Sommersemester 2006

# Mehrkriterielle Optimierung mit Metaheuristiken

**(Vorlesung)**

Prof. Dr. Günter Rudolph

Fachbereich Informatik

Lehrstuhl für Algorithm Engineering (LS XI)

Fachgebiet *Computational Intelligence*

**Definition 3.1:**

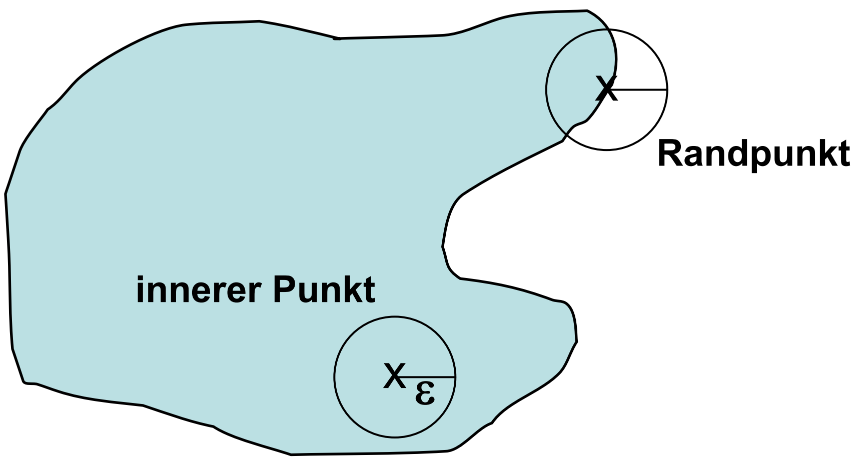
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$.

$U_\varepsilon(x_0) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \| x - x_0 \| \leq \varepsilon \}$ heißt ***ε-Umgebung*** von $x_0 \in M$.

$x \in M$ ***innerer Punkt*** von M $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(x) \subseteq M$. Sonst: ***Randpunkt*** von M.

Das ***Innere*** von M = Menge aller inneren Punkte. In Zeichen: int(M).

Der ***Rand*** von M = Menge aller Randpunkte. In Zeichen: $\partial M$. ■



**Definition 3.2:**

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$.

$A + B := \{ a + b : a \in A \wedge b \in B \}$ ***algebraische Summe***

$A - B := \{ a - b : a \in A \wedge b \in B \}$ ***algebraische Differenz***

$\lambda A := \{ \lambda a : a \in A \}$ ***skalares Vielfaches*** ■

**Rechenregeln:**

$A + \{ 0 \} = A$

$A + B = B + A$

$A - B = A + (-1) B$

$\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$

$(\lambda + \eta) A \subseteq \lambda A + \eta A$

$\rightarrow 2A \neq A + A$ (im Allgem.)

**Definition 3.3:**

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ***Kegel*** $\Leftrightarrow \forall x \in K: \forall \lambda \geq 0: \lambda x \in K$.

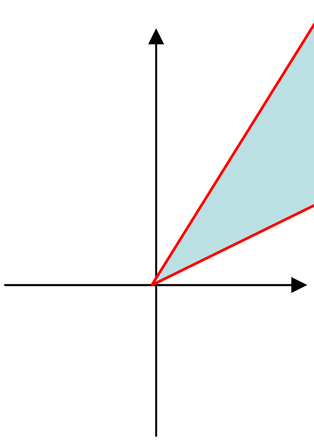
Kegel $-K := \{ -x : x \in K \}$ heißt ***Diametralkegel*** von K.

Kegel K heißt

(a) ***konvex***, falls $\forall x_1, x_2 \in K: x_1 + x_2 \in K$,

(b) ***nichttrivial***, falls $0 \in K$ und $K \neq \{ 0 \}$ und $K \neq \mathbb{R}^n$,

(c) ***echt***, falls $0 \in K$ und $K \cap (-K) = \{ 0 \}$. ■



echt,
konvex,
nichttrivial

$K = \{ x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 0 \}$ konvex, nichttrivial, nicht echt

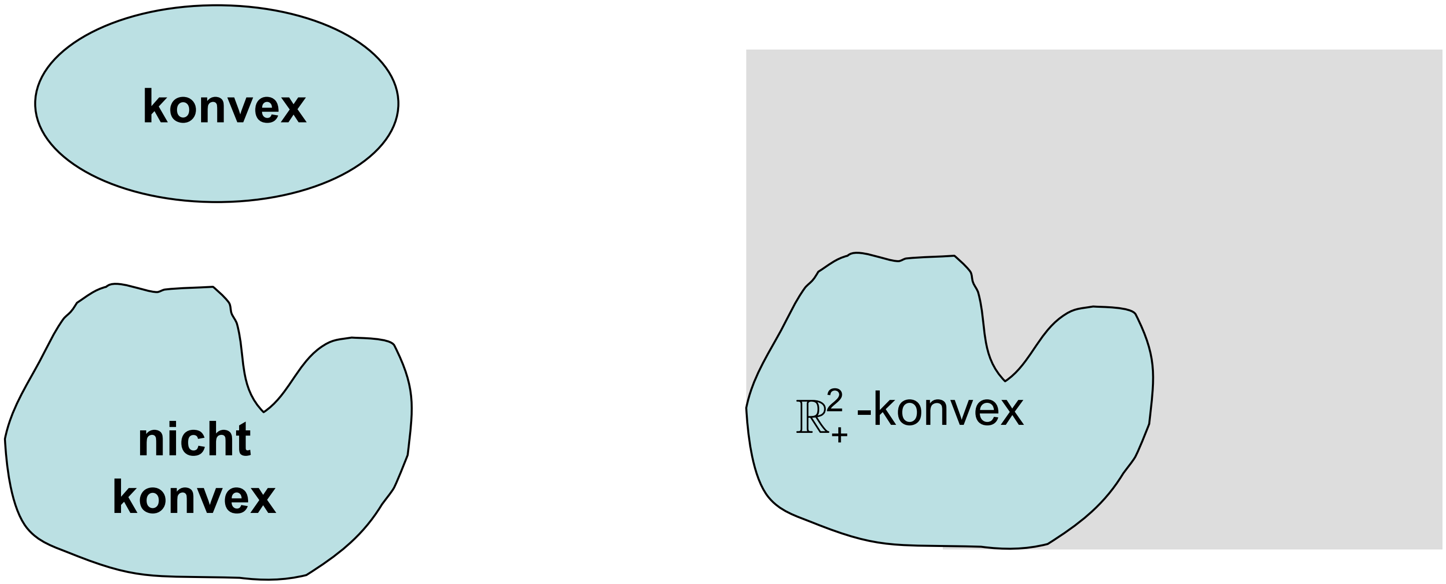
weil $K \cap (-K) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0 \} \neq \{ (0, 0)' \}$

**Definition 3.4:**

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt

***(a) konvex***, falls $\forall\, x, y \in M: \forall\, \xi \in (0,1): \xi\, x + (1 - \xi)\, y \in M$,

***(b) K-konvex*** oder ***kegelkonvex mit Kegel K***, falls M + K konvexe Menge für einen echten, nichttrivialen, konvexen Kegel K. ■



**Satz 3.1:**

(a) Die algebraische Summe konvexer Mengen ist konvex.

(b) Das kartesische Produkt konvexer Mengen ist konvex.

(c) Der Durchschnitt konvexer Mengen ist konvex. ■

ad a) Menge A konvex $\wedge$ Kegel K konvex $\Rightarrow$ A + K konvex (und K-konvex)

ad b) Menge A konvex $\Rightarrow$ $A^n$ konvex

ad c) Seien x, c, d $\in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \{ x \in \mathbb{R}^n : c'x \leq 0 \}$ und $\{ x \in \mathbb{R}^n : d'x \leq 0 \}$ konvexe Hyperebenen

$\Rightarrow \{ x \in \mathbb{R}^n : c'x \leq 0 \} \cap \{ x \in \mathbb{R}^n : d'x \leq 0 \}$ konvex

$\Rightarrow \{ x \in \mathbb{R}^n : c'x \leq 0 \wedge d'x \leq 0 \}$ konvex

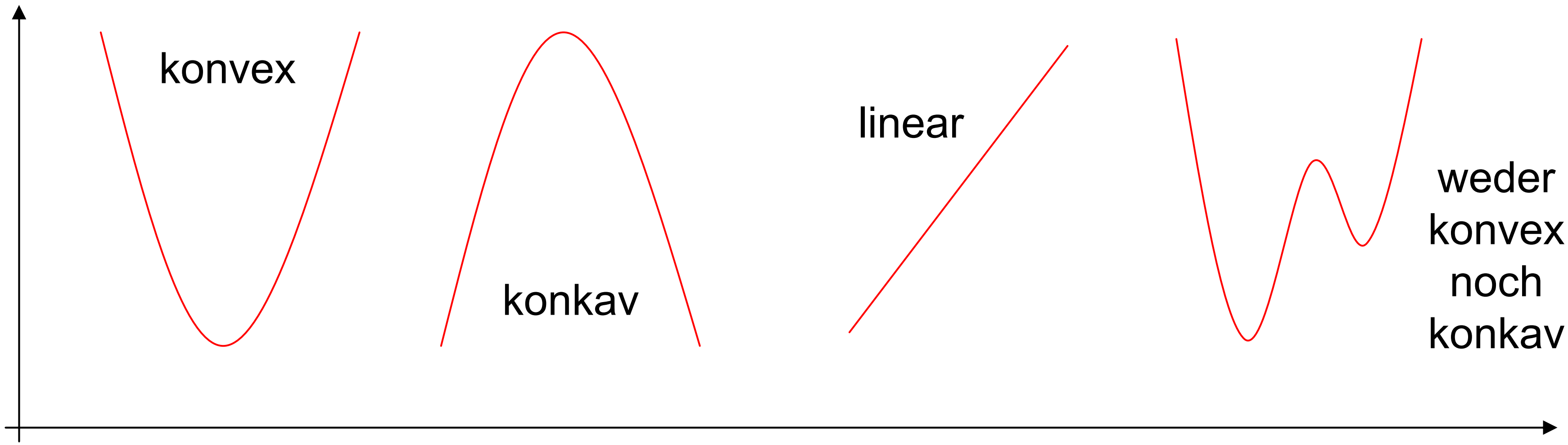
**Definition 3.5:**

Seien $x_1$, $x_2 \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\xi \in [0,1]$. Funktion $f: X \to Z \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt

(a) ***konvex***, falls $f(\, \xi\, x_1 + (1 - \xi)\, x_2\, ) \leq \xi\, f(x_1) + (1 - \xi)\, f(x_2)$,

(b) ***konkav***, falls $-f$ konvex ist,

(c) ***linear*** oder ***affin***, wenn f sowohl konvex als auch konkav. ■



**Satz 3.2:**

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $f: X \to \mathbb{R}^m$ mit $f(x) = Ax + b$ affine Abbildung.

Dann Bild $f(X) = \{ f(x) : x \in X \}$ von X konvex.

**Beweis:**

X konvex $\Rightarrow \forall \xi \in [0,1]: \forall x_1, x_2 \in X$:

$\xi x_1 + (1-\xi) x_2 \in X$ und $f( \xi x_1 + (1-\xi) x_2 ) \in f(X)$.

Seien $z_1, z_2 \in f(X)$ und $x_1, x_2 \in X$ derart gewählt, dass $z_1 = f(x_1)$, $z_2 = f(x_2)$.

Zu zeigen: $\xi z_1 + (1 - \xi) z_2 \in f(X)$.

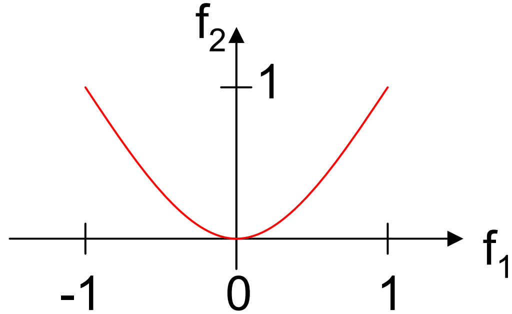
$$\begin{aligned}
\xi z_1 + (1 - \xi) z_2 &= \xi (Ax_1 + b) + (1-\xi)(Ax_2 + b) \\
&= A(\xi x_1 + (1-\xi) x_2) + b(\xi + (1-\xi)) \\
&= f( \xi x_1 + (1-\xi) x_2 ) \in f(X) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

# Kapitel 3: Analytische Lösung

Gilt das vielleicht sogar für konvexe Funktionen über konvexen Mengen?

→ **Nein! Gegenbeispiel:**

$$\underbrace{f(x) = (\, x, x^2 \,)'}_{\text{konvex}} \text{ mit } \underbrace{X = [\,-1, 1\,]}_{\text{konvex}} \subset \mathbb{R}$$




f(X) nicht konvex!

**Anmerkung:**

∃ weitere Klassen von Funktionen über konvexe Mengen, deren Bilder konvex sind.

Hier nicht von Bedeutung, da nur Kegelkonvexität der Bilder entscheidend:

**Satz 3.3:**

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $f: X \to \mathbb{R}^m$ konvex.

Dann Bild $f(X)$ kegelkonvex mit Kegel $K = \mathbb{R}^m_+$

**Beweis:**

Wenn $\check{z}_1, \check{z}_2 \in \check{Z} = f(X) + K$, dann $\exists\, v_1, v_2 \in K \wedge x_1, x_2 \in X$:

$\check{z}_1 = z_1 + v_1 = f(x_1) + v_1$ und $\check{z}_2 = z_2 + v_2 = f(x_2) + v_2$.

Wegen $\xi_1, \xi_2 \geq 0$ mit $\xi_1 + \xi_2 = 1$ und der Konvexität von f(.) folgt

$\xi_1 \check{z}_1 + \xi_2 \check{z}_2 = \xi_1 f(x_1) + \xi_2 f(x_2) + \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 \geq f(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) + \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2$

Da K konvexer Kegel, ist $v_{1,2} := \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 \in K$ und $\exists v_3 \in K$: $v := v_{1,2} + v_3 \in K$.

$\Rightarrow \xi_1 \check{z}_1 + \xi_2 \check{z}_2 = f(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) + v \in f(X) + K$ für geeignetes v bzw. $v_3$ ■

**Definition 3.6:**

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f: X \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$.

***Mehrkriterielles Optimierungsproblem***

$(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))' \to \min!$

bzgl. $x \in X$ ■

**Definition 3.7:**

Lösung $x^* \in X$ heisst ***Pareto-optimal*** $\Leftrightarrow$ ex. kein $x \in X$ mit $f(x) \prec f(x^*)$.

Wenn $x^*$ Pareto-optimal, dann $f(x^*)$ ***effizient***.

Wenn $f(x) \preceq f(y)$, dann: x ***dominiert*** y, f(x) ***dominiert*** f(y).

Menge aller Pareto-optimalen Punkte = ***Paretomenge***

Menge aller effizienten Punkte = ***effiziente Menge*** oder ***Paretofront***. ■

**Satz 3.5:**

Sei $F \subset \mathbb{R}^m$. Es gilt $F^* \subseteq \partial F$.

**Beweis:** Annahme: $z \in F^*$ jedoch $z \notin \partial F$.

Deshalb: $\Rightarrow z \in \text{int}(F) \Rightarrow \exists\varepsilon > 0: U_\varepsilon(z) \subset F$.

Wähle Richtung $r \in \mathbb{R}^m$ mit $r \geq 0$ und Schrittweite $s > 0$ mit $||sr|| < \varepsilon$.

$\Rightarrow z^0 = z - sr \in F$ liegt sogar $\in \text{int}(F)$ *und* $z^0 \preceq z$

$\Rightarrow z \notin F^*$ ↯ WIDERSPRUCH zur Annahme! ■

**Satz 3.6:**

Sei $F \subset \mathbb{R}^m$. Dann $F^* = (F + \mathbb{R}^m_+)^*$. ■

**<u>Definition 3.8</u>**: (Kuhn/Tucker 1951)

Sei $f: X \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar.

$x^* \in X$ heisst ***eigentlich Pareto-optimal*** $\Leftrightarrow$

- $x^*$ ist Pareto-optimal und

(a) es existiert kein $h \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\begin{aligned} \nabla f_i(x^*)'h &\le 0 \quad \forall i = 1,\ldots,m \\ \nabla f_i(x^*)'h &< 0 \quad \text{für mindestens ein } i \\ \nabla g_j(x^*)'h &\le 0 \quad \forall j \in J(x^*) \end{aligned}$$

wobei $J(x^*) = \{ j = 1,\ldots,m : g_j(x^*) = 0 \}$ die Menge der aktiven Indices. ■

**notwendig:** Determinante der Jacobi-Matrix muss Null sein!

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} f_1(x) &= c_1\,(x_1 - a_1)^2 + c_2\,(x_2 - a_2)^2 \\ f_2(x) &= d_1\,(x_1 - b_1)^2 + d_2\,(x_2 - b_2)^2 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \nabla f_1(x) &= \begin{pmatrix} 2\,c_1\,(x_1 - a_1) \\ 2\,c_2\,(x_2 - a_2) \end{pmatrix} \\ \nabla f_2(x) &= \begin{pmatrix} 2\,d_1\,(x_1 - b_1) \\ 2\,d_2\,(x_2 - b_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$J^T(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x)^T \\ \nabla f_2(x)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,c_1\,(x_1 - a_1) & 2\,c_2\,(x_2 - a_2) \\ 2\,d_1\,(x_1 - b_1) & 2\,d_2\,(x_2 - b_2) \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix

$$\det(J^T(x)) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Downarrow$$

$$x_2 = \frac{x_1\,(b_2\,c_1\,d_2 - a_2\,c_2\,d_1) - a_1 b_2 c_1 d_2 + a_2 b_1 c_2 d_1}{x_1\,(c_1 d_2 - c_2 d_1) - a_1 c_1 d_2 + b_1 c_2 d_1}$$

Sei $a = (0,0)$, $b = (4,4)$, $c = (1,3)$, $d = (3,1)$

$$\Downarrow$$

optimale
eigennützige
Lösungen

$$x_2 = \frac{x_1}{9 - 2\,x_1}$$

und $\quad 0 \le x_2 \le 4$

**Noch ein Beispiel:**

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 + x_2^2 - cx_1x_2 + dx_1 + 20,$$
$$f_2(x_1, x_2) = (x_1 - k)^2 + (x_2 - l)^2$$

c = 10, d = 0, k = 0, l = 0

**Optima von $f_1$**

$$\left(\pm\frac{1}{2}(\sqrt{101}+1)^{1/2}, \pm\frac{1}{20}(\sqrt{101}-1)(\sqrt{101}+1)^{1/2}\right) .$$

ca. (+/- 1.662, +/- 1.504)

**Optima von $f_2$**

( 0, 0 )

$\Rightarrow$ Berechnung analytischer Lösung noch möglich

$\Rightarrow$ aber Grenzen der analytischen Lösbarkeit erreicht!