

Praktische Optimierung

Günter Rudolph
Fakultät für Informatik, Lehrstuhl XI
Fachgebiet *Computational Intelligence*

23-JAN-2008

Interaktive Verfahren: Einordnung

- *A-priori*-Verfahren

Entscheidungsträger (ET) bestimmt Ausgleich (trade-off) zwischen Zielen **vor** der Optimierung (→ Skalarisierung)

- *A-posteriori*-Verfahren

Bestimmung „aller“ Pareto-optimaler Lösungen, ET wählt (irgendwie) aus der Menge eine Lösung aus → ET bestimmt trade-off **nach** der Optimierung

- Interaktive Verfahren

ET bestimmt trade-off **während** der Optimierung

Interaktive Verfahren: Vorteile

- Spezifikation der Präferenzen *vor* Optimierung unnötig
- ET lernt bzgl. Verhalten des Systems/Designs
- nur lokale Präferenzinformation nötig
- ET ist Teil des Lösungsprozesses
→ bessere Realisierungschance
- weniger restriktive Annahmen

Interaktive Verfahren: Nachteile

- Lösungen abhängig von Genauigkeit, mit der ET Präferenz artikuliert
- oft Zyklen möglich → Konvergenz?
- hoher Aufwand beim ET
- schnelle Systemantwortzeiten nötig, sonst Ermüdung ET

Interaktive Verfahren: Geoffrion et al. (1972)

Annahme: \exists implizite Nutzenfunktion $U : R^m \rightarrow R$

Nutzenfunktion \exists im Hirn, Bauch, Gefühl, ...
des Entscheidungsträgers (ET)

Ersatzproblem:

$$\min\{U(f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) : x \in \mathcal{X}\}$$

f_i und \mathcal{X} explizit bekannt

wäre $U(\cdot)$ explizit bekannt \Rightarrow *A-priori*-Skalarisierung

Interaktive Verfahren: Geoffrion et al. (1972)

Ansatz: Wie würde man Ersatzproblem lösen, wenn $U(\cdot)$ explizit bekannt?

→ z.B. Frank-Wolfe Algorithmus (1956)

(\mathcal{X} kompakt + konvex, $U(\cdot)$ konvex + diff'bar, f_i konvex)

1. Wähle Startpunkt $x^{(0)} \in \mathcal{X}$, setze $t = 0$
2. Finde Abstiegsrichtung y^* via $\min_{y \in \mathcal{X}} \{\nabla U(f(x^{(t)}))^T y\}$
3. Setze $h = x^{(t)} + y^*$
4. Finde optimale Schrittweite s^* via $\min_{s \in [0,1]} \{U(f(x^{(t)} + s h))\}$
5. Setze $x^{(t+1)} = x^{(t)} + s^* h$ und $t = t + 1$; goto 2

Interaktive Verfahren: Geoffrion et al. (1972)

$U(\cdot)$ implizit \rightarrow ersetze Schritt 2 (Abstiegsrichtung):

$$\begin{aligned}\nabla_x U(f(x)) &= \nabla_x U(f_1(x), \dots, f_m(x)) \\ &= \left[\frac{\partial U(f_1(x))}{\partial f_1(x)}, \dots, \frac{\partial U(f_1(x))}{\partial f_1(x)} \right] \cdot J_f(x)^T \\ &= \left[\frac{\partial U(f_1(x))}{\partial f_1(x)}, \dots, \frac{\partial U(f_1(x))}{\partial f_1(x)} \right] \cdot (\nabla_x f_1(x), \dots, \nabla_x f_m(x)) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial U(f_i(x))}{\partial f_i(x)} \cdot \nabla_x f_i(x)\end{aligned}$$

Interaktive Verfahren: Geoffrion et al. (1972)

also:

$$\min_{y \in \mathcal{X}} \{ \nabla U(f(x^{(t)}))^T y \} = \min_{y \in \mathcal{X}} \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{\partial U(f_i(x^{(t)}))}{\partial f_i(x)} \cdot \nabla_x f_i(x^{(t)})^T y \right\}$$

Problem: partielle Ableitung von $U(\cdot)$

- wähle ein Referenzziel $\in \{1, \dots, m\}$ aus; hier: k
- dividiere mit $\frac{\partial U(f_k(x^{(t)}))}{\partial f_k(x)}$

→ ändert nichts an optimaler Lösung y^*

$$\min_{y \in \mathcal{X}} \left\{ \sum_{i=1}^m w_i \cdot \nabla_x f_i(x^{(t)})^T y \right\} \quad \text{mit } w_i := \frac{\partial U(f_i(x^{(t)}))}{\partial f_i(x)} \cdot \frac{\partial f_k(x)}{\partial U(f_k(x^{(t)}))}$$

Interaktive Verfahren: Geoffrion et al. (1972)

→ Entscheidungsträger muß Gewichte w_i spezifizieren!

- Interpretation w_i :

Nutzenausgleich zwischen Ziel i und Ziel k :

„ Δf_i weniger ist mir Δf_k mehr wert“

(Grenzrate der Substitution)

- Prozedur:

ET gibt $(m - 1)$ Grenzwerten/Gewichte an: $w_i = -\frac{\Delta f_k}{\Delta f_i}$
danach Optimieralgorithmus → Abstiegsrichtung y^*

Interaktive Verfahren: Geoffrion et al. (1972)

$U(\cdot)$ implizit \rightarrow ersetze Schritt 4 (Schrittweite):

$$\min_{s \in [0,1]} \{U(f(x^{(t)} + s h))\}$$

\Downarrow

| | s | 0 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | \dots | $\frac{9}{10}$ | 1 | |
|---------|----------|---|----------------|----------------|---------|----------------|---|--------------|
| Tabelle | f_1 | | | | | | | oder Graphik |
| | \vdots | | | | | | | |
| | f_m | | | | | | | |

ET wählt am meisten bevorzugte Zielwertkombination $\rightarrow s^*$

Interaktive Verfahren: Geoffrion et al. (1972)

Beispiel:

$$f(x) = \begin{pmatrix} (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

zulässiger Bereich: $-8 \leq x_1 \leq 10, -8 \leq x_2 \leq 6$

Jacobi-Matrix:

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 8 & 2x_2 - 8 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}$$

Interaktive Verfahren: Geoffrion et al. (1972)

$$x^{(0)} = (2, 6)^T \text{ mit } f(x^{(0)}) = (8, 40)^T$$

ET spezifiziert Austauschraten:

$$w_1 = 1, w_2 = -\frac{\Delta f_2}{\Delta f_1} = -\frac{-3}{1} = 3$$

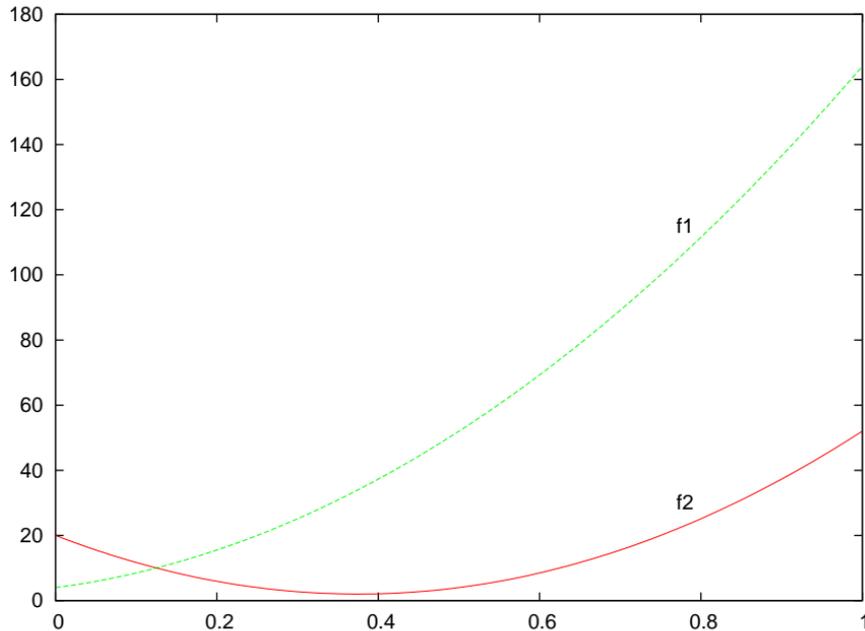
Maschine löst:

$$\left[w_1(2x_1^{(0)} - 8) + w_2 \cdot 2x_1^{(0)} \right] y_1 + \left[w_1(2x_2^{(0)} - 8) + w_2 \cdot 2x_2^{(0)} \right] y_2 =$$
$$8y_1 + 40y_2 \rightarrow \min! \quad \text{Lösung: } y^* = (-8, -8)^T$$

ET wählt Schrittweite s^* mit grafischer Unterstützung:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + s y^* = (2 - 8s, 4 - 8s)^T$$

Interaktive Verfahren: Geoffrion et al. (1972)



ET wählt $s^* = \frac{1}{4}$

Interaktive Verfahren: Geoffrion et al. (1972)

$$x^{(1)} = (0, 2)^T \text{ mit } f(x^{(1)}) = (20, 4)^T$$

ET spezifiziert Austauschraten:

$$w_1 = 1, w_2 = -\frac{\Delta f_2}{\Delta f_1} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

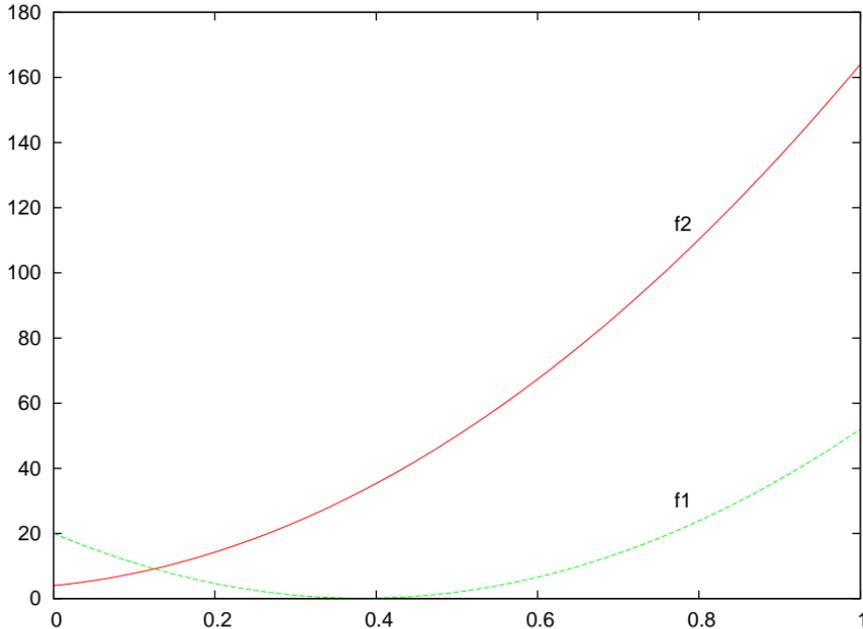
Maschine löst:

$$\left[w_1(2x_1^{(1)} - 8) + w_2 \cdot 2x_1^{(1)} \right] y_1 + \left[w_1(2x_2^{(1)} - 8) + w_2 \cdot 2x_2^{(1)} \right] y_2 = -8y_1 - 2y_2 \rightarrow \min! \quad \text{Lösung: } y^* = (10, 6)^T$$

ET wählt Schrittweite s^* mit grafischer Unterstützung:

$$x^{(2)} = x^{(1)} + s y^* = (0 + 10s, 2 + 6s)^T$$

Interaktive Verfahren: Geoffrion et al. (1972)



ET wählt $s^* = \frac{1}{10}$

Interaktive Verfahren: Geoffrion et al. (1972)

$$x^{(2)} = (1, 2.6)^T \text{ mit } f(x^{(2)}) = (10.96, 7.76)^T$$

und so weiter bis $\exists k : \|f(x^{(k)}) - (x^{(k-1)})\|_\infty \leq \varepsilon$

