Universität Dortmund

Wintersemester 2007/08

Praktische Optimierung

(Vorlesung)

Kapitel 2: Grundlagen

Prof. Dr. Günter Rudolph

Fachbereich Informatik

Lehrstuhl für Algorithm Engineering

Definition 2.1

Seien f, g_i, h_j: S → ℝ mit S ⊆ $\mathbb{R}^n$ für i = 1, …, I und j = 1, …, J. Die Aufgabe

„Finde x* ∈ S mit f(x*) = min { f(x) : x ∈ S }"

wird ***globales Optimierungsproblem*** genannt.

Dann heißt f(x) die ***Zielfunktion*** und S der ***zulässige Bereich***.

Jedes x ∈ S wird ***zulässige Lösung*** genannt.

Ist der zulässige Bereich durch Ungleichungen und / oder Gleichungen der Form

$$g_i(x) \le 0 \quad \text{bzw.} \quad h_j(x) = 0 \qquad (*)$$

beschrieben, so heißen (*) **Nebenbedingungen** oder **Restriktionen**. ■

Bemerkung:

Da min { f(x) : x ∈ S } = – max { – f(x) : x ∈ S } ist es ausreichend,

sich im Folgenden auf Minimierungsprobleme zu beschränken.

Definition 2.2

Sei f: S → ℝ mit S ⊆ $\mathbb{R}^n$.

(a) x* heißt ***globale Minimalstelle*** von f(·) falls ∀x ∈ S: f(x*) ≤ f(x).
Der Wert f(x*) wird dann ***globales Minimum*** genannt.

(b) x* heißt ***lokale Minimalstelle*** von f(·) falls ∃ε > 0: ∀x ∈ U_ε(x*) ∩ S: f(x*) ≤ f(x).
Der Wert f(x*) wird dann ***lokales Minimum*** genannt. ■

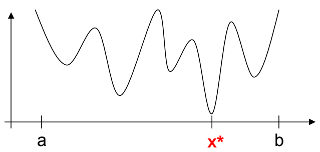
Bemerkung:

Offensichtlich ist jede globale Minimalstelle auch eine lokale Minimalstelle.

Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch!

Beispiel:

f: [a,b] → ℝ, globale Minimalstelle bei x*

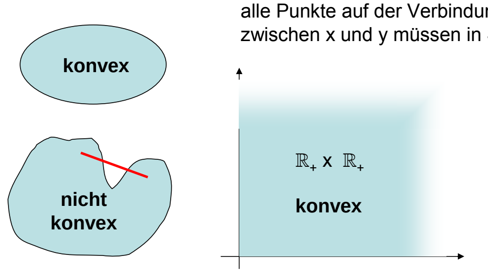


Definition 2.3

Menge S ⊆ $\mathbb{R}^n$ heißt ***konvexe Menge*** ⇔

∀ x, y ∈ S: ∀ ξ ∈ (0,1): ξ x + (1 - ξ) y ∈ S ■

anschaulich:
alle Punkte auf der Verbindungslinie
zwischen x und y müssen in S liegen!



$\mathbb{R}^n$ ist konvex!

Durchschnitt
konvexer Mengen
ist konvex!

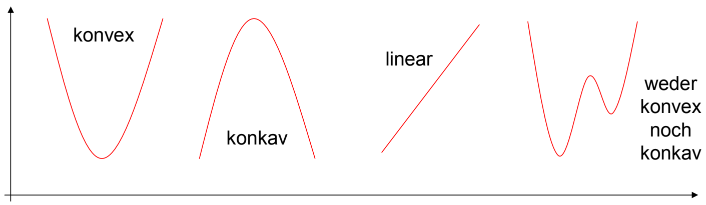
Definition 2.4

Seien $x_1, x_2 \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\xi \in [0,1]$. Die Funktion f: $S \to \mathbb{R}$ heißt

(a) ***konvex***, falls $f(\xi x_1 + (1 - \xi) x_2) \le \xi f(x_1) + (1 - \xi) f(x_2)$,

(b) ***konkav***, falls –f konvex ist,

(c) ***linear*** oder ***affin***, wenn f sowohl konvex als auch konkav. ■



Definition 2.5

Seien $x_1, x_2 \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\xi \in [0,1]$. Die Funktion f: $S \to \mathbb{R}$ heißt

(a) ***quasikonvex***, falls $f(\xi x_1 + (1 - \xi) x_2) \le \max\{ f(x_1), f(x_2) \}$,

(b) ***streng quasikonvex*** oder ***unimodal***, falls oben Gleichheit ausgeschlossen. ■

Satz 2.1

f streng konvex ⇒ f unimodal

Beweis:

$$f(\xi x_1 + (1-\xi) x_2) < \xi f(x_1) + (1-\xi) f(x_2)$$
$$\le \max\{ \xi f(x_1) + (1-\xi) f(x_2) : \xi \in [0,1] \}$$
$$\le \max\{ f(x_1), f(x_2) \}$$ ■

Satz 2.2

Sei f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unimodal. Jedes lokale Optimum ist auch globales Optimum.

Beweis: (durch Widerspruch)

Sei x^* lokale Optimalstelle von f(·).

Annahme: Es existiert globale Optimalstelle y^* mit $f(y^*) < f(x^*)$.

Wegen Unimodalität von f(·):

$f(x) < \max\{ f(x^*), f(y^*) \} = f(x^*)$ für alle $x \in \{ \xi x^* + (1 - \xi) y^* : \xi \in [0,1] \}$.

Also existieren $x \in \{ \xi x^* + (1 - \xi) y^* : \xi \in [0,1] \} \cap U_\varepsilon(x^*) \neq \emptyset$ mit $f(x) < f(x^*)$.

Widerspruch zur lokalen Optimalität von x^*. ■

Satz 2.3

Sei f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x'Ax$, wobei Matrix A symmetrisch und positiv definit. Dann ist f(x) konvex.

Beweis:

$$f(\xi x_1 + (1-\xi) x_2) = f(\xi(x_1 - x_2) + x_2)$$
$$= [\xi(x_1 - x_2) + x_2]' A [\xi(x_1 - x_2) + x_2] \quad , \xi \in [0,1].$$

ausmultiplizieren ergibt:

$$= \underbrace{\xi^2}_{\le \xi \,\in\, [0,1]} \underbrace{(x_1 - x_2)' A (x_1 - x_2)}_{\ge 0,\text{ da A pos. def.}} + \xi (x_1 - x_2)' A x_2 + \xi x_2' A (x_1 - x_2) + x_2' A x_2$$

$$\le \xi (x_1 - x_2)' A (x_1 - x_2) + \xi (x_1 - x_2)' A x_2 + \xi x_2' A (x_1 - x_2) + x_2' A x_2$$

ausmultiplizieren und umordnen ergibt:

$$= \xi (x_1' A x_1 - x_2' A x_2) + x_2' A x_2 = \xi x_1' A x_1 + (1-\xi) x_2' A x_2$$
$$= \xi f(x_1) + (1-\xi) f(x_2)$$ ■