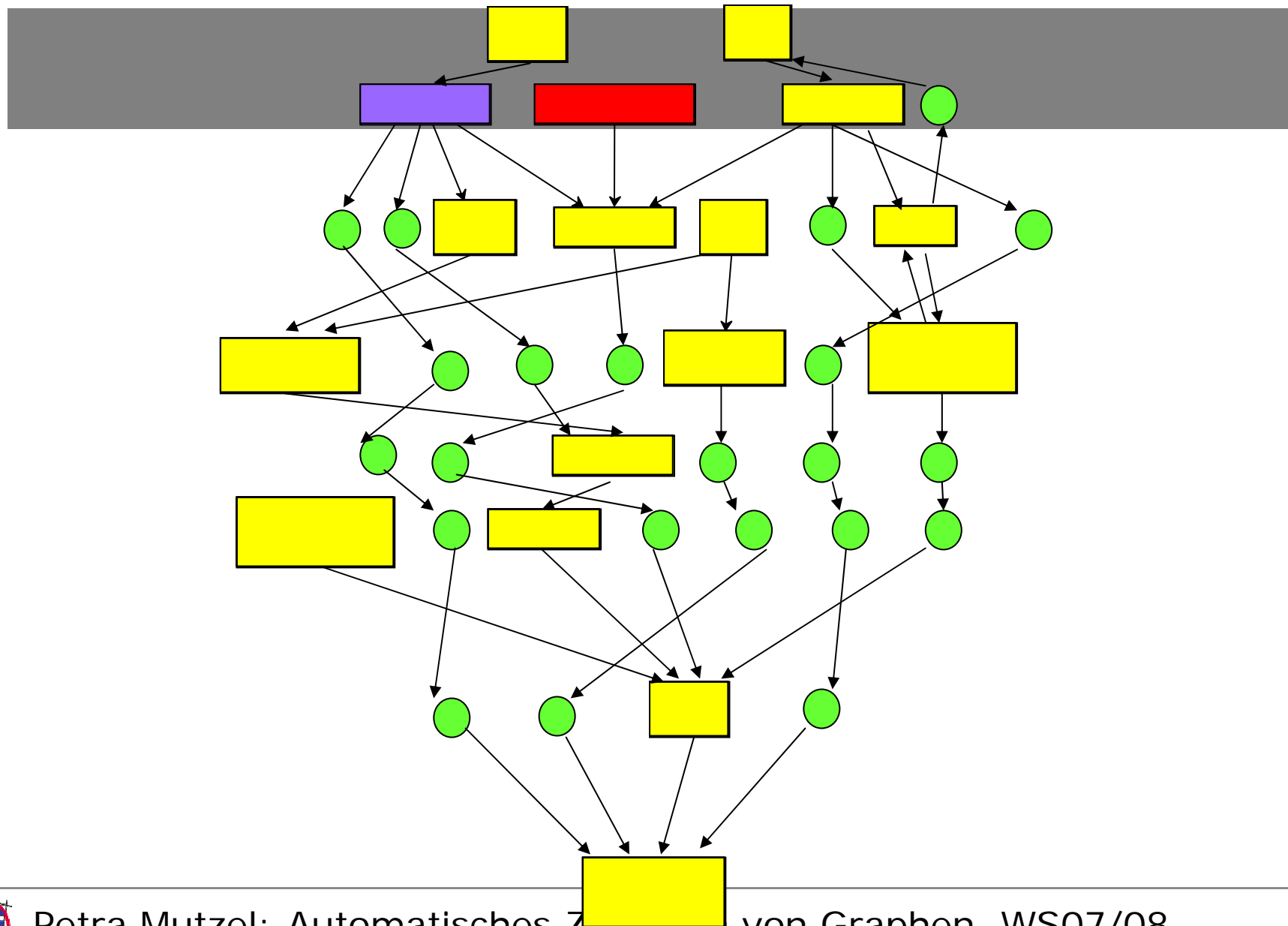
→ neues Problem:

2-Schichten Kreuzungsminimierung mit einer fixierten Schicht

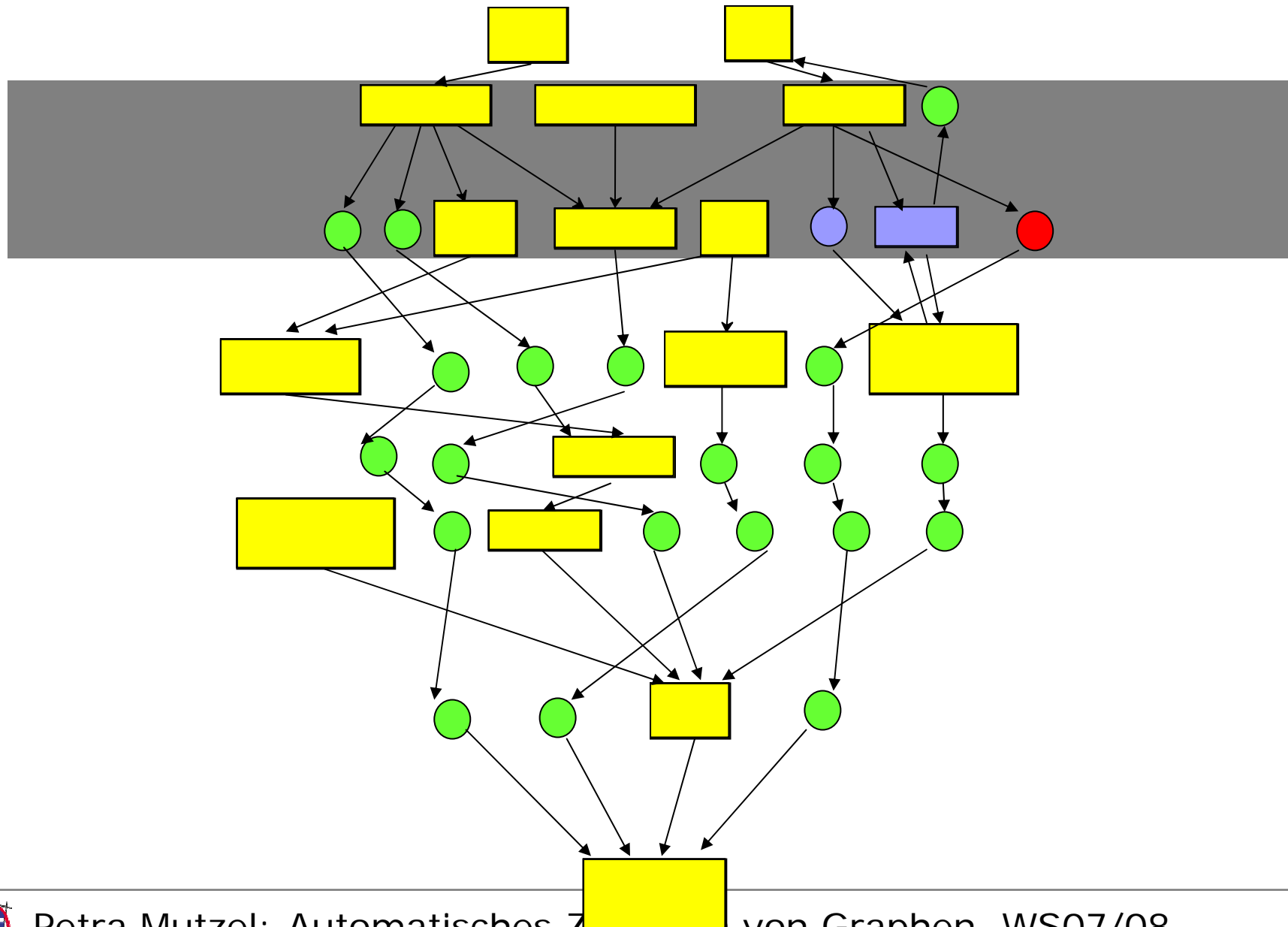
Kreuzungsreduktion



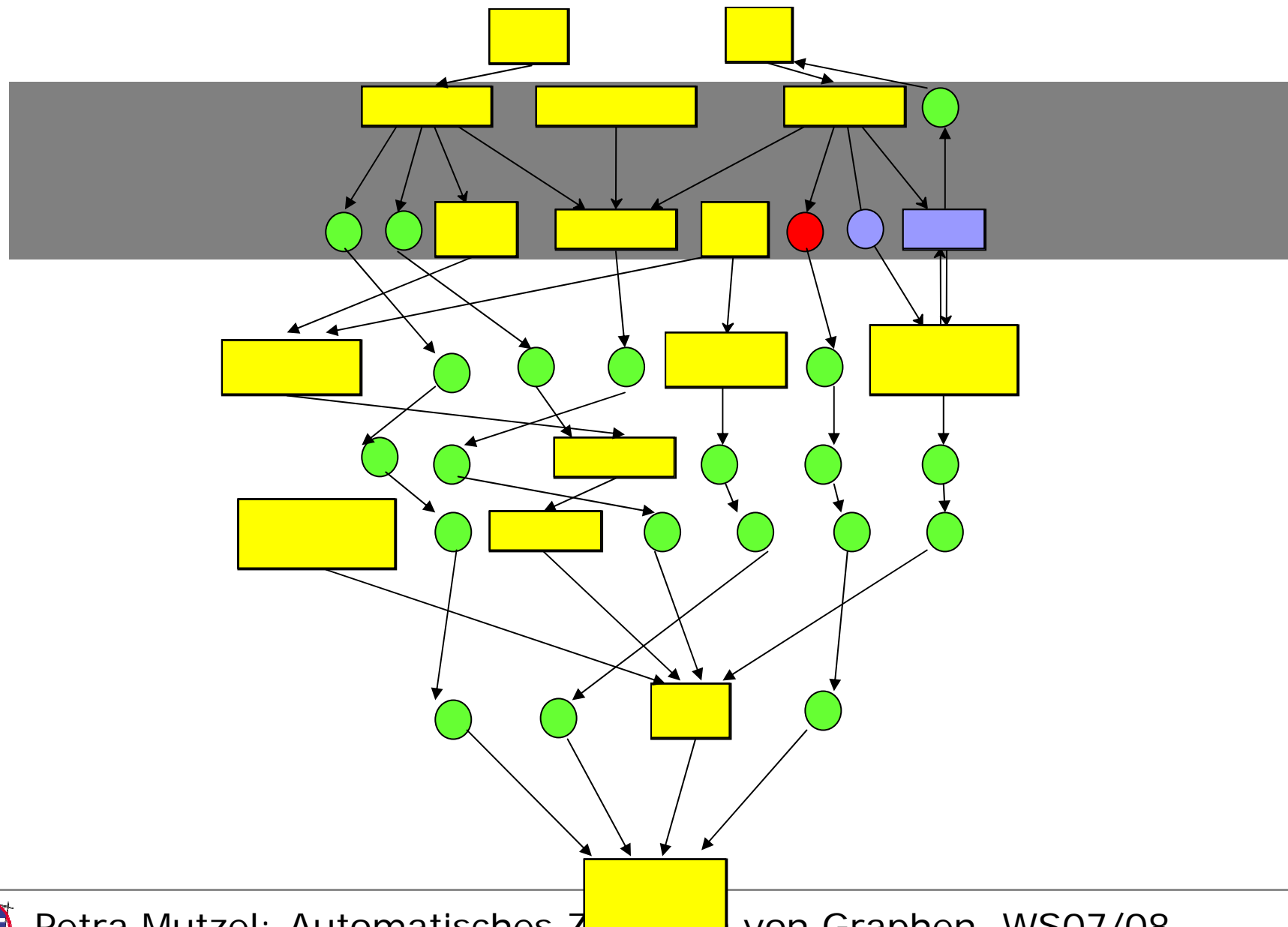
Kreuzungsreduktion



Kreuzungsreduktion



Kreuzungsreduktion



Fixierte 2-Schichten-Kreuzungsminimierung

2-SCHICHTEN-KREUZUNGSMINIMIERUNG MIT EINER FIXIERTEN SCHICHT (2SKM1F)

Eingabe: Zusammenhängender bipartiter (einfacher) Graph $G=(V_1, V_2, E)$ mit fixierten Positionen der Knoten in V_1 und Zahl $K \in \mathbb{N}$.

Frage: Existiert eine Zeichnung von G im Einheitsquadrat, in der alle $v \in V_1$ mit den vorgegebenen Positionen auf der Nordgrenze, und alle $v \in V_2$ (auf beliebigen Positionen) auf der Südgrenze platziert werden und in der höchstens K Kantenkreuzungen vorkommen?

Komplexität

Satz (P. Eades & M. Wormald 1994): E2SKM1F ist NP-vollständig.

Beweis: $E2SKM1F \in \mathcal{NP}$: Kreuzungen zählen ✓

Transformation vom NP-vollständigen Problem FAS:

FEEDBACK ARC SET (FAS)

Eingabe: Digraph $D=(U,B)$, $K \in \mathbb{N}$

Frage: Existiert $A \subseteq B$ mit $|A| \leq K$, so dass $D'=(U, B \setminus A)$ azyklisch ist? (A heißt „feedback arc set“ F.A.S.)

Beispiel:

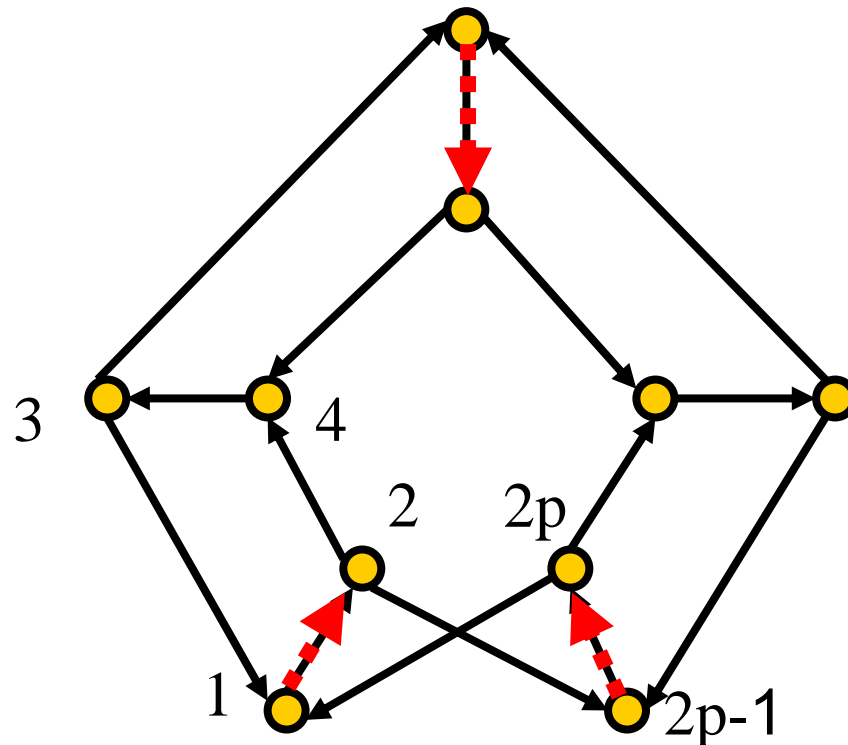
FEEDBACK ARC SET (FAS)

Eingabe: Digraph $D=(U,B)$, $K \in \mathbb{N}$

Frage: Existiert $A \subseteq B$ mit $|A| \leq K$, so dass $D'=(U, B \setminus A)$ azyklisch ist? (A heißt „feedback arc set“ F.A.S.)

$K=2$: NEIN!

$K=3$: JA!



Komplexitätsbeweis

Beweis: Sei $(D=(U,B),K)$ eine Instanz von FAS.

Konstruktion einer Instanz $(G=(V_1,V_2,E),M)$ von E2SKM1F:

$$V_1 = \cup_{b \in B} C(b) \text{ mit } C(b) = \{c_1(b), c_2(b), \dots, c_6(b)\} \text{ „Klumpen“}$$

$$V_2 = U$$

E : Für jedes Paar $u \in U, b \in B$ zwei Kanten in E , nämlich

$$(u, c_1(b)), (u, c_5(b)) \text{ falls } b = uv$$

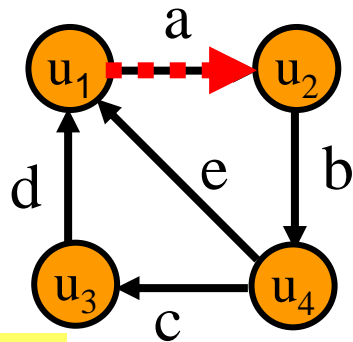
$$(u, c_2(b)), (u, c_6(b)) \text{ falls } b = vu$$

$$(u, c_3(b)), (u, c_4(b)) \text{ falls } u \text{ nicht inzident mit } b$$

$$M = 4 \binom{|B|}{2} \binom{|U|}{2} + |B| \binom{|U|-2}{2} + 4|B|(|U|-2) + |B| + 2K$$

Beispiel:

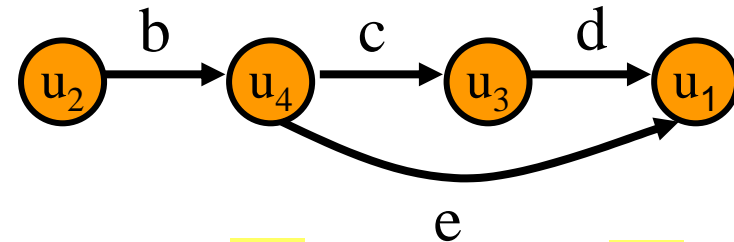
$$|U|=4, |B|=5, K=1, M=240+5+40+5+2=292$$



FAS: {a},
d.h. $K=1$



TOPSORT



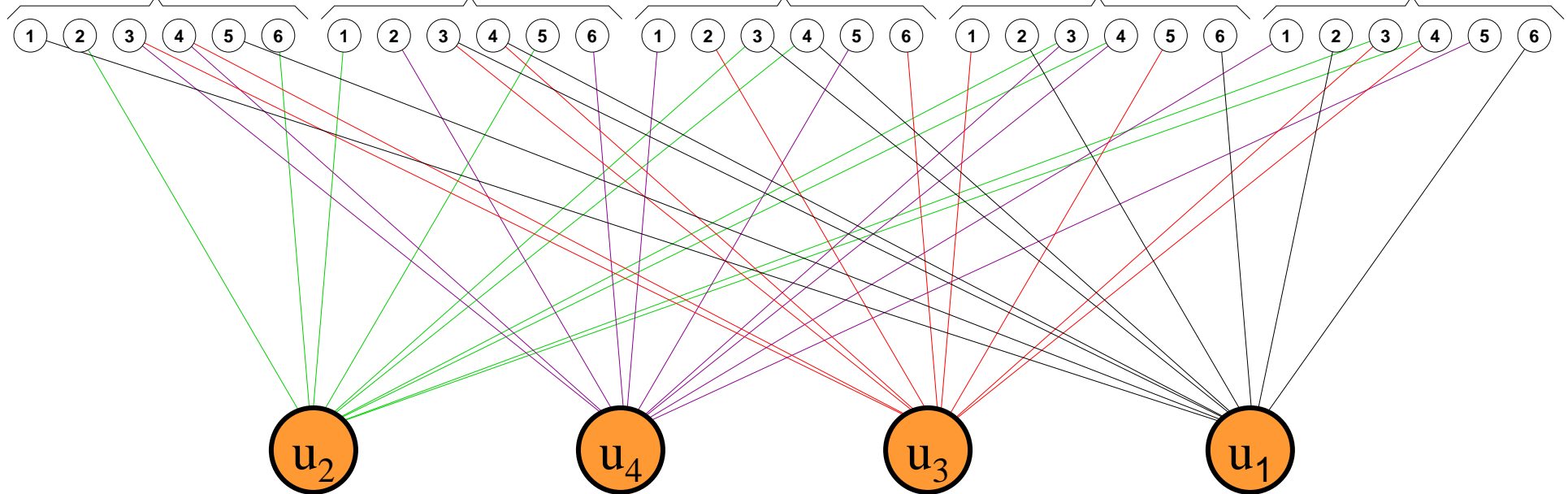
a

b

c

d

e



Komplexitätsbeweis

- Sei π_1 eine beliebige Permutation von V_1 , in der jeder Klumpen zusammen und in natürlicher Ordnung ist, d.h. $\pi_1(c_i(b)) < \pi_1(c_j(b))$ für $1 \leq i < j \leq 6$ und $b \in B$.

Wir zeigen: D hat F.A.S. der Größe höchstens $K \Leftrightarrow$
es existiert Permutation π_2 von V_2 , die höchstens M
Kreuzungen erzeugt.

Komplexitätsbeweis

Lemma : Ist π_2 eine Permutation von V_2 und V_2 und $B' = \{(u, v) \in B \mid \pi_2(u) > \pi_2(v)\}$, so gibt es

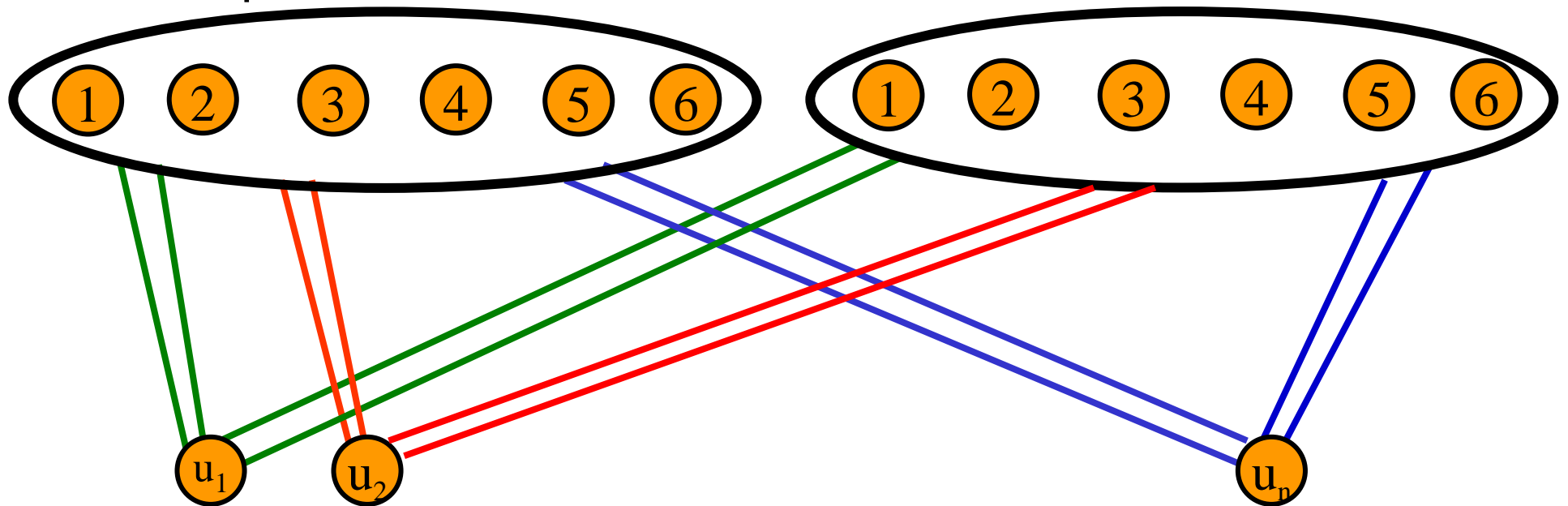
$$M = 4 \binom{|B|}{2} \binom{|U|}{2} + |B| \binom{|U| - 2}{2} + 4|B|(|U| - 2) + |B| + 2|B'|$$

Kreuzungen.

Komplexitätsbeweis ff.

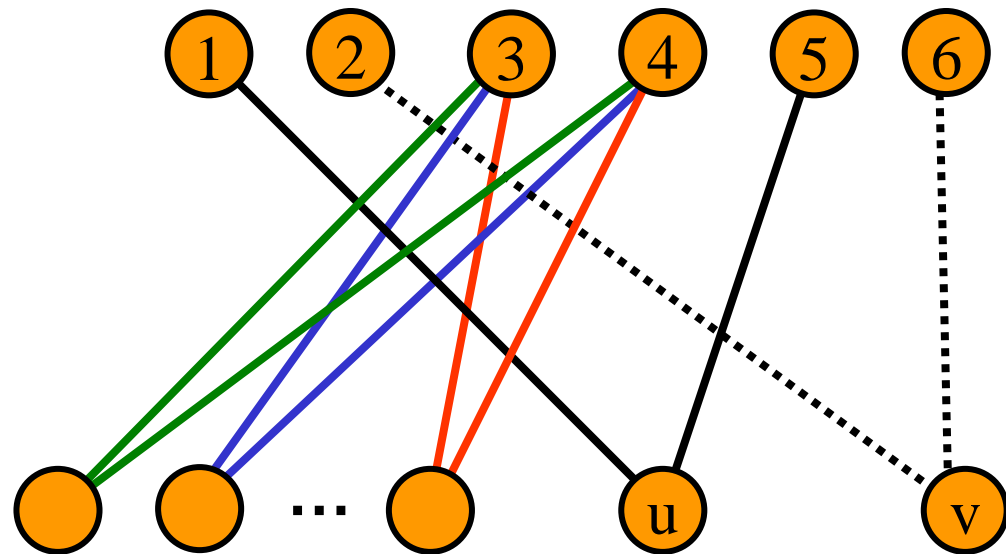
Beweis:

- Kreuzungen zwischen verschiedenen Klumpen: $a, b \in B, a \neq b$
 - $4 \binom{|U|}{2}$ Kreuzungen zwischen Kanten, die inzident mit $C(a)$ und $C(b)$ sind **denn: für jedes Paar aus U : 4 Kreuzungen**
- $\Rightarrow 4 \binom{|B|}{2} \binom{|U|}{2}$ Kreuzungen zwischen Kanten verschiedener Klumpen



Komplexitätsbeweis ff.

- Kreuzungen innerhalb eines Klumpens: $a=(u,v)\in B$
- Ausserdem Kreuzungen zwischen — und :



1, falls $\pi_2(u) < \pi_2(v)$,
und...

$|U|-2$

$|U|-2$

$\binom{|U|-2}{2}$ Kreuzungen

$\binom{|U|-2}{2}$ Kreuzungen

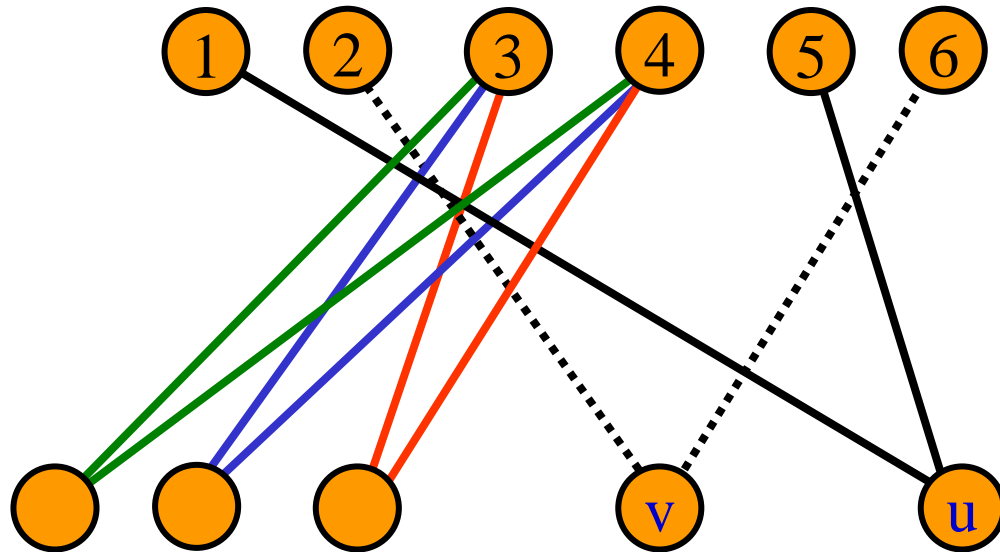
Jede bunte Kante kreuzt
eine von — und

Jede bunte Kante kreuzt
eine von — und

$4(|U|-2)$ Kreuzungen

Komplexitätsbeweis ff.

- Kreuzungen innerhalb eines Klumpens: $a=(u,v) \in B$
- Ausserdem Kreuzungen zwischen — und :



1, falls $\pi_2(u) < \pi_2(v)$,
und

3, falls $\pi_2(u) > \pi_2(v)$

- Gesamtzahl der Kreuzungen zwischen Kanten von $C(a)$:

$$\binom{|U|-2}{2} + 4(|U|-2) + 1 \text{ falls } \pi_2(u) < \pi_2(v)$$

$$\binom{|U|-2}{2} + 4(|U|-2) + 3 \text{ falls } \pi_2(u) > \pi_2(v) \rightarrow \text{Def. von } B'$$

Komplexitätsbeweis ff.

- Summe der Kreuzungen innerhalb aller Klumpen:

$$|B| \binom{|U|-2}{2} + 4|B| (|U|-2) + |B| + 2|B|$$

- Gesamtzahl der Kreuzungen (zwischen und innerhalb der Klumpen) : wie in Lemma behauptet ✓

ENDE Lemma

weiter im Beweis des Satzes

- „ \Rightarrow “: D hat F.A.S. B' der Größe höchstens K
 - $D'=(U, B \setminus B')$ ist azyklisch
 - Bestimme π_2 mittels TOPSORT
 - \rightarrow Lemma: höchstens M Kreuzungen, da $|B'| \leq K$
- „ \Leftarrow “: Es existiert Permutation π_2 von V_2 , die höchstens M Kreuzungen erzeugt
 - Sei $B'=\{(u,v) \in B \mid \pi_2(u) > \pi_2(v)\}$
 - \rightarrow Lemma: $|B'| \leq K$ und
 - $D'=(U, B \setminus B')$ ist azyklisch d.h. B' ist ein F.A.S.

ENDE Satz

Bemerkung zur Komplexität

- Die im Beweis verwendeten Graphen sind sehr dicht:
 $|E| = |V_1| |V_2| / 3$
- Graphen in der Praxis sind jedoch oft dünn.
- **Frage:** Bleibt E2SKM1F NP-vollständig für dünne Graphen?
- **Antwort:** JA! X. Munos, W. Unger, I. Vrt' o [2002] haben NP-Vollständigkeit für eine Klasse von Graphen mit $|E| = 4|V_1|$ gezeigt.