Kap. 3: Hierarchische Zeichenverfahren
3.4 Kreuzungsminimierung ffff
Exakte Verfahren

Prof. Dr. Petra Mutzel

Lehrstuhl für
Algorithm Engineering LS11
Universität Dortmund

11./12. VO WS07/08 19./20. November 2007

Überblick zu Kapitel 3

Überblick

Literatur für diese VO

- Originalliteratur für Interessierte: M. Grötschel, M. Jünger und G. Reinelt: A cutting plane algorithm for the linear ordering problem. Operations Research 32, 1195-1220, 1984
- P.Mutzel: Skript-Teil: NP-schwierige kombinatorische Optimierungsprobleme (s. Web)
- Nachschlagewerk bei Interesse: M. Jünger und D. Naddef (Eds.): Computational Combinatorial Optimization, Optimal or Provably Near-Optimal Solutions, LNCS 2241, Springer, 2001, i.e. 157-223

Überblick: Exakte Kreuzungsminimierung

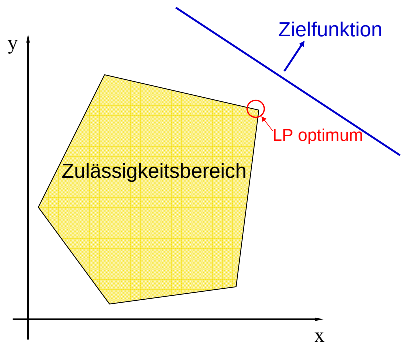
- Einführung Kombinatorische Optimierungsprobleme
- Transformation in das Linear Ordering Problem (LOP)
- ILP-Formulierung für LOP
- Exakte Verfahren für Ganzzahlige Optimierung
  - Schnittebenenverfahren
  - Branch-and-Cut

Kombinatorische Optimierungsprobleme

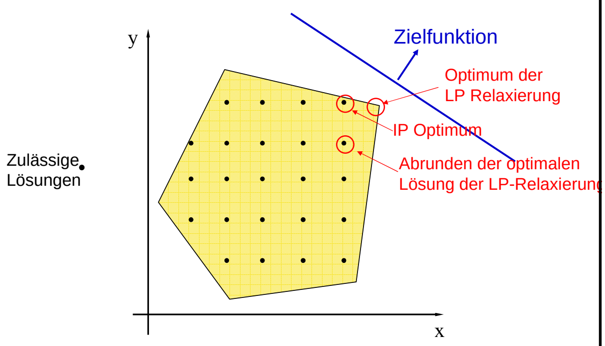
Definition Kombinatorisches Optimierungsproblem

Gegeben sind:
- endliche Menge E (Grundmenge)
- Teilmenge I der Potenzmenge 2^E von E (zul. Mengen)
- Kostenfunktion $c: E \to K$

Gesucht ist:
eine Menge $I^* \in I$, so dass
$c(I^*) = \sum_{e \in I^*} c(e)$ so groß (klein) wie möglich ist.



Lineares Programm



Ganzzahliges Lineares Program

Kombinatorische Optimierungsprobleme und Ganzzahlige Optimierung

Ist E eine endliche Menge und $F \subseteq E$, dann ist der charakteristische Vektor $\chi^F \in R^E$ für F definiert als

$$\chi_e^F = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e \in F$$
$$\chi_e^F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e \notin F$$

Beispiel: MST

Wir assoziieren zu jedem Element $e \in E$ eine Komponente des Vektors χ^F.

Umgekehrt, ist jeder 0/1-Vektor $x \in \{0,1\}^E$ charakteristischer Vektor einer Teilmenge F_x von E, und zwar gilt:
$F_x = \{e \in E \mid x_e = 1\}$

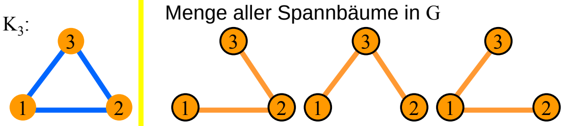
Jedes kombinatorische OP kann als 0/1-ILP formuliert werden und umgekehrt:

Beispiel: MST auf K_3

Gegeben: vollständiger Graph G=(V,A) mit 3 Knoten

Zulässige Menge:
Menge aller Spannbäume in G

K_3:



Einführung von 0/1-Variablen x_e=1 g.d.w. Kante in Baum

Bedingungen:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 & & (1)\\ x_e &\geq 0 & \text{für } e = 1,2,3 & \quad (2)\\ x_e &\leq 1 & \text{für } e = 1,2,3 & \quad (3)\end{aligned}$$

Kurzer Einschub: Polyedertheorie

Eine Teilmenge $P \subseteq R^n$ heißt *Polyeder*, falls es eine Matrix $A \in R^{(m,n)}$ und einen Vektor $b \in R^m$ gibt mit $P = \{x \in R^n \mid Ax \leq b\}$.

Es gilt: Jedes Polyeder $P \neq R^n$ ist der Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen.

Ein *Polytop* ist ein beschränktes Polyeder:

$$P \subseteq \{x \in R^n \mid ||x|| \leq B\} \text{ für ein } B > 0.$$

Minkowski / Weyl

Satz [Minkowski 1896, Weyl 1935]: Jedes Polyeder $P \in R^n$ besitzt eine Darstellung der Form

$$P = \text{conv}(V) + \text{cone}(E),$$

wobei V und E endlichen Teilmengen des R^n entsprechen und umgekehrt.

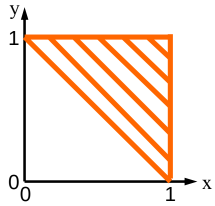
Deshalb existieren immer zwei Darstellungen von Polyedern

$$P = \{x \in R^n \mid Ax \leq b\} = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$$

Polytope lassen sich durch $P = \text{conv}(V)$ darstellen.

Beispiel für Minkowski/Weyl

$P = \text{conv}(V), V = \left\{\binom{0}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1}\right\}$



Alternative Darstellung durch Ungleichungen:

$P = \left\{\binom{x}{y} \in R^2 \mid x \le 1, y \le 1, x + y \ge 1\right\}$

Kombinatorische Optimierung vs. 0/1-IP

Gegeben ist kombinatorisches OP: (E,I,c)

Assoziiertes 0/1-ILP:

$P_F = \text{conv}\{\chi^F \in \{0,1\}^E \mid F \in I\}$
$\max\{c^T x \mid x \in P_F\}$

Jedes Polyeder hat Beschreibung durch Ungleichungen

Wir können also jedes komb. OP als LP formulieren

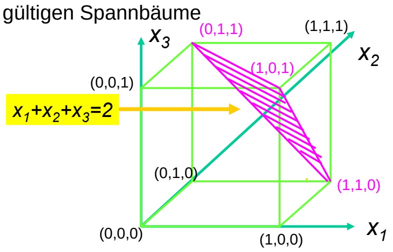
Probleme:
- Berechnung der LP-Darstellung nicht in pol.- Zeit möglich
- i.A. exponentiell viele Ungleichungen
- Ungleichungen besitzen Koeffizienten exponentieller Größe

Beispiel: MST auf G=K_3

Beispiel: MST auf K_3

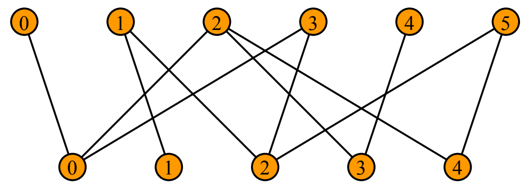
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 & & (1) \\ x_j &\ge 0 & \text{für } j = 1,2,3 & \quad (2) \\ x_j &\le 1 & \text{für } j = 1,2,3 & \quad (3) \end{aligned}$$

Charakt. Vektor der gültigen Spannbäume
(1,1,0)
(1,0,1)
(0,1,1)



Transformation in das Linear Ordering Problem

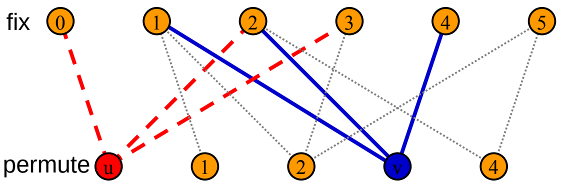
2-Schichten-Kreuzungsminimierungsproblem (fix)



Geg: Bipartiter Graph auf 2 Schichten, Permutation der oberen Schicht ist fixiert

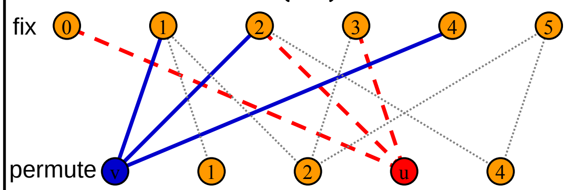
Gesucht: Permutation der Knoten der unteren Schicht mit kleinster Anzahl von Kreuzungen

Exakte 2-Schichten Kreuzungsminimierung (fix)



Kosten von u < v: $c_{uv} = 3$

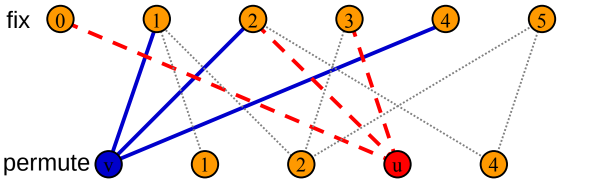
Exakte 2-Schichten Kreuzungsminimierung (fix)



cost of v < u: $c_{vu} = 5$

cost of u < v: $c_{uv} = 3$

Exakte 2-Schichten Kreuzungsminimierung (fix)

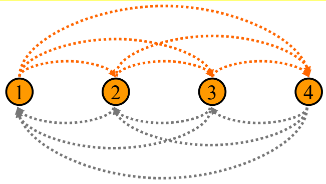


Linear Ordering Problem

Finde eine Permutation π von *1,2,...,n* die $\sum_{u=1}^{n-1} \sum_{v=u+1}^{n} c_{\pi(u)\pi(v)}$ minimiert

Lineares Ordnungsproblem (LOP)

Gegeben: ein vollständiger gerichteter Graph G=(V,A) mit Kantengewichten c_{uv} für alle Bögen (u,v) in A.



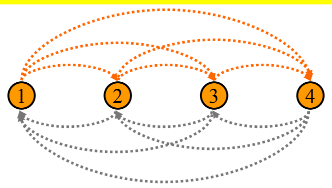
Gewichte: ($-c_{uv}$)

Gesucht: eine lineare Ordnung der Knoten, so dass die Summe der Gewichte aller Bögen, die dieser Ordnung entsprechen, maximiert wird.

Anwendungen: Triangulation von Input-Output Matrizen, Rangbestimmung in Turniersportarten, Kreuzungsminimierung

Graphen-Theoretische Formulierung

Gegeben: ein vollständiger gerichteter Graph G=(V,A) mit Kantengewichten c_{uv} für alle Bögen (u,v) in A.



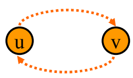
Gesucht: ein spannendes, azyklisches Turnier in G mit größtem Gewicht

Turnier: T⊆A: entweder (i,j)∈T oder (j,i)∈T aber nicht beide

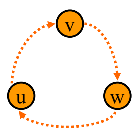
ILP-Formulierung für LOP

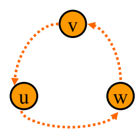
Sei T ein spannendes azyklisches Turnier
Verbotene Strukturen in T:

Variablen x_{uv} für alle Bögen uv∈A



$$x_{uv} + x_{vu} = 1$$





$$x_{uv} + x_{vw} + x_{wu} \leq 2 \qquad x_{vu} + x_{wv} + x_{uw} \leq 2$$

ILP-Formulierung für LOP

$$\max \sum_{u \neq v} c_{uv} x_{uv}$$

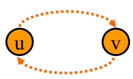
$x_{uv} + x_{vu} = 1$	$\forall u \neq v$	Gleichungen
$0 \leq x_{uv} \leq 1$	$\forall u \neq v$	Triviale Ungleichungen
$x_{uv} + x_{vw} + x_{wu} \leq 2$	$\forall u \neq v \neq w$	3-Kreis Ungleichungen
x_{uv} ganzzahlig		

Ausschluss der 3-er Kreise genügt

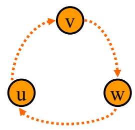
Spannendes Azyklisches Turnier

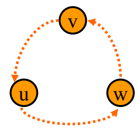
Verbotene Strukturen in T:

$u < v < w :$
$x_{vu} = 1 - x_{uv}$



$$\cancel{x_{uv} + x_{vu} = 1}$$





$$\cancel{x_{uv} + x_{vw} + x_{wu} \leq 2} \qquad \cancel{x_{vu} + x_{wv} + x_{uw} \leq 2}$$

$$x_{uv} + x_{vw} - x_{uw} \leq 1 \qquad x_{uv} + x_{vw} - x_{uw} \geq 0$$

ILP für LOP

$$\max \sum_{u \neq v} c_{uv} x_{uv}$$

$$x_{uv} + x_{vu} = 1 \quad \forall u \neq v$$

$$0 \leq x_{uv} \leq 1 \quad \forall u \neq v$$

$$x_{uv} + x_{vw} + x_{wu} \leq 2 \quad \forall u \neq v \neq w$$

$$x_{uv} \text{ ganzzahlig}$$

Projektion: $x_{vu}=1-x_{uv}$

$$\max \sum_{u \neq v} c_{uv} x_{uv}$$

$$0 \leq x_{uv} \leq 1 \quad \forall u < v \qquad \text{Triviale Ungl.}$$

$$0 \leq x_{uv} + x_{vw} - x_{uw} \leq 1 \quad \forall u < v < w \qquad \text{3-Kreis Ungl.}$$

$$x_{uv} \text{ ganzzahlig}$$

Geometrische Interpretation LOP

$$\max \sum_{u \neq v} c_{uv} x_{uv}$$

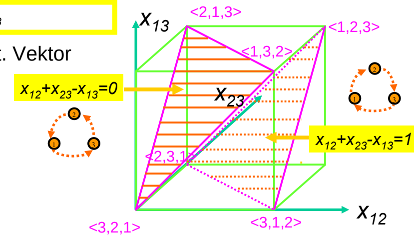
$$0 \leq x_{uv} \leq 1 \quad \forall u < v$$

$$0 \leq x_{uv} + x_{vw} - x_{uw} \leq 1 \quad \forall u < v < w$$

$$x_{uv} \text{ ganzzahlig}$$

Beispiel $n=3$: x_{12} x_{13} x_{23}

Permutation	charakt. Vektor
<1,2,3>	(1,1,1)
<2,1,3>	(0,1,1)
<2,3,1>	(0,0,1)
<1,3,2>	(1,1,0)
<3,1,2>	(1,0,0)
<3,2,1>	(0,0,0)



$$\max \sum_{u \neq v} c_{uv} x_{uv}$$

$$0 \leq x_{uv} \leq 1 \quad \forall u < v$$

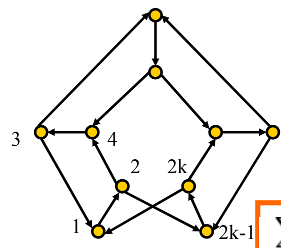
$$0 \leq x_{uv} + x_{vw} - x_{uw} \leq 1 \quad \forall u < v < w$$

$$x_{uv} \text{ ~~ganzzahlig~~}$$

LP-Relaxierung des IPs

- n<6: Entfernung der Ganzzahligkeitsbedingungen macht keinen Unterschied
- D.h. die Ecken des relaxierten LOP-Polytops sind alle ganzzahlig
- n≥6: zusätzliche Ungleichungen notwendig

Beispiel: Moebius-Leiter Ungleichungen:



Sei M⊆E Möbius-Leiter in D=(V,E) mit k aneinander-hängenden Kreisen, mit k ist ungerade

Es ist notwendig, mindestens Bögen zu entfernen, um G azyklisch zu machen

$$\sum_{uv \in M} x_{uv} \leq |M| - (k+1)/2$$

Möbius-Ungleichungen beschreiben Facetten des LOP-Polytops

Foschungsgebiet: Polyedrische Kombinatorik

Polyedrische Kombinatorik: LOP

Konvexe Hülle aller charakteristischer Vektoren, die Permutationen von l Elementen beschreiben.

l	n
3	8
4	20
5	40
6	910
7	87,472
8	>488,602,996

Anzahl der Facetten, d.h. die Anzahl der theoretisch not-wendigen Linearen Ungleichungen

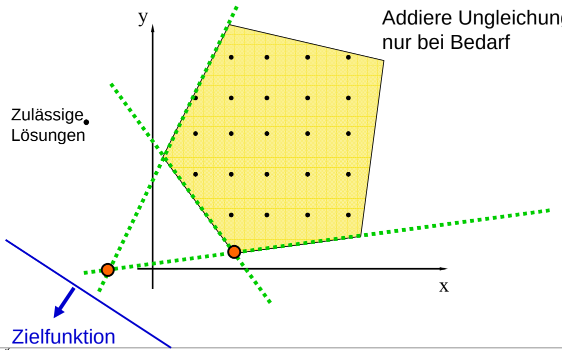
im Jahr 1995

For l=60 ist LOP exakt lösbar innerhalb 1 Sekunde mittels Branch-and-Cut / Schnittebenenverfahren.

Exakte Verfahren für Ganzzahlige OP

Schnittebenenverfahren

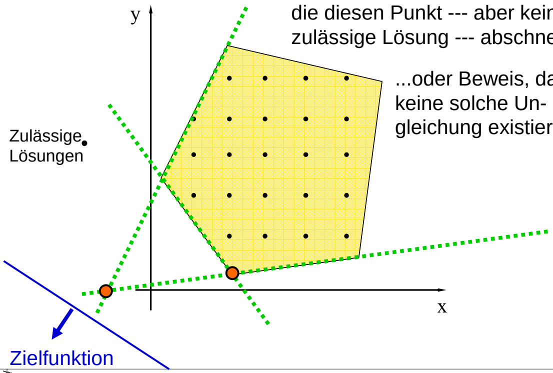
Addiere Ungleichungen nur bei Bedarf



Separationsproblem

Gegeben ist ein Punkt x und OP.
Gesucht ist eine Ungleichung, die diesen Punkt --- aber keine zulässige Lösung --- abschneidet.

...oder Beweis, dass keine solche Ungleichung existiert.



Idee von Schnittebenenverfahren

(1) Starte mit einer Teilmenge der Restriktionen

(2) Löse LP, sei x* die gefundene Optimallösung

(3) Entscheide, ob es weggelassene Restriktionen $a^Tx<=b_0$ gibt, so dass $a^Tx>b_0$?

(3.1) Falls NEIN: STOP (Relaxierung gelöst)

(3.2) Falls JA: Bestimme solche, füge sie zu IP hinzu und gehe zu (1)

Separationsproblem

Satz von Grötschel, Lovasz, Schrijver

Das Optimierungsproblem ist in polynomieller Zeit lösbar genau dann wenn das zugehörige Separationsproblem in polynomieller Zeit lösbar ist.

Frage: Können wir das Separationsproblem für LOP lösen?

JA, durch Aufzählen und Ausprobieren aller Ungleichungen

Beispiel: Acyclic Subgraph

Problem: Finde größten azyklischen Untergraphen in gewichtetem Digraphen D=(V,A)

$$\max \sum_{uv\in A} c_{uv}x_{uv}$$
$$\sum_{uv\in C} x_{uv} \le |C|-1 \quad \forall \text{ Kreise } C$$
$$x_{uv} \in \{0,1\}$$

Problem: exponentiell viele Ungleichungen

Lösung: durch Separierung

Satz von Grötschel, Lovasz, Schrijver

Das Optimierungsproblem ist in polynomieller Zeit lösbar genau dann wenn das zugehörige Separationsproblem in polynomieller Zeit lösbar ist.

Frage: Können wir das Separationsproblem für LOP lösen?

JA, durch Aufzählen und Ausprobieren aller Ungleichungen

Frage: Können wir das Separationsproblem für das Acylic Subgraph Problem lösen?

JA, durch Kürzestes Wegeproblem

Beispiel: Acyclic Subgraph

$$\max \sum_{uv\in A} c_{uv}x_{uv}$$
$$\sum_{uv\in C} x_{uv} \le |C|-1 \quad \forall \text{ Kreise } C$$
$$x_{uv} \in \{0,1\}$$

$$\sum_{e\in C} x_e \le |C|-1 \Leftrightarrow \sum_{e\in C}(1-x_e) \ge 1$$

- **Für alle** Kanten $f \in A$ tue:
  - Fixiere diese Kante $f = (u,v)$
  - Berechne kürzesten Weg in D mit Gewichten $1-x_e$
  - **Falls** Weglänge $W+x_{uv}<1$, dann: verletzte Ungleichung gefunden, die nun zum System hinzugenommen wird
  - **Sonst**: Beweis, dass keine verletzte Ungleichung, die f enthält, existiert.

Idee von Schnittebenenverfahren

(1) Starte mit einer Teilmenge der Restriktionen

(2) Löse LP, sei x* die gefundene Optimallösung

(3) Entscheide, ob es weggelassene Restriktionen $a^Tx<=b_0$ gibt, so dass $a^Tx>b_0$? Separationsproblem

(3.1) Falls NEIN: STOP (Relaxierung gelöst)

(3.2) Falls JA: Bestimme solche, füge sie zu IP hinzu und gehe zu (1)

Was tun, wenn die Lösung der LP-Relaxierung nicht ganzzahlig ist?

Branch-and-Cut Verfahren

Verbindung von Schnittebenenverfahren mit Branch-and-Bound

Versuche, jeweils die Teilprobleme (LP-Relaxierungen) mittels Schnittebenenverfahren zu lösen

Falls die Lösung nicht ganzzahlig ist, dann wähle nicht-ganzzahlige Variable und generiere zwei neue Teilprobleme:

P1 mit zusätzlichen Restriktionen $x_e=0$
P2 mit zusätzlichen Restriktionen $x_e=1$

Branch-and-Bound

Betrachte das folgende ILP:

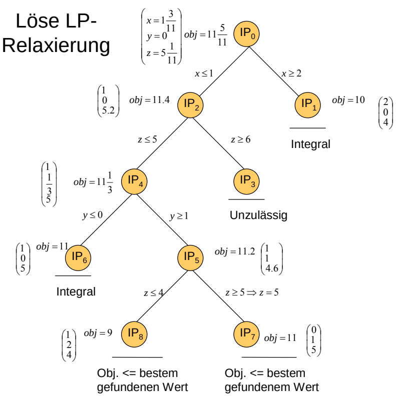
(IP$_0$)

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & x + y + 2z \\ \text{Subject to} \quad & 7x + 2y + 3z \le 36 \\ & 5x + 4y + 7z \le 42 \\ & 2x + 3y + 5z \le 28 \\ & x, y, z \ge 0, \text{~~ganzzahlig~~} \end{aligned}$$

LP-Relaxierung

Branch & Bound für ILPs: Beispiel

Löse LP-Relaxierung



Max x+y+2z

Bester IP-Wert $\cancel{-\infty}$ $\cancel{10}$ 11

Beste IP-Lösung $\cancel{\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}}$ $\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}$

Branch-and-Cut in der Praxis

Branch-and-Cut Verfahren lösen ILP-Probleme exakt.

Problem: Theoretisch ist die Laufzeit exponentiell.

Praxis zeigt aber, dass viele (kombinatorische) Optimierungsprobleme doch oft in moderater Rechenzeit beweisbar optimal gelöst werden.

Bsp. TSP: opt. Lösung für ca. 150 Städte: wenige Minuten
Rekord liegt bei 24978 Städten: ca. 85 CPU years

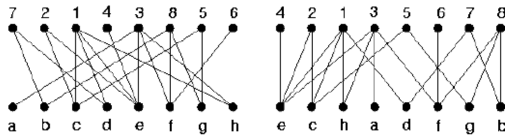
Linear Ordering Problem (LOP)

- Grötschel, Jünger, Reinelt 1984
  - Studierten das LOP
  - Praktische Umsetzung in Branch&Cut Code auf IBM 370/168 VM/CMS PL/I MPSX
- Reimplementierung 1995
  - SUN SPARC UNIX C CPLEX

For l=60 ist LOP exakt lösbar innerhalb 1 Sekunde mittels Branch-and-Cut, die meisten Instanzen sogar ohne zu branchen. im Jahr 1995

Kreuzungminimierung: fix vs. frei

Kreuzungsminimale Lösungen



untere Schicht fix

beide Schichten frei permutierbar

deutlich weniger Kreuzungen

Exakte 2-Schichten Kreuzungsminimierung (frei)

- **Branch&Bound in Kombination mit Branch&Cut**
  - Enummeriere über alle möglichen Permutationen der oberen Schicht und löse das 2-Schichten Kreuzungs-minimierungsproblem fix mittels Branch-and-Cut.
  - Experimentelle Resultate zeigen, dass dies bis zu ca. 15 Knoten auf der kleineren (oberen) Schicht praktikabel ist. Danach werden die Laufzeiten zu hoch.

- **Direkter Branch&Cut**
  - Formuliere dieses Problem als ILP
  - Löse es mittels Branch-and-Cut

s. 4. Übung: Healy und Kuusik: bis zu 8 Schichten, 120 Kanten

Exakte 2-Schichten Kreuzungsminimierung (frei)

- **Formulierung als quadratisches Optimierungsproblem**
  - Lösung mittels Branch-and-Cut, oder
  - Lösung mittels Semidefiniter Programmierung

s. 4. Übung, Buchheim et al.

- **Literatur für Interessierte:**
  - P. Healy und A. Kuusik: The vertex-exchange graph and ist use in multi-level graph layout, GD99, LNCS 1731, Springer, 1999, 205-216
  - C. Buchheim, A. Wiegele, L. Zheng: Exact algorithms for the quadratic linear ordering problem, manuscript Universität zu Köln 2007

ENDE 3.4 Kreuzungsminimierung