

Wintersemester 2007/08

Praktische Optimierung
(Vorlesung)

Kapitel 2: Grundlagen

Prof. Dr. Günter Rudolph

Fachbereich Informatik

Lehrstuhl für Algorithm Engineering





Kapitel 2: Grundlagen

Definition 2.1

Seien $f, g_i, h_j: S \rightarrow \mathbb{R}$ mit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ für $i = 1, \dots, I$ und $j = 1, \dots, J$. Die Aufgabe

„Finde $x^* \in S$ mit $f(x^*) = \min \{ f(x) : x \in S \}$ “

wird **globales Optimierungsproblem** genannt.

Dann heißt $f(x)$ die **Zielfunktion** und S der **zulässige Bereich**.

Jedes $x \in S$ wird **zulässige Lösung** genannt.

Ist der zulässige Bereich durch Ungleichungen und / oder Gleichungen der Form

$$g_i(x) \leq 0 \quad \text{bzw.} \quad h_j(x) = 0 \quad (*)$$

beschrieben, so heißen (*) **Nebenbedingungen** oder **Restriktionen**. ■

Bemerkung:

Da $\min \{ f(x) : x \in S \} = - \max \{ -f(x) : x \in S \}$ ist es ausreichend,

sich im Folgenden auf Minimierungsprobleme zu beschränken.



Kapitel 2: Grundlagen

Definition 2.2

Sei $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ mit $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

(a) x^* heißt **globale Minimalstelle** von $f(\cdot)$ falls $\forall x \in S: f(x^*) \leq f(x)$.

Der Wert $f(x^*)$ wird dann **globales Minimum** genannt.

(b) x^* heißt **lokale Minimalstelle** von $f(\cdot)$ falls $\exists \varepsilon > 0: \forall x \in U_\varepsilon(x^*) \cap S: f(x^*) \leq f(x)$.

Der Wert $f(x^*)$ wird dann **lokales Minimum** genannt. ■

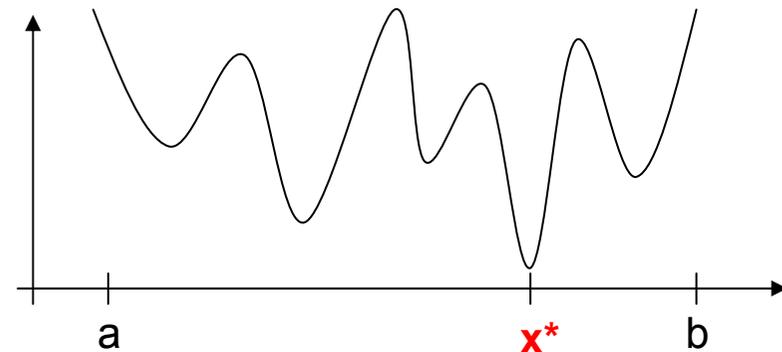
Bemerkung:

Offensichtlich ist jede globale Minimalstelle auch eine lokale Minimalstelle.

Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch!

Beispiel:

$f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, globale Minimalstelle bei x^*





Kapitel 2: Grundlagen

Definition 2.3

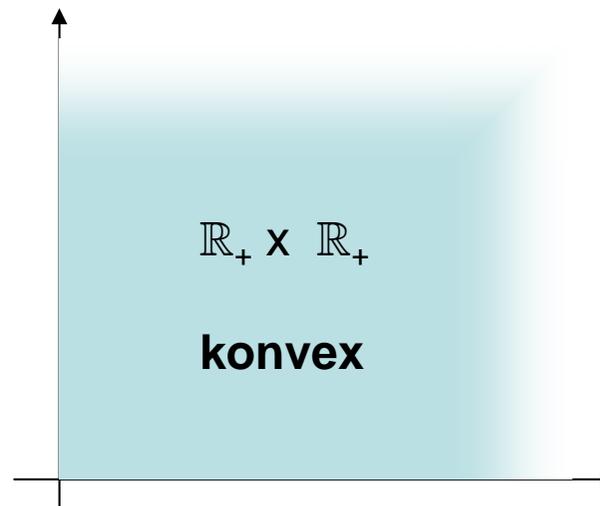
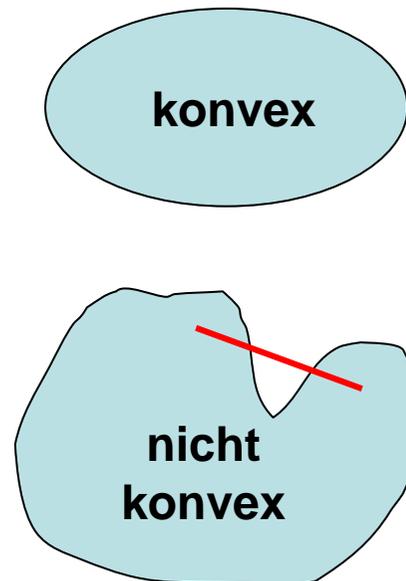
Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvexe Menge** \Leftrightarrow

$$\forall x, y \in S: \forall \xi \in (0,1): \xi x + (1 - \xi) y \in S$$



anschaulich:

alle Punkte auf der Verbindungslinie
zwischen x und y müssen in S liegen!



\mathbb{R}^n ist konvex!

Durchschnitt
konvexer Mengen
ist konvex!



Kapitel 2: Grundlagen

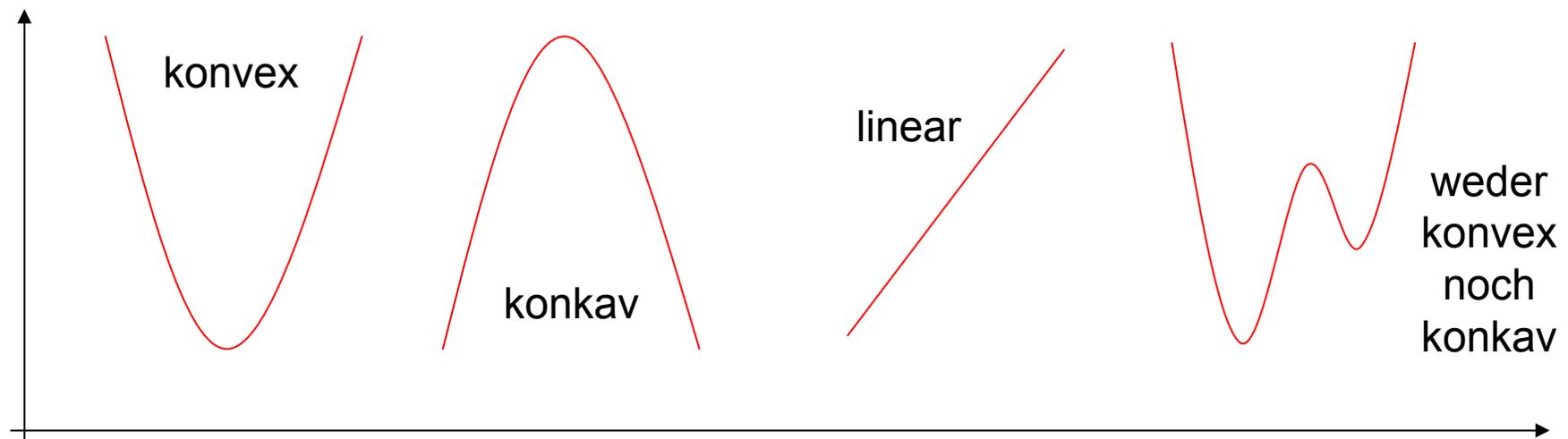
Definition 2.4

Seien $x_1, x_2 \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\xi \in [0, 1]$. Die Funktion $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

(a) **konvex**, falls $f(\xi x_1 + (1 - \xi) x_2) \leq \xi f(x_1) + (1 - \xi) f(x_2)$,

(b) **konkav**, falls $-f$ konvex ist,

(c) **linear** oder **affin**, wenn f sowohl konvex als auch konkav. ■





Kapitel 2: Grundlagen

Definition 2.5

Seien $x_1, x_2 \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\xi \in [0, 1]$. Die Funktion $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

(a) **quasikonvex**, falls $f(\xi x_1 + (1 - \xi) x_2) \leq \max \{ f(x_1), f(x_2) \}$,

(b) **streng quasikonvex** oder **unimodal**, falls oben Gleichheit ausgeschlossen. ■

Satz 2.1

f streng konvex $\Rightarrow f$ unimodal

Beweis:

$$\begin{aligned} f(\xi x_1 + (1 - \xi) x_2) &< \xi f(x_1) + (1 - \xi) f(x_2) \\ &\leq \max \{ \xi f(x_1) + (1 - \xi) f(x_2) : \xi \in [0, 1] \} \\ &\leq \max \{ f(x_1), f(x_2) \} \end{aligned}$$

■



Kapitel 2: Grundlagen

Satz 2.2

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ unimodal. Jedes lokale Optimum ist auch globales Optimum.

Beweis: (durch Widerspruch)

Sei x^* lokale Optimalstelle von $f(\cdot)$.

Annahme: Es existiert globale Optimalstelle y^* mit $f(y^*) < f(x^*)$.

Wegen Unimodalität von $f(\cdot)$:

$$f(x) < \max \{ f(x^*), f(y^*) \} = f(x^*) \quad \text{für alle } x \in \{ \xi x^* + (1 - \xi) y^* : \xi \in [0,1] \}.$$

Also existieren $x \in \{ \xi x^* + (1 - \xi) y^* : \xi \in [0,1] \} \cap U_\varepsilon(x^*) \neq \emptyset$ mit $f(x) < f(x^*)$.

Widerspruch zur lokalen Optimalität von x^* . ■



Kapitel 2: Grundlagen

Satz 2.3

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x'Ax$, wobei Matrix A symmetrisch und positiv definit. Dann ist $f(x)$ konvex.

Beweis:

$$\begin{aligned} f(\xi x_1 + (1 - \xi) x_2) &= f(\xi(x_1 - x_2) + x_2) \\ &= [\xi(x_1 - x_2) + x_2]' A [\xi(x_1 - x_2) + x_2] \quad , \xi \in [0,1]. \end{aligned}$$

ausmultiplizieren ergibt:

$$\begin{aligned} &= \xi^2(x_1 - x_2)' A(x_1 - x_2) + \xi(x_1 - x_2)' Ax_2 + \xi x_2' A(x_1 - x_2) + x_2' Ax_2 \\ &\quad \downarrow \underbrace{\hspace{10em}}_{\geq 0, \text{ da } A \text{ pos. def.}} \\ &\leq \xi \in [0,1] \end{aligned}$$

$$\leq \xi(x_1 - x_2)' A(x_1 - x_2) + \xi(x_1 - x_2)' Ax_2 + \xi x_2' A(x_1 - x_2) + x_2' Ax_2$$

ausmultiplizieren und umordnen ergibt:

$$\begin{aligned} &= \xi(x_1' Ax_1 - x_2' Ax_2) + x_2' Ax_2 = \xi x_1' Ax_1 + (1 - \xi) x_2' Ax_2 \\ &= \xi f(x_1) + (1 - \xi) f(x_2) \quad \blacksquare \end{aligned}$$