



Sommersemester 2006

Mehrkriterielle Optimierung mit Metaheuristiken
(Vorlesung)

Prof. Dr. Günter Rudolph

Fachbereich Informatik

Lehrstuhl für Algorithm Engineering (LS XI)

Fachgebiet *Computational Intelligence*





1. Ansatz: Gewichtete Summe

$$\min_{x \in X} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \Rightarrow \min_{x \in X} \sum_{i=1}^m w_i f_i(x)$$

wobei

$$w_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^m w_i = 1 \text{ (Konvexkombination)}$$

Idee: Vektorielles Problem umwandeln in skalares Problem



Skalares Ersatzproblem (m = 2)

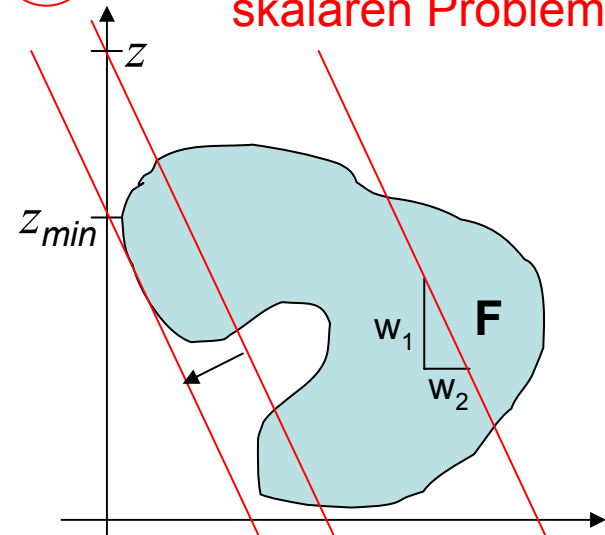
$$z = w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) = w_1 y_1 + w_2 y_2 \rightarrow \min$$

Umformen ergibt Geradengleichung:

$$y_2 = -\frac{w_1}{w_2} y_1 + z$$

wird minimiert bei Optimierung des skalaren Problems

- finde Gerade mit minimalem z , so dass F gerade noch berührt wird
- Tangentialpunkte mit F





Definition 4.1:

Sei

$$F^*(w) := \{z^* \in F : \sum_{i=1}^m w_i z_i^* = \inf_{z \in F} \sum_{i=1}^m w_i z_i\}$$

Menge aller Vektoren, die für gegebene Gewichte w_i die gewichtete Summe minimieren, wobei $w \in \text{int}(C_m)$.

$$S(F) := \bigcup_{w \in \text{int}(C_m)} F^*(w)$$





Satz 4.1: $S(F) \subseteq F^*$. ■

d.h. jeder durch Summenbildung mit positiven Gewichten gefundene Zielvektor ist effizient!

Beweis von Satz 4.1:

Wenn $z^* \in S(F)$, dann existiert $w \in \text{int}(C_m)$, so dass $\forall z \in F$:

$$\sum_{i=1}^m w_i z_i^* \leq \sum_{i=1}^m w_i z_i \quad (*)$$

Annahme: $z^* \notin F^*$. Dann existiert $z \in F$, das z^* dominiert: $z \prec z^*$ bzw.

$$\forall i : z_i^* \geq z_i \text{ und } \exists k : z_k^* > z_k \quad \text{bzw. (mal } w_i > 0)$$

$$\forall i : w_i z_i^* \geq w_i z_i \text{ und } \exists k : w_k z_k^* > w_k z_k$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m w_i z_i^* > \sum_{i=1}^m w_i z_i \quad \text{im Widerspruch zu } (*). \quad \blacksquare$$



2. Ansatz: Referenzpunktmethode

$$\min_{x \in X} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \Rightarrow \min_{x \in X} \left(\sum_{i=1}^m \|z_i^0 - f_i(x)\|^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

wobei z^0 **Referenzpunkt**.

→ Wie wählt man Referenzpunkt?

Definition 4.2:

Der Zielvektor z^0 mit $z_i^0 := \inf\{z_i : z \in F\}$

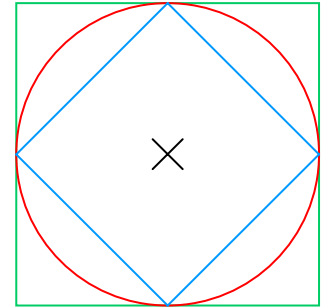
heißt **idealer Punkt**. ■

Anmerkung: Idealer Punkt bei konfliktären Zielen nicht erreichbar.



- $r = 1$

$$\min_{x \in X} \sum_{i=1}^m |z_i^0 - f_i(x)|$$



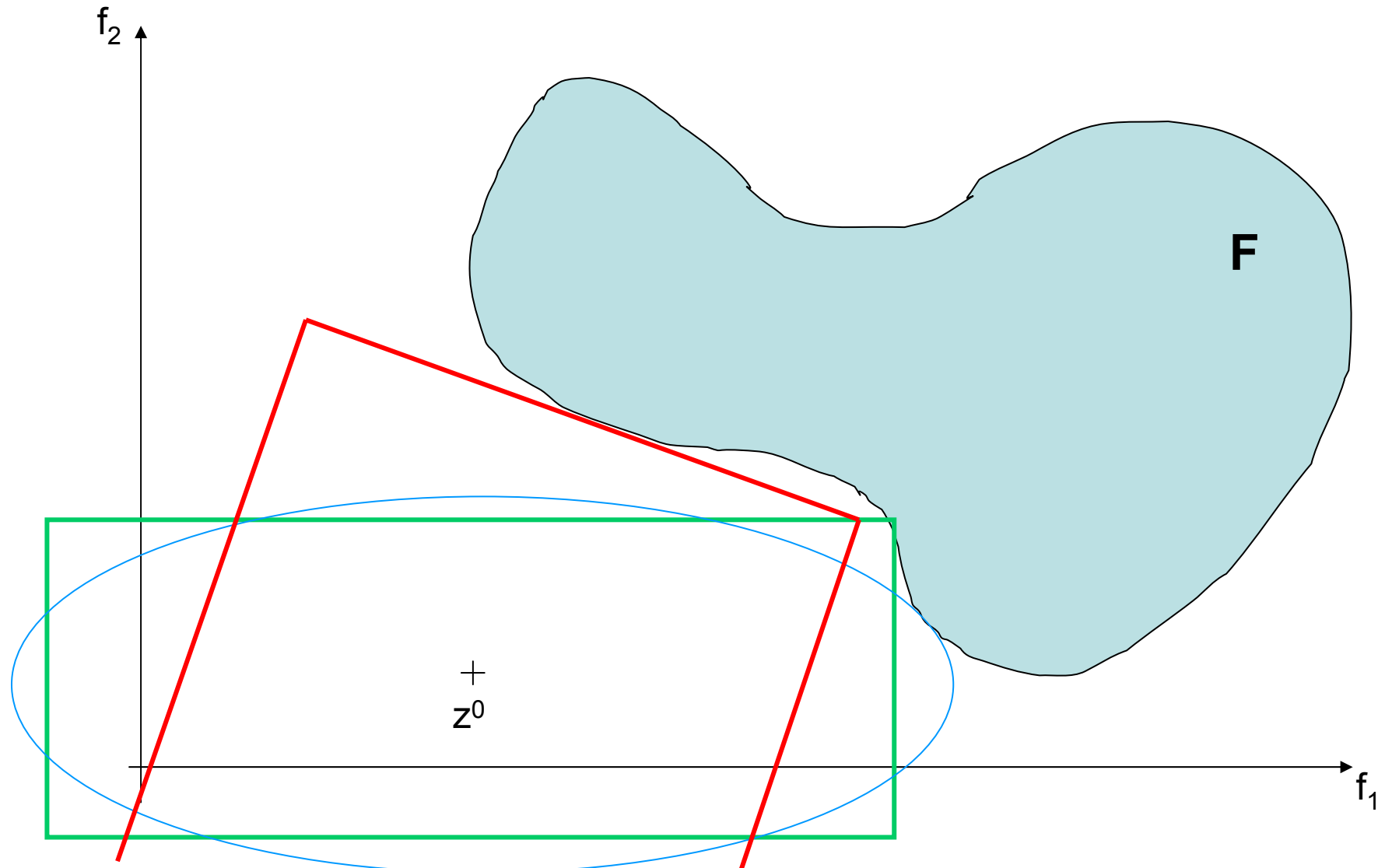
- $r = 2$

$$\min_{x \in X} \left(\sum_{i=1}^m (z_i^0 - f_i(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

- $r = \infty$

$$\min_{x \in X} \max_i \{z_i - f_i(x)\}$$

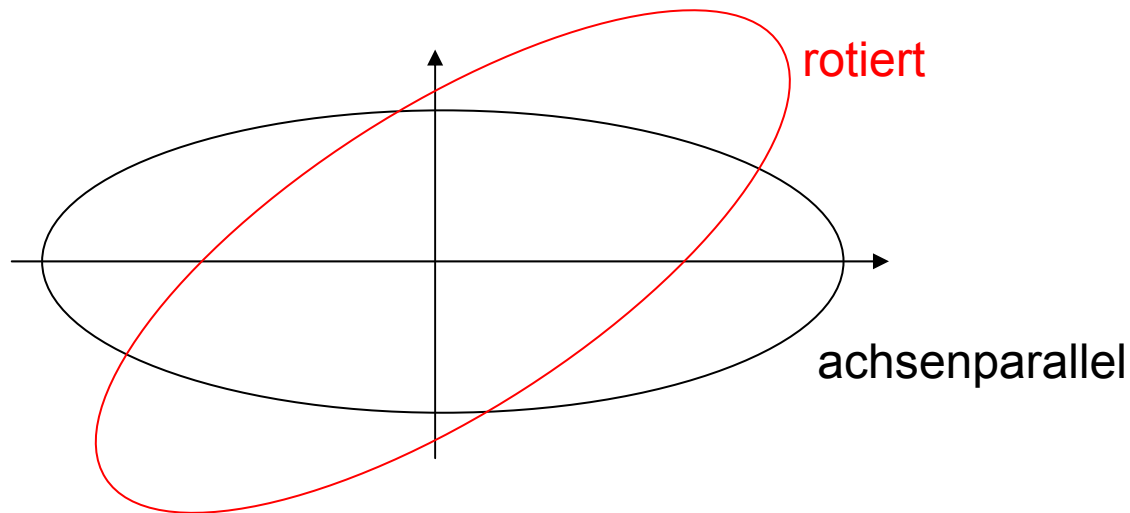
min-max-Methode
Tschebyscheff-Methode





Erweiterungen:

- weighted metric method → Abweichungsterme je Ziel gewichten
- rotated weighted method → zusätzlich rotieren





Satz 4.2:

Sei z^0 der ideale Punkt eines mehrkriteriellen Problems und $1 \leq r < \infty$.

Jede optimale Lösung des skalaren Ersatzproblems

$$\min_{x \in X} \left(\sum_{i=1}^m \|z_i^0 - f_i(x)\|^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

ist Pareto-optimal.

Beweis: (durch Widerspruch)

Ann.: Sei x^* optimale Lösung des Ersatzproblems, aber x^* nicht Pareto-optimal.

$\Rightarrow \exists x \in X: \forall i: f_i(x) \leq f_i(x^*)$ und $\exists k: f_k(x) < f_k(x^*)$.

$\Rightarrow \forall i: 0 \leq f_i(x) - z_i^0 \leq f_i(x^*) - z_i^0$ und $\exists k: 0 \leq f_k(x) - z_i^0 < f_k(x^*) - z_i^0$

$\Rightarrow \sum_i (f_i(x) - z_i^0)^r < \sum_i (f_i(x^*) - z_i^0)^r \Rightarrow x^*$ nicht opt. für Ersatzproblem! ⚡

WIDERSPRUCH zur Annahme. ■



3. Ansatz: Goal Attainment

$$\min_{x \in X} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \Rightarrow \min \{ \lambda : f_i(x) - w_i \lambda \leq z_i^0 \}$$

wobei w_i zu wählende Gewichte



Anmerkungen:

- bei systematischem Variieren der Gewichte alle Lösungen auf konvexem Zielbereich auffindbar
- kann nicht alle Lösungen im nicht-konvexen Bereich finden
- kann Lösungen finden, die nicht Pareto-optimal (\rightarrow ausfiltern, wenn möglich)



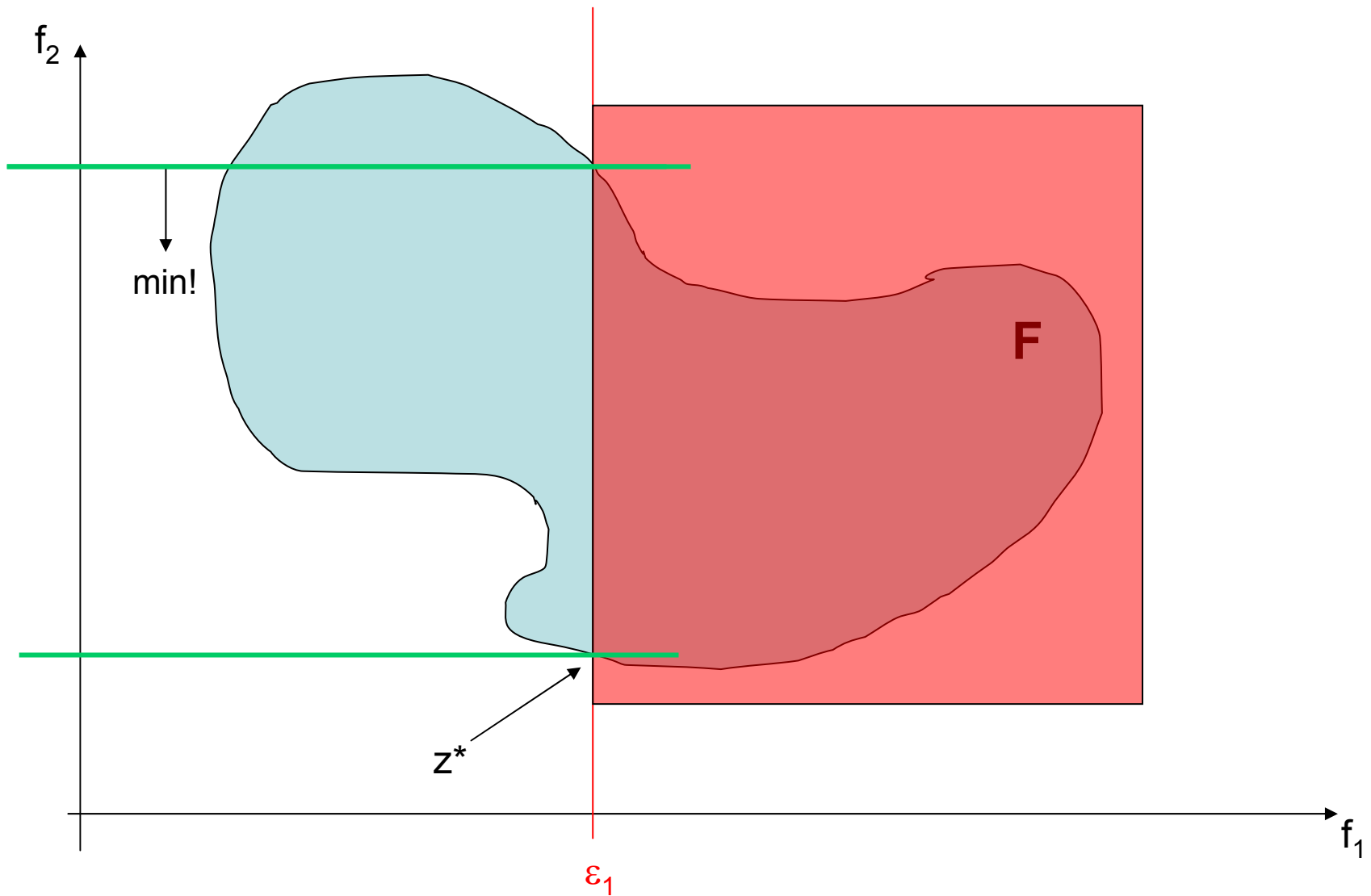
4. Ansatz: Kompromissmethode (ε – constraint method)

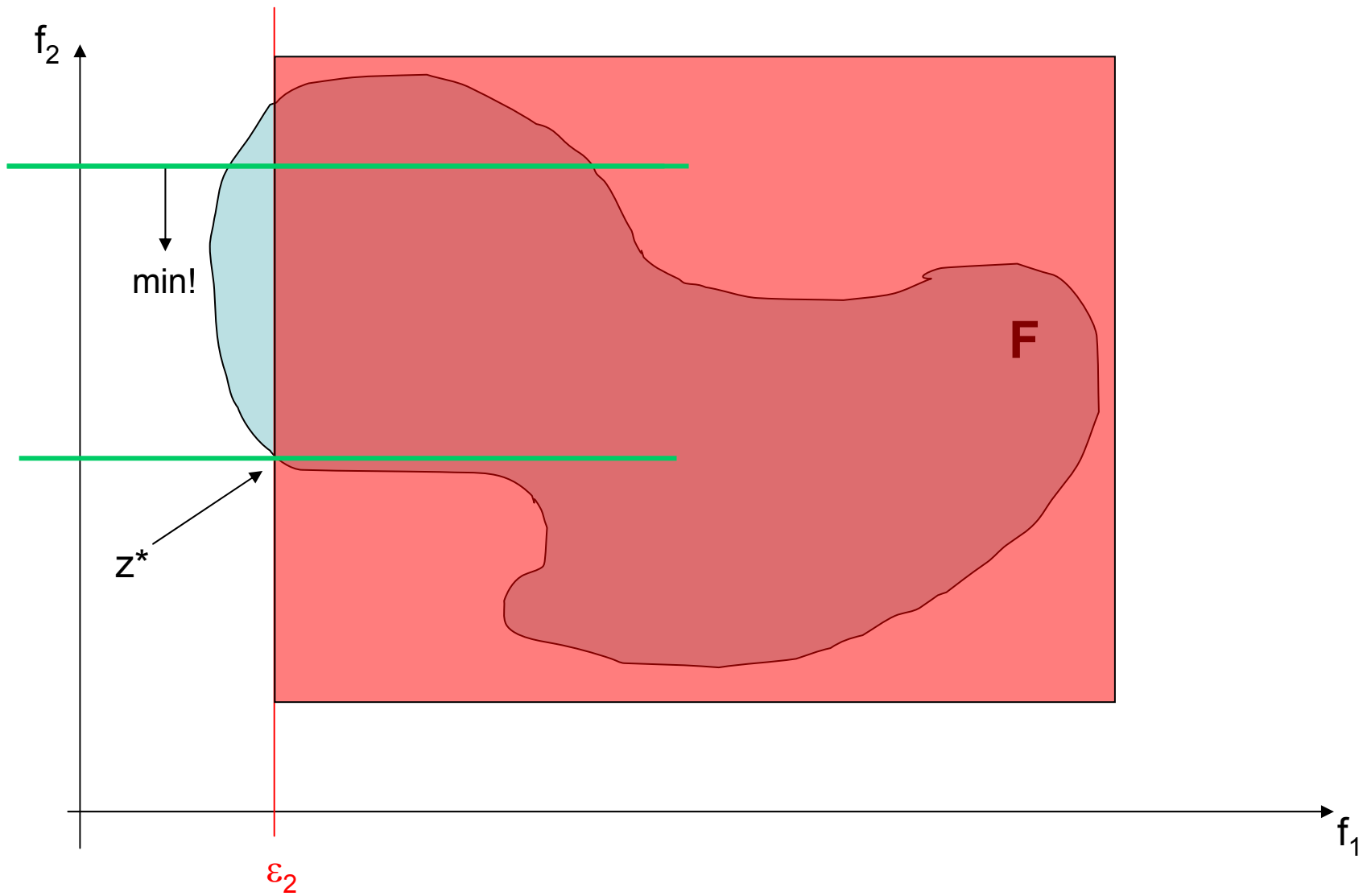
$$\min\{f_k(x) : x \in X\} \text{ unter } \forall i \neq k : f_i \leq \varepsilon_i$$

wobei ε_i erlaubter Höchstwert für Ziel i

Prozedur:

- systematisches Variieren der ε_i
- liefert Pareto-optimale Lösungen (auch für nicht kegelkonvexes F)







5. Ansatz: Lexikografische Methode

Idee:

m monokriterielle Probleme, zunehmend angereichert mit Nebenbedingungen

$$(1) f_1^* := \min_{x \in X} \{f_1(x)\}$$

$$(2) f_2^* := \min_{x \in X} \{f_2(x) : f_1(x) = f_1^*\}$$

$$(3) f_3^* := \min_{x \in X} \{f_3(x) : f_1(x) = f_1^* \wedge f_2(x) = f_2^*\}$$

⋮

$$(m) f_m^* := \min_{x \in X} \{f_m(x) : \forall i < m : f_i(x) = f_i^*\}$$

Lösung von (m)
=
multikriterielle
Lösung



Probleme:

1. Reihenfolge der Ziele muss vorgegeben werden
2. Häufig keine natürliche Priorisierung vorhanden
⇒ willkürliche Reihenfolge
3. Verschiedene Reihenfolgen
⇒ Verschiedene Lösungen!

Fazit:

Ohne natürliche Zielpriorisierung erhält man **beliebige** Lösung!



Zusammenfassung bzgl. Skalarisierungsmethoden

1. \exists Lösungen, die diesen Methoden verborgen bleiben
2. bei einmaliger Anwendung nur eine Lösung
zudem: a-priori-Auswahl von Gewichten, Schranken, etc. fragwürdig
3. bei mehrmaliger Anwendung mehrere Lösungen
falls Gewichte, Schranken, etc. systematisch variiert
und dominierte Lösungen ausgefiltert werden
4. stillschweigende Annahme: monokriterielle Optimierung „einfach“

aber: auch monokriterielle Optimierung ist schwierig!

→ multimodale Probleme, lokale Lösungen

→ welche Verfahren?