UNIVERSITÄT DORTMUND

Sommersemester 2006

Mehrkriterielle Optimierung mit Metaheuristiken

(Vorlesung)

Prof. Dr. Günter Rudolph
Fachbereich Informatik
Lehrstuhl für Algorithm Engineering (LS XI)
Fachgebiet *Computational Intelligence*

1. Ansatz: Gewichtete Summe

$$\min_{x \in X} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \min_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} w_i f_i(x)$$

wobei

$$w_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^{m} w_i = 1 \text{ (Konvexkombination)}$$

Idee: Vektorielles Problem umwandeln in <u>skalares</u> Problem

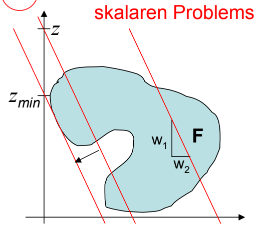
<u>Skalares Ersatzproblem (m = 2)</u>

$$z = w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) = w_1 y_1 + w_2 y_2 \rightarrow \min$$

Umformen ergibt Geradengleichung:

$$y_2 = -\frac{w_1}{w_2} y_1 + z$$

wird minimiert bei Optimierung des skalaren Problems



→ finde Gerade mit minimalem z, so dass F gerade noch berührt wird

→ Tangentialpunkte mit F

<u>Definition 4.1:</u>

Sei

$$F^*(w) := \{z^* \in F : \sum_{i=1}^{m} w_i z_i^* = \inf_{z \in F} \sum_{i=1}^{m} w_i z_i\}$$

Menge aller Vektoren, die für gegebene Gewichte w_i die gewichtete Summe minimieren, wobei $w \in \text{int}(C_m)$.

$$S(F) := \bigcup_{w \in \text{int}(C_m)} F^*(w)$$

■

Satz 4.1: S(F) ⊆ F*. ■

d.h. jeder durch Summenbildung mit positiven Gewichten gefundene Zielvektor ist effizient!

Beweis von Satz 4.1:

Wenn z* ∈ S(F), dann existiert w ∈ int(C_m), so dass ∀ z ∈ F:

$$\sum_{i=1}^{m} w_i z_i^* \leq \sum_{i=1}^{m} w_i z_i \qquad (*)$$

Annahme: z* ∉ F*. Dann existiert z ∈ F, das z* dominiert: z ≺ z* bzw.

$$\forall i: z_i^* \geq z_i \text{ und } \exists k: z_k^* > z_k$$ bzw. (mal $w_i > 0$)

$$\forall i: w_i z_i^* \geq w_i z_i \text{ und } \exists k: w_k z_k^* > w_k z_k$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} w_i z_i^* > \sum_{i=1}^{m} w_i z_i$$ im Widerspruch zu (*). ■

2. Ansatz: Referenzpunktmethode

$$\min_{x \in X} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \Rightarrow \min_{x \in X} \left(\sum_{i=1}^{m} \| z_i^0 - f_i(x) \|^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

wobei z^0 ***Referenzpunkt***. → Wie wählt man Referenzpunkt?

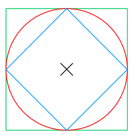
Definition 4.2:

Der Zielvektor z^0 mit $z_i^0 := \inf\{z_i : z \in F\}$ heisst ***idealer Punkt***. ■

Anmerkung: Idealer Punkt bei konfliktären Zielen nicht erreichbar.

- $r = 1$

$$\min_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} |z_i^0 - f_i(x)|$$



- $r = 2$

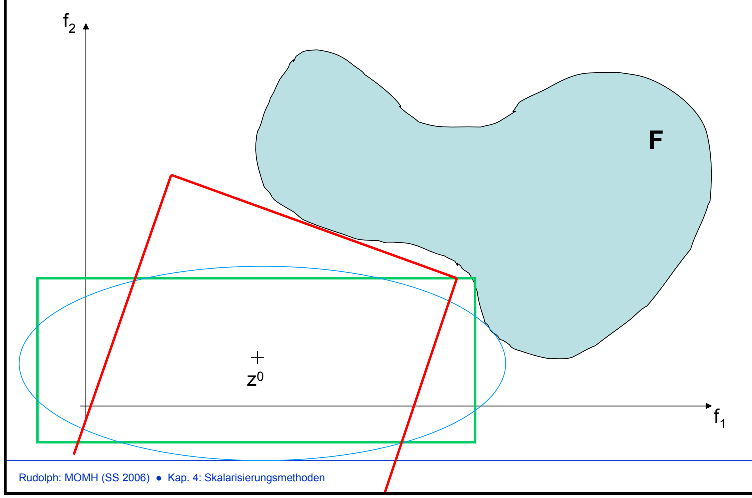
$$\min_{x \in X} \left(\sum_{i=1}^{m} (z_i^0 - f_i(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

- $r = \infty$

$$\min_{x \in X} \max_i \{z_i - f_i(x)\}$$

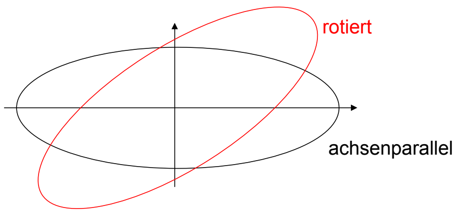
min-max-Methode

Tschebyscheff-Methode



Erweiterungen:

- weighted metric method → Abweichungsterme je Ziel gewichten
- rotated weighted method → zusätzlich rotieren



Satz 4.2:

Sei z^0 der ideale Punkt eine mehrkriteriellen Problems und $1 \le r < \infty$.

Jede optimale Lösung des skalaren Ersatzproblems

$$\min_{x \in X} \left(\sum_{i=1}^{m} \| z_i^0 - f_i(x) \|^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

ist Pareto-optimal.

Beweis: (durch Widerspruch)

Ann.: Sei x* optimale Lösung des Ersatzproblems, aber x* nicht Pareto-optimal.

$\Rightarrow \exists\, x \in X: \forall\, i: f_i(x) \le f_i(x^*)$ und $\exists\, k: f_k(x) < f_k(x^*)$.

$\Rightarrow \forall\, i: 0 \le f_i(x) - z_i^0 \le f_i(x^*) - z_i^0$ und $\exists\, k: 0 \le f_k(x) - z_i^0 \le f_k(x^*) - z_i^0$

$\Rightarrow \sum_i (\, f_i(x) - z_i^0\,)^r < \sum_i (\, f_i(x^*) - z_i^0\,)^r \quad \Rightarrow$ x* nicht opt. für Ersatzproblem! ↯

WIDERSPRUCH zur Annahme. ■

3. Ansatz: Goal Attainment

$$\boxed{\min_{x \in X} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \min\{\lambda : f_i(x) - w_i\, \lambda \le z_i^0\}}$$

wobei w_i zu wählende Gewichte

Anmerkungen:

- bei systematischem Variieren der Gewichte alle Lösungen auf konvexem Zielbereich auffindbar
- kann nicht alle Lösungen im nicht-konvexen Bereich finden
- kann Lösungen finden, die nicht Pareto-optimal (→ ausfiltern, wenn möglich)

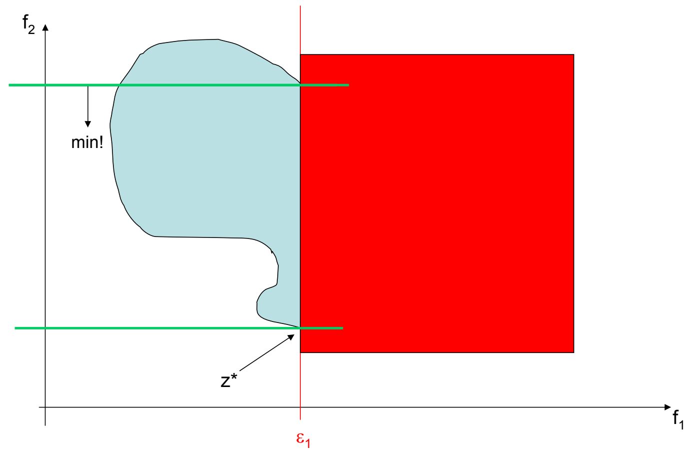
4. Ansatz: Kompromissmethode (ε – constraint method)

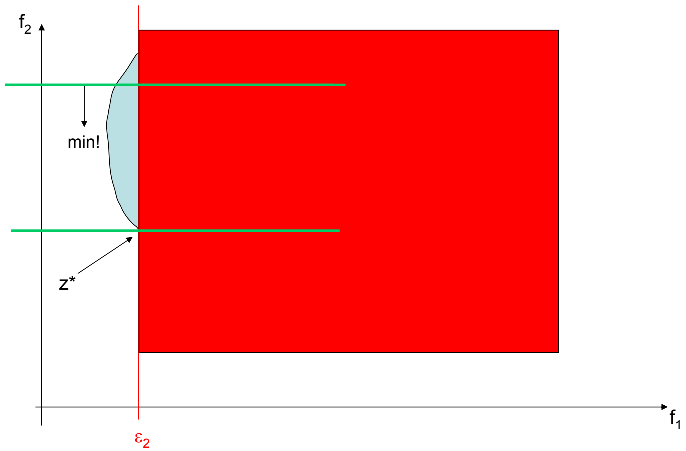
$$\min\{f_k(x) : x \in X\} \text{ unter } \forall i \neq k : f_i \leq \varepsilon_i$$

wobei ε_i erlaubter Höchstwert für Ziel i

Prozedur:

- systematisches Variieren der ε_i
- liefert Pareto-optimale Lösungen (auch für nicht kegelkonvexes F)





5. Ansatz: Lexikografische Methode

Idee:
m monokriterielle Probleme, zunehmend angereichert mit Nebenbedingungen

$$(1)\quad f_1^* := \min_{x \in X}\{f_1(x)\}$$

$$(2)\quad f_2^* := \min_{x \in X}\{f_2(x) : f_1(x) = f_1^*\}$$

$$(3)\quad f_3^* := \min_{x \in X}\{f_3(x) : f_1(x) = f_1^* \wedge f_2(x) = f_2^*\}$$

$$\vdots$$

$$(m)\quad f_m^* := \min_{x \in X}\{f_m(x) : \forall i < m : f_i(x) = f_i^*\}$$

Lösung von (m) = multikriterielle Lösung

Probleme:

1. Reihenfolge der Ziele muss vorgegeben werden
2. Häufig keine natürliche Priorisierung vorhanden
   ⇒ willkürliche Reihenfolge
3. Verschiedene Reihenfolgen
   ⇒ Verschiedene Lösungen!

Fazit:

Ohne natürliche Zielpriorisierung erhält man **beliebige** Lösung!

Zusammenfassung bzgl. Skalarisierungsmethoden

1. ∃ Lösungen, die diesen Methoden verborgen bleiben

2. bei einmaliger Anwendung nur eine Lösung
   zudem: a-priori-Auswahl von Gewichten, Schranken, etc. fragwürdig

3. bei mehrmaliger Anwendung mehrere Lösungen
   falls Gewichte, Schranken, etc. systematisch variiert
   und dominierte Lösungen ausgefiltert werden

4. stillschweigende Annahme: monokriterielle Optimierung „einfach“

   aber: auch monokriterielle Optimierung ist schwierig!

   → multimodale Probleme, lokale Lösungen

   → welche Verfahren?