Mathematik für Informatiker und Informatikerinnen

Peter Buchholz & Günter Rudolph

13. Juni 2018

2. Reelle Zahlen

Kapitelgliederung

2.1 Der Körper der reellen Zahlen

Definition 2.1 (Gruppe)

Sei G eine Menge und $\circ$ eine Verknüpfung auf G (d. h. $\forall x, y \in G.\ x \circ y \in G$ und $x \circ y$ ist eindeutig). Das Paar $(G, \circ)$ heißt eine ***Gruppe****, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

1. $\forall x, y, z \in G.\ (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$. *(Assoziativität)*
2. *Es gibt ein Element $n \in G$ mit der Eigenschaft* $\forall x \in G.\ n \circ x = x \circ n = x$ *(Existenz des* ***neutralen Elements****).*
3. *Zu jedem $x \in G$ gibt es genau ein $\bar{x} \in G$ mit der Eigenschaft* $x \circ \bar{x} = \bar{x} \circ x = n$ *(Existenz des* ***inversen Elements****).*

Falls zusätzlich $\forall x, y \in G.\ x \circ y = y \circ x$ (Kommutativität) gilt, spricht man von einer ***kommutativen*** *(oder* ***abelschen****) Gruppe.*

Definition 2.2 (Körper)

Auf einer Menge G sind zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:

1. $(G, +)$ *ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element* 0
2. $(G \setminus \{0\}, \cdot)$ *ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element* 1
3. $\forall x, y, z \in G.\ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
   und $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$ *(Distributivgesetze)*

In diesem Fall wird $(G, +, \cdot)$ ein ***Körper*** *genannt.*

2.2 Anordnungsaxiome

Definition 2.3 (Ordnung)

Sei M eine Menge und ν eine Relation auf M (d. h. eine Teilmenge von $M \times M$). Für $(x, y) \in \nu$ schreiben wir $x\nu y$. Die Relation ν heißt eine ***Ordnung*** *und (M, ν) eine* ***geordnete Menge****, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\forall x \in M.\ x\nu x$ *(Reflexivität)*
2. $\forall x, y \in M.\ x\nu y \wedge y\nu x \ \Rightarrow\ x = y$ *(Antisymmetrie)*
3. $\forall x, y, z \in M.\ x\nu y \ \wedge\ y\nu z \ \Rightarrow\ x\nu z$ *(Transititivität)*

Gilt darüber hinaus

4. $\forall x, y \in M.\ x\nu y \ \vee\ y\nu x$,

so heißt ν eine ***lineare*** *(oder* ***totale****)* ***Ordnung*** *und (M, ν) eine* ***linear*** *(oder* ***total****)* ***geordnete Menge****.*

Definition 2.4 ($\mathbb{R}$ als linear geordneter Körper)

Wir definieren eine lineare Ordnung $\leq$ *("kleiner oder gleich") auf* $\mathbb{R}$*, sodass* $(\mathbb{R}, \leq)$ *eine linear geordnete Menge mit folgenden Eigenschaften ist:*

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}.$ *falls* $x \leq y \;\Rightarrow\; x + z \leq y + z$
   (Verträglichkeit mit der Addition)
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}.$ *falls* $x \leq y \;\wedge\; 0 \leq z \;\Rightarrow\; xz \leq yz$
   (Verträglichkeit mit der Multiplikation)

Die Beziehung $x \leq y$ *heißt* ***Ungleichung****.*

Definition 2.5

Seien $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $y \geq x$ *("größer oder gleich") bedeutet* $x \leq y$
2. $x < y$ *("kleiner") bedeutet* $x \leq y \;\wedge\; x \neq y$
3. $x > y$ *("größer") bedeutet* $x \geq y \;\wedge\; x \neq y$
4. y *heißt* ***nichtnegativ*** *(bzw. positiv) wenn* $0 \leq y$ *(bzw.* $0 < y$*)*
5. x *heißt* ***nichtpositiv*** *(bzw. negativ) wenn* $x \leq 0$ *(bzw.* $x < 0$*).*

Satz 2.6

Für je zwei Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Beziehungen:
$x < y$, $x = y$, $x > y$.

Beweisidee

Beweis in zwei Schritten:

1. Mindestens eine der drei Beziehungen trifft zu.
2. Höchstens eine der drei Beziehungen trifft zu.

$\square$

Satz 2.7

Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *gilt:*

1. $a < b \;\Rightarrow\; a + c < b + c$ *(Verträglichkeit mit der Addition)*
2. $a \leq b \wedge c \leq d \;\Rightarrow\; a + c \leq b + d$
   $a < b \wedge c \leq d \;\Rightarrow\; a + c < b + d$
3. $a < b \wedge 0 < c \;\Rightarrow\; ac < bc$ *(Verträglichkeit mit der Multiplikation)*
4. $0 \leq a \leq b \wedge 0 \leq c \leq d \;\Rightarrow\; ac \leq bd$
   $0 \leq a < b \wedge 0 < c \leq d \;\Rightarrow\; ac < bd$
5. $a \leq b \wedge c < 0 \;\Rightarrow\; ac \geq bc$
   $a < b \wedge c < 0 \;\Rightarrow\; ac > bc$
6. $0 < a \;\Rightarrow\; 0 < \frac{1}{a}$
   $0 < a < b \;\Rightarrow\; \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
7. $0 < 1$

Beweisidee

Herleitung aus den Rechenregeln.

Zum Beispiel Beweis von 1.:

Nach Definition von $<$ gilt $a < b \Rightarrow a \leq b$.

Also folgt aufgrund der Verträglichkeit mit der Addition $a + c \leq b + c$.

Gleichheit kann nicht gelten, da aus $a + c = b + c$ auch $a = b$ folgt, was aber $a < b$ widerspricht. $\square$

2.3 Betrag und Dreiecksungleichung

Definition 2.8 (Betrag)

Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$|x| := \begin{cases} x & \textit{falls } x \geq 0 \\ -x & \textit{falls } x < 0 \end{cases}$$

der ***(Absolut-)Betrag*** *von x.*

Satz 2.9

Der Absolutbetrag hat folgende Eigenschaften

1. $\forall x \in \mathbb{R}.\ |x| \geq 0 \ \wedge\ (|x| = 0 \ \Rightarrow\ x = 0)$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}.\ |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}.\ |x + y| \leq |x| + |y|$ *(Dreiecksungleichung)*

Beweisidee

1. folgt aus der Definition
2. mit Fallunterscheidung positiv/negativ
3. Nutzung von Satz 2.7.2. $\square$

Satz 2.10

Für $a, x, \varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ gilt:

1. $|x| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; x < \varepsilon$ *und* $-\varepsilon < x \;\Leftrightarrow\; -\varepsilon < x < \varepsilon$
2. $|x - a| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$
3. *Die Aussagen 1. und 2. gelten auch, wenn $<$ durch $\leq$ ersetzt wird.*

Beweisidee

Nutzung der Rechenregeln. □

Satz 2.11 (Bernoullische Ungleichung)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ *mit* $x \geq -1$ *und alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

Beweisidee

Induktion über n. $\square$

Archimedisches Axiom

Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x < n$.

Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $n \cdot x > y$ ist.

Ein Körper, in dem das archimedische Axiom gilt, heißt archimedisch geordnet.

2.4 Darstellung von Zahlen im Rechner

Definition 2.12 (Stellenwertsystem)

Seien $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ *Ziffern, dann ist* $p = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i \in \mathbb{N}_0$ *und es existiert eine Darstellung* $b_0, b_1, \ldots, b_m \in \{0, 1\}$*, sodass* $p = \sum_{i=0}^{m} b_i \cdot 2^i \in \mathbb{N}_0$

- Darstellung von natürlichen/ganzen Zahlen durch Zeichenketten fester Länge
- Vorzeichenbit erlaubt die Darstellung von ganzen Zahlen
- Vorgegebene Länge definiert darstellbaren Zahlenbereich

Man unterscheidet Festkomma- und Gleitkommadarstellung

Festkommadarstellung

(feste Anzahl von Stellen vor und nach dem Komma)

- $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+m} \in \{0, 1\}$, so dass $x = \sum_{i=-n}^{m} a_{i+n} \cdot 2^i \in \mathbb{R}$
- eigentlich nur $x \in \mathbb{Q}$ darstellbar, da $x = \frac{\sum_{i=0}^{m+n} a_i \cdot 2^i}{2^n} \in \mathbb{Q}$
- vorgegebene Länge definiert darstellbaren Zahlenbereich
- zusätzliches Vorzeichenbit erlaubt die Darstellung negativer Zahlen

Gleitkommadarstellung

$x = M \cdot b^E$ mit $b^{-1} \leq |M| < 1$, $E \in \mathbb{Z}$

es gilt

- $M = \pm 0.m_1 m_2 \ldots m_t = \pm \sum_{j=1}^{t} m_j \cdot b^{-j}$ und
  $E = \pm e_{s-1} \ldots e_1 e_0 = \pm \sum_{j=0}^{s-1} e_j \cdot b^j$
- M heißt Mantisse, E heißt Exponent, b heißt Basis

Jedes darstellbare x gehört zu $\mathbb{Q}$

Aber nicht jedes $x \in \mathbb{Q}$ ist darstellbar

Standardisierte Darstellung der IEEE:

- Single precision $t = 24$ und $E \in [-125, 128]$
  größte darstellbare Zahl $x_{\mathrm{max}} \approx 3.40 \cdot 10^{38}$
  kleinste positive darstellbare Zahl $x_{\mathrm{min}} \approx 1.18 \cdot 10^{-38}$
- Double precision $t = 53$ und $E \in [-1021, 1024]$
  größte darstellbare Zahl $x_{\mathrm{max}} \approx 1.80 \cdot 10^{308}$
  kleinste positive darstellbare Zahl $x_{\mathrm{min}} \approx 2.23 \cdot 10^{-308}$
- Zusätzlich spezielle Symbole $\pm INF$ oder NaN
- Spezielle Software erlaubt die Nutzung frei definierbarer Darstellungen

Jede Zahl muss durch eine darstellbare Zahl dargestellt (bzw. approximiert) werden

- Sei $x = a \cdot 2^e$ mit $0.5 \leq a < 1$ und $x_{min} \leq x \leq x_{max}$
- Seien u, v zwei benachbarte darstellbare Zahlen mit $u \leq x \leq v$
- Sei $u = 2^e \cdot \sum_{i=1}^{t} b_i \cdot 2^{-i}$ (wir nehmen zur Vereinfachung an, dass $2^{-t} + \sum_{i=1}^{t} b_i \cdot 2^{-i}$ keinen Überlauf erzeugt),
- dann ist $v = 2^e \cdot \left(\sum_{i=1}^{t} b_i \cdot 2^{-i} + 2^{-t}\right)$, so dass
- $u - v = 2^{e-t}$ und $|rd(x) - x| \leq \frac{1}{2}(v - u) = 2^{e-t-1}$ mit $rd(x)$optimale Darstellung von x
- relative Fehler $\frac{|rd(x)-x|}{x} \leq \frac{2^{e-t-1}}{a \cdot 2^e} \leq 2^{-t}$ (relative Maschinengenauigkeit eps)

Rundungsfehler treten bei jeder Berechnung auf

2.5 Intervalle

Definition 2.13 (Erweiterung von $\mathbb{R}$)

$\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *heißt* ***erweiterte reelle Zahlengerade***

Es gilt $-\infty < \infty$ *und* $-\infty < x < \infty$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$

a) Abgeschlossene Intervalle
Seien $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$, dann ist $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

b) Offene Intervalle
Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, dann ist $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
(Man schreibt manchmal auch $]a, b[$ statt (a, b))

c) Halboffene Intervalle
Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$:
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

d) Uneigentliche Intervalle
Sei $a \in \mathbb{R}$:
$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

Definition 2.14 (Länge eines Intervalls)

Für ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ *bezeichnet* $|[a, b]| = b - a$ *die* ***Länge des Intervalls****.*

Definition kann auf offene, halboffene und uneigentliche Intervalle übertragen werden.

Einige weitere weitere Bezeichnungen:

- $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- $\mathbb{R}_{\neq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
- $\hat{\mathbb{R}}_{>0} := \{x \in \hat{\mathbb{R}} \mid x > 0\}$
- $\hat{\mathbb{R}}_{\geq 0} := \{x \in \hat{\mathbb{R}} \mid x \geq 0\}$
- $\hat{\mathbb{R}}_{\neq 0} := \{x \in \hat{\mathbb{R}} \mid x \neq 0\}$

Intervalle definieren Mengen!

Definition 2.15 (Beschränkte Menge)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer.

*A heißt **nach oben** (bzw. **nach unten**) **beschränkt**, wenn es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $x \leq K$ (bzw. $x \geq K$) für alle $x \in A$.*

*Man nennt K dann **obere** (bzw. **untere**) **Schranke** von A.*

*Die Menge A wird **beschränkte Menge** genannt, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.*

Definition 2.16 (Supremum und Infimum)

Sei $A \subset \mathbb{R}$ nichtleer.
Eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ heißt ***Supremum*** *(bzw.* ***Infimum****) von A, wenn K die kleinste obere (bzw. größte untere) Schranke von A ist.*
Dabei heißt K ***kleinste obere Schranke****, falls gilt*

i) *K ist eine obere Schranke von A,*
ii) *für jede obere Schranke K' von A gilt $K \leq K'$*

und ***größte untere Schranke****, falls gilt*

i) *K ist eine untere Schranke von A,*
ii) *für jede untere Schranke K' von A gilt $K \geq K'$.*

Satz 2.17 (Eindeutigkeit des Supremums/Infimums)

Jede nichtleere Teilmenge A von $\mathbb{R}$ hat höchstens ein Supremum und höchsten ein Infimum. D. h. das Supremum (bzw. Infimum) von A ist, falls vorhanden, eindeutig und wird mit $sup(A)$ (bzw. $inf(A)$) bezeichnet.

Beweisidee

Zwei obere/untere Schranken, die nicht gleich sind, müssen in Relation $>$ stehen. $\square$

Wir sagen: $[a, b] \subset [c, d]$, falls $c \leq a \wedge d \geq b \wedge (a \neq c \vee d \neq b)$

Definition 2.18 (Intervallschachtelung)

Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_1, I_2, I_3, \ldots$ heißt ***Intervallschachtelung****, falls gilt:*

i) $I_{n+1} \subset I_n$ *für* $n = 1, 2, 3, \ldots$

ii) *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein Intervall* I_n *mit* $|I_n| \leq \varepsilon$.

Wir fordern folgendes Axiom:
Für jede Intervallschachtellung gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$, sodass $x \in I_n$ für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Satz 2.19 (Existenz des Supremums/Infimums)

Jede nichtleere nach oben (bzw. unten) beschränkte Menge A besitzt ein Supremum (bzw. Infimum).

Beweisidee

Konstruktion des Supremums/Infimums per Intervallschachtelung beginnen mit einer beliebigen oberen/unteren Schranke und einem Element aus der Menge. □

Satz 2.20 (Existenz von Wurzeln)

Zu jedem $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $y^k = x$, d. h. $y = x^{\frac{1}{k}}$ oder $y = \sqrt[k]{x}$ (k-te Wurzel von x).

Beweisidee

Konstruktion einer Intervallschachtelung per Induktion, sodass x in allen Intervallen liegt und Nachweis, dass x die gesuchte Wurzel ist. $\square$

Satz 2.21 (Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$)

Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Wenn $\mathbb{R}$ abzählbar wäre, so könnte man eine Anordnung $x_1, x_2, \ldots$ aller reellen Zahlen finden.

Wir konstruieren eine Intervallschachtelung, deren Intervalle eine Zahl y enthalten, die nicht zur Aufzählung gehört.

3. Folgen und Reihen

Kapitelgliederung

3.1 Folgen und Grenzwerte

Definition 3.1 (Folge)

*Unter einer **Folge** versteht man eine Abbildung* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. *Jedem* $n \in \mathbb{N}$ *wird ein* $a_n \in \mathbb{R}$ *zugeordnet. Man schreibt* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *oder* $(a_1, a_2, \ldots)$.

n **Index** der Folge

a_n **Glieder** der Folge

$f = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge, dann ist
$\|f\| := \sup\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ die **Norm** der Folge.

Definition 3.2 (konvergente Folgen)

*Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **konvergent gegen** $a \in \mathbb{R}$, falls gilt: zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$*

Beachte, dass n_0 von ε abhängt!

Falls f gegen a konvergiert, so nennt man a den **Grenzwert** von f und schreibt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ oder } a_n \to a \text{ für } n \to \infty$$

Eine Folge die gegen 0 konvergiert, heißt **Nullfolge**.

Satz 3.3

Der Grenzwert einer Folge ist, falls er existiert, eindeutig.

Beweisidee

Die Annahme, dass zwei Grenzwerte existieren wird zum Widerspruch geführt indem gezeigt wird, dass der Abstand der beiden Grenzwerte zu groß ist und die Folge nur gegen einen von ihnen konvergieren kann. □

Definition 3.4 (Beschränkte Folge)

Eine Folge $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* ***nach oben*** *(bzw.* ***nach unten****)* ***beschränkt****, falls es eine Konstante* $K \in \mathbb{R}$ *gibt, sodass* $a_n \leq K$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *(bzw.* $a_n \geq K$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*). Die Folge heißt* ***beschränkt****, falls* $|a_n| \leq K$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Definition 3.5 (Bestimmt divergente Folge)

*Eine Folge $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **bestimmt divergent** gegen ∞, falls ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_0$, $a_n > 0$ und $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N},n\geq n_0}$ gegen 0 konvergiert.*

Entsprechend kann man bestimmt Divergenz gegen $-\infty$ definieren.

Satz 3.6

Jede konvergente Folge f ist beschränkt.

Beweisidee

Ab einem vorgegebenem Index n_0 weichen alle Glieder der Folge um nicht mehr als ein vorgegebenes ϵ vom Grenzwert ab.

Damit kann kein Glied größer als eines der Glieder mit Indizes kleiner n_0 oder der Grenzwert plus dem vorgegebenen ϵ sein.

Durch diese Schritte wurde ein Grenzwert definiert. $\square$

Die Umkehrung des Satzes gilt natürlich nicht!

3.2 Rechenregeln für konvergente Folgen

Definition 3.7 (Rechenregeln für Folgen)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zwei konvergente Folgen und* $c \in \mathbb{R}$.
Dann definieren wir:

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. $c \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$
4. $\dfrac{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}{(b_n)_{n\in\mathbb{N}}} = \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *falls* $b_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$

Satz 3.8 (Grenzwerte kombinierter Folgen)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) + \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)}$ *falls $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.*

Beweisidee

Jeweils geschickter Einsatz der Definition des Grenzwertes von Folgen.

□

Satz 3.9

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n$.
Dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Beweisidee
Nachweis, dass der Grenzwert der Differenzfolge $c_n = b_n - a_n$ größer gleich 0 ist. $\square$

Vorsicht, der Satz gilt nicht, wenn $\leq$ durch $<$ ersetzt wird!

Satz 3.10 (Sandwich-Theorem)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$.

Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$,

dann ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Beweisidee

Vorgabe von n_0 und ϵ für die Folgen a_n und c_n. Daraus Ableitung eines passenden n_0' und ϵ' für Folge b_n. $\square$

3.3 Monotone Folgen und Teilfolgen

Definition 3.11 (Monotone Folge)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

- ***monoton wachsend**, falls $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,*
- ***streng monoton wachsend**, falls $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,*
- ***monoton fallend**, falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und*
- ***streng monoton fallend**, falls $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Definition 3.12 (Teilfolge)

*Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ eine aufsteigende unendliche Folge natürlicher Zahlen, dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ eine **Teilfolge** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Satz 3.13

Jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *einer konvergenten Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent und es gilt* $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Beweisidee

Das ϵ, n_0-Kriterium gilt auch, wenn nur ein Teil der Folgenglieder betrachtet werden. $\square$

Satz 3.14 (Divergenzkriterium)

Besitzt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- *i) eine divergente Teilfolge oder*
- *ii) zwei konvergente Teilfolgen* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $(a_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ *mit* $\lim\limits_{k\to\infty}(a_{n_k}) \neq \lim\limits_{l\to\infty}(a_{n_l})$

so ist die Folge divergent.

Beweisidee

i) folgt aus Satz 3.13 und bei ii) kann der Grenzwert nicht eindeutig sein, wenn die Folge konvergent wäre. $\square$

Satz 3.15 (Konvergenzkriterium)

Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent. Genauer formuliert:

i) *Ist* $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton wachsend und nach oben beschränkt, so ist* f *konvergent und es gilt*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ii) *Ist* $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton fallend und nach unten beschränkt, so ist* f *konvergent und es gilt*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Beweisidee

Beschränkte Folgen haben ein Supremum bzw. Infimum. Es wird gezeigt, dass das Supremum (Infimum) dem Grenzwert bei monotonen Folgen entspricht. □

Satz 3.16

Jede Folge enthält eine monotone Teilfolge.

Beweisidee

Betrachte Menge N_1 von nicht kleiner werdenden Elementen. Falls N_1 unbeschränkt, dann ist dies die monotone Teilfolge, ansonsten wir eine monoton fallende Folge rekursiv erzeugt. $\square$

Satz 3.17 (Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweisidee

Folgt aus den Sätzen 3.15 und 3.16. $\square$

Definition 3.18 (Häufungspunkt)

*Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt a **Häufungspunkt**, wenn es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt und $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.*

Definition 3.19 (Cauchy-Folge)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt ***Cauchy-Folge****, wenn gilt:*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - a_{n_0}| < \varepsilon.$$

Satz 3.20

i) *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

ii) *Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.*

iii) *Besitzt die Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge, so ist sie selbst konvergent.*

Beweisidee

i) aus der ε, n_0 Bedingung abgeleitet.

ii) Ab n_0 kann kein Folgenglied größer als $a_{n_0} + \varepsilon$ sein, damit kann kein Folgenglied größer als $\max\left(\max_{n \leq n_0}(a_n), a_{n_0} + \varepsilon\right)$ sein.

iii) Herleitung der ε, n_0 Bedingung für die Folgenglieder, die nicht zur konvergenten Teilfolge gehören.

$\square$

Satz 3.21

Jede Cauchy-Folge ist konvergent.

Beweisidee

Folgt aus den vorherigen Sätzen. □

Korollar 3.22

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

3.4 Ein Algorithmus zur Wurzelberechnung

Satz 3.23

Seien $a > 0$ und $x_1 > 0$ reelle Zahlen.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert als $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$.

Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{a}$ (d. h. $x^2 = a$).

Beweisidee

In 4 Schritten:

i) zeige $x_n > 0$.

ii) zeige $x_n^2 \geq a$ für $n > 1$.

iii) zeige $x_{n+1} \leq x_n$ für $n > 1$.

iv) zeige: Grenzwert der Folge ist gerade die gesuchte Wurzel. $\square$

3.5 Reihen

Definition 3.24 (Reihe)

Man nennt den formalen Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots \ \textit{ mit } a_k \in \mathbb{R} \textit{ eine (unendliche) } \textbf{Reihe} \textit{ und}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \textit{ die } \textbf{n-te Teilsumme}.$$

*Wenn die Folge der Teilsummen konvergiert, dann heißt die Reihe **konvergent**. Eine nicht konvergente Reihe heißt **divergent**.*

Konvergiert sogar $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, *so nennt man die Reihe **absolut konvergent**.*

Korollar 3.25 (Cauchy-Konvergenzkriterium)

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergiert genau dann, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *gibt, sodass* $\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon$ *für alle* $n \geq m \geq n_0$.

Satz 3.26

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *mit* $a_k \geq 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$ *konvergiert genau dann, wenn die Folge der Teilsummen beschränkt ist.*

Beweisidee

s_n ist monoton wachsend, so dass Satz 3.15 gilt.
Bei unbeschränkten Teilsummen gilt offensichtlich $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, so dass die Reihe divergent ist. $\square$

Satz 3.27 (Rechnen mit konvergenter Reihe)

i) *Seien* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergente Reihen, so sind auch* $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$ *konvergent, und es gilt:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ und}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

ii) *Ist die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent und* $c \in \mathbb{R}$*, dann gilt:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Satz 3.27 (Fortsetzung)

iii) *Für jedes $l \in \mathbb{N}$ mit $l > 1$ gilt:*

$$\sum_{k=l}^{\infty} a_k \text{ konvergent } \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent.}$$

iv) *Sind die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent und gilt*

$a_k \leq b_k \forall k \in \mathbb{N}$, so gilt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Beweisidee

Wie bei der Grenzwertbestimmung konvergenter Folgen. $\square$

Satz 3.28 (Leibniz Kriterium)

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge reeller nicht negativer Zahlen mit $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = 0$. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$.

Beweisidee

Betrachte die Teilfolgen mit positivem und negativem Vorzeichen und zeige die Konvergenz gegen einen identischen Grenzwert. $\square$

3.6 Absolut konvergente Reihen

Satz 3.29

Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergiert, so konvergiert sie auch im gewöhnlichen Sinne.*

Beweisidee

Nutzung der Dreiecksungleichung. $\square$

Satz 3.30 (Majorantenkriterium)

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *eine konvergente Reihe mit ausschließlich nicht-negativen Gliedern und* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge mit* $|a_k| \leq c_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$*, dann konvergiert die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut.*

Beweisidee

Nutzung der ε, n_0 Bedingung für die Partialsummen und der Rechenregeln für konvergente Reihen. □

Satz 3.31 (Minorantenkriterium)

Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ *eine divergente Reihe mit ausschließlich nicht-negativen Gliedern und* $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *eine Folge mit* $a_k \geq c_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$. *Dann divergiert die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beweisidee

Ähnlich zum Majorantenkriterium. □

Satz 3.32 (Wurzelkriterium)

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe. Gibt es ein* $c \in \mathbb{R}$ *und* $q \in \mathbb{R}$ *mit* $0 \leq q < 1$, *sodass* $|a_k| \leq c \cdot q^k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$, *dann ist die Reihe absolut konvergent.*

Beweisidee

Nutzung der geometrischen Reihe als Majorante. □

Satz 3.33 (Quotientenkriterium)

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe mit* $a_k \neq 0$ *für alle* $k \geq n_0$*. Es gebe eine reelle Zahl* $q \in \mathbb{R}$ *mit* $0 < q < 1$*, sodass* $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q$ *für alle* $k \geq n_0$*, dann ist die Reihe absolut konvergent.*

Beweisidee

Nutzung der geometrischen Reihe als Majorante (wie im Wurzelkriterium). $\square$

Satz 3.34 (Umordnung)

Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine absolut konvergente Reihe. Dann konvergiert jede Umordnung der Glieder der Reihe gegen den selben Grenzwert.*

Beweisidee

Darstellung der Umordnung als bijektive Abbildung und Berechnung von zwei Teilsummen für gegebenes ε, n_0, eine mit allen Indizes $1, \ldots, n_0$ und eine für die restlichen Indizes. $\square$

3.7 Die Exponentialreihe

Satz 3.35 (Exponentialreihe)

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Exponentialreihe

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

absolut konvergent.

Beweisidee

Mit Hilfe des Quotientenkriteriums. $\square$

Satz 3.36 (Cauchy-Produkt)

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *absolut konvergente Reihen. Für* $n \in \mathbb{N}$ *sei* $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$. *Dann ist die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right)$$

absolut konvergent.

Beweisidee

Beweis über zwei Indexmengen, von denen eine alle Indizes umfasst und die zweite nur einen Teil der Indizes umfasst. Nachweis, dass die Differenz der beiden Reihen gegen 0 konvergiert. □

Satz 3.37 (Eigenschaften der Exponentialreihe)

Für die Exponentialreihe $\exp(x)$ *gelten folgende Eigenschaften:*

i) $\forall x, y \in \mathbb{R}.\ \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}.\ \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

iii) $\forall x \in \mathbb{R}.\ \exp(x) > 0$

iv) $\forall n \in \mathbb{Z}.\ \exp(n) = e^n$

Beweisidee

i) Nutzung der Ergebnisse für das Cauchy-Produkt.
ii) Nutzung von *i*) und Berechnung von $exp(x) \cdot exp(-x)$.
iii) Einsetzen in die Reihenformel für $x > 0$ und Nutzung von *ii*) für $x < 0$.
iv) per Induktion. □

3.8 Potenzreihen

Definition 3.38

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge und $x \in \mathbb{R}$, dann ist eine Potenzreihe $P(x)$ wie folgt definiert:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

mit $a_k \in \mathbb{R}$.

Alternative Darstellung:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$$

Satz 3.39 (Konvergenz von Potenzreihen)

Konvergiert eine Potenzreihe $P(x)$ in einem Punkt $x_0 \neq 0$, so konvergiert sie in jedem Punkt x mit $|x| < |x_0|$ absolut.

Beweisidee

Beweis mit Hilfe des Wurzelkriteriums. $\square$

Konvergenzradius einer Potenzreihe $r = \sup \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \text{ konvergiert}\}$.

4. Funktionen

Kapitelgliederung

4.1 Grundlegende Definitionen

Definition 4.1 (Funktion)

Seien A und B zwei nichtleere Mengen. Eine Funktion f mit ***Definitionsbereich*** *A und* ***Zielbereich*** *(oder* ***Bildbereich****) B ist eine Vorschrift, die jedem Element aus A ein eindeutiges Element aus B zuordnet.*

Definition 4.2 (Eigenschaft von Funktionen)

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

1. ***injektiv***, *wenn zu jedem $y \in B$ höchstens ein $x \in A$ mit $f(x) = y$ gehört (d. h. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$),*
2. ***surjektiv***, *wenn jedes $y \in B$ als Abbild eines $x \in A$ auftaucht (d. h. $\forall y \in B\, \exists x \in A. f(x) = y$),*
3. ***bijektiv***, *wenn sie injektiv und surjektiv ist.*

Definition 4.3 (Umkehrfunktion)

Für eine bijektive Funktion $f : A \to B$ definieren wir die ***Umkehrfunktion*** *$f^{-1} : B \to A$ als $f^{-1}(y) = x$ genau dann wenn $f(x) = y$.*

Definition 4.4 (Rationale Operationen auf Funktionen)

Seien $f, g : A \to \mathbb{R}$ Funktionen und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen $f + g : A \to \mathbb{R}$, $cf : A \to \mathbb{R}$, $fg : A \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (cf)(x) &= cf(x), \\ (fg)(x) &= f(x)g(x). \end{aligned}$$

Sei $A' = \{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$, dann ist die Funktion $\frac{f}{g} : A' \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Definition 4.5 (Konkatenation von Funktionen)

Seien $f : A \to \mathbb{R}$ *und* $g : B \to \mathbb{R}$ *Funktionen und* $f(x) \in B$ *für alle* $x \in A$. *Dann ist die Funktion* $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ *definiert durch* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

4.2 Polynome und rationale Funktionen

Polynomfunktionen: Seien $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Das größte n mit $a_n \neq 0$ heißt der **Grad des Polynoms**.
Multiplikation von Polynomfunktionen
$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ und
$q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$
Polynomfunktionen vom Grade n und m. Dann ist

$$h(x) = (p \cdot q)(x) = c_{m+n} x^{m+n} + \cdots + c_1 x + c_0$$

eine Polynomfunktion vom Grad $n + m$ und $c_k = \sum_{\substack{0 \leq r \leq n \\ 0 \leq s \leq m \\ r+s=k}} a_r b_s$.

Satz 4.6

Seien $p(x)$ und $q(x)$ Polynome vom Grad n und m mit $m \leq n$. Dann gibt es Polynome $s(x)$ und $r(x)$, so dass

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x).$$

Der Grad von $s(x)$ entspricht der Differenz Grad p - Grad q und Grad $r <$ Grad q.

Beweisidee

Schrittweise Konstruktion des Polynoms $s(x)$, so dass jeweils der Koeffizient der höchsten Potenz des Restpolynoms zu 0 wird.
Zeigen, dass die resultierende Darstellung eindeutig ist. $\square$

Korollar 4.7

Ein Polynom $p(x)$ lässt sich genau dann ohne Rest durch $q(x) = x - x_1$ teilen ($x_1 \in \mathbb{R}$), wenn x_1 eine Nullstelle von $p(x)$ ist.

$q(x) = x - x_1$ bezeichnet man auch als einen **Linearfaktor**.

Seien $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ und
$q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$
Polynome und $A = \{x \mid q(x) \neq 0\}$.

Dann ist die rationale Funktion $r : A \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$r(x) = \left(\frac{p}{q}\right)(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

4.3 Beschränkte und monotone Funktionen

Definition 4.8 (Beschränkte Funktion)

Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt ***beschränkt****, wenn $|f(x)| \leq K$ für $K \in \mathbb{R}$ und alle $x \in A$.*

Definition 4.9 (Kompaktes Intervall)

*Unter einem **kompakten Intervall** versteht man ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall* $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definition 4.10 (Monotonie von Funktionen)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion,

$$f \text{ heißt } \left\{ \begin{array}{c} \textbf{monoton wachsend} \\ \textbf{streng monoton wachsend} \\ \textbf{monoton fallend} \\ \textbf{streng monoton fallend} \end{array} \right\} \text{ falls } \left\{ \begin{array}{c} f(x) \leq f(x') \\ f(x) < f(x') \\ f(x) \geq f(x') \\ f(x) > f(x') \end{array} \right\}$$

für $x, x' \in A$ mit $x < x'$.

Satz 4.11

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist f streng monoton, so ist f injektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(A) \to A$ ist ebenfalls streng monoton (im gleichen Sinne).

Beweisidee

Beide Richtungen einzelnen zeigen.

$\Rightarrow$: Aus strenger Monotonie folgt $x \neq x' \to f(x) \neq f(x')$.

$\Leftarrow$: Widerspruchsbeweis unter Nutzung der Beziehung

$$f \circ g = f \circ f^{-1} = id.$$

□

4.4 Grenzwerte von Funktionen

Definition 4.12 (Berührungspunkt/Häufungspunkt)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$

1. *a heißt **Berührungspunkt** von A, falls in jeder ε-Umgebung von a, d. h. $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon), \varepsilon > 0$, mindestens ein Punkt von A liegt.*
2. *a heißt **Häufungspunkt**, falls in jeder ε-Umgebung von a unendlich viele Punkte von A liegen.*

Definition 4.13 (Grenzwert einer Funktion)

Sei $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ ein Berührungspunkt von A. Man definiert dann $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ als ***Grenzwert****, falls für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in A$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c$ gilt.*

Einige spezielle Grenzwerte:

1. $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = c$ bedeutet: a ist Berührungspunkt von $A \cap (a, \infty)$ und für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in A$, $x_n > a$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c$
2. $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = c$ bedeutet: a ist Berührungspunkt von $A \cap (-\infty, a)$ und für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in A$, $x_n < a$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$ bedeutet: A ist nach oben unbeschränkt und für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c$.
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c$ bedeutet: A ist nach unten unbeschränkt und für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c$.

4.5 Stetige Funktionen

Definition 4.14 (Stetigkeit)

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in A$. Die Funktion f heißt ***stetig im Punkt*** *a, falls $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

f heißt ***stetig*** *(in A), falls f in jedem Punkt aus A stetig ist.*

Satz 4.15 (Operationen auf stetigen Funktionen)

Seien $f, g : A \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in $a \in A$ stetig sind und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen

$$i)\ f + g : A \to \mathbb{R}$$

$$ii)\ cf : A \to \mathbb{R}$$

$$iii)\ f \cdot g : A \to \mathbb{R}$$

im Punkt a stetig.
Ist $g(a) \neq 0$, so ist auch die Funktion

$$iv)\ \frac{f}{g} : A' \to \mathbb{R}$$

in a stetig. Dabei ist $A' = \{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$.

Beweisidee

Nutzung der Rechenregeln für Folgen. □

Korollar 4.16

Jede rationale Funktion ist in ihrem Definitionsbereich stetig.

Satz 4.17 (Komposition stetiger Funktionen)

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(A) \subseteq B$. Die Funktion f sei in $a \in A$ und g in $b = f(a) \in B$ stetig. Dann ist die Funktion $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ in a stetig.

Beweisidee

Fortsetzung der Stetigkeit der ersten Funktion als Argument der zweiten Funktion. □

Satz 4.18 (Zwischenwertsatz)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (bzw. $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$). Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = 0$.

Beweisidee

Konstruktion einer Intervallschachtelung, die die Nullstelle direkt bestimmt oder diese als eindeutigen Wert enthält, der in allen Intervallen liegt. □

Korollar 4.19

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion und* $y \in \mathbb{R}$ *mit* $f(a) < y < f(b)$ *(bzw.* $f(a) > y > f(b)$ *). Dann existiert ein* $c \in (a, b)$ *mit* $f(c) = y$*.*

Korollar 4.20

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist auch $J = f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

Satz 4.21 (Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen)

Jede in einem kompakten Intervall stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt ihr Minimum und Maximum an.
D. h. es existiert ein $c \in [a, b]$, sodass $f(c) = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ und ein $d \in [a, b]$, sodass $f(d) = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$.

Beweisidee

Beweis über die Konvergenz von (Teil-)Folgen, die in Verbindung mit der Stetigkeit dazu führt, dass f beschränkt ist und ein Maximum in Intervall annehmen muss. □

Satz 4.22 ($\varepsilon - \delta$ - Definition von Stetigkeit)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f ist genau dann im Punkt $a \in A$ stetig, wenn gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in A$ mit $|x - a| < \delta$.

Beweisidee

Beweis jeweils in eine Richtung:
ε, δ existieren $\Rightarrow$ Stetigkeit: Zu zeigen, dass aus der Konvergenz der x_n gegen a die Konvergenz der $f(x_n)$ gegen $f(a)$ folgt.
Stetigkeit $\Rightarrow$ ε, δ existieren: Widerspruchsbeweis unter der Annahme, es gäbe zu einem ε kein passendes δ. $\square$

Korollar 4.23

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ *stetig im Punkt* $a \in A$ *und* $f(a) \neq 0$. *Dann ist* $f(x) \neq 0$ *für alle* x *in einer Umgebung von* a. *D. h. es existiert ein* $\delta > 0$, *sodass* $f(x) \neq 0$ *für alle* $x \in A$ *mit* $|x - a| < \delta$.

Korollar 4.24

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton (wachsend oder fallend). Sei $J = f(I)$, dann bildet f das Intervall I bijektiv auf J ab und die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Definition 4.25 (Gleichmäßige Stetigkeit)

Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt in A ***gleichmäßig stetig****, wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so dass $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ für alle $x, x' \in A$ mit $|x - x'| < \delta$.*

Satz 4.26 (Stetigkeit auf kompakten Intervallen)

Jede auf einem kompakten Intervall stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist dort gleichmäßig stetig.

Beweisidee

Widerspruchsbeweis unter Nutzung der Existenz konvergenter Teilfolgen für beschränkte Folgen. $\square$

4.6 Logarithmen und allgemeine Potenzen

Definition der Exponentialfunktion über die Exponentialreihe:

$$\exp(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

1. exp bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_{>0}$ ab
2. exp ist streng monoton wachsend

$\Rightarrow$ Umkehrfunktion $\ln(x) : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ existiert

- $\ln(\exp(x)) = \exp(\ln(x)) = x$
- $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$
- $\ln(x) = \begin{cases} < 0 & \text{für} \quad x \in (0,1) \\ 0 & \text{für} \quad x = 1 \\ > 0 & \text{für} \quad x \in (1,\infty) \end{cases}$

Bisherige Potenzen, die wir für $n \in \mathbb{N}$ betrachtet haben

- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} \; (a \in \mathbb{R})$
- $a^0 = 1 \; (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \; (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \; (a \in \mathbb{R}_{>0})$

Daraus kann man ableiten:

$$a^{\frac{n}{m}} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$$

Definition 4.27 (Exponentialfunktion für allgemeine Basen)

Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ sei die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiert als*

$$\exp_a(x) = \exp(x \ln a).$$

Satz 4.28

Die Funktion $\exp_a(x)$ *ist stetig und es gilt*

i) $\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$

ii) $\exp_a(n) = a^n$ *für alle* $n \in \mathbb{Z}$

iii) $\exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p}$ *für alle* $p \in \mathbb{Z}$ *und* $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Beweisidee

Anwendung der Rechenregeln für die Exponentialfunktion. $\square$

Satz 4.29

Für $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gelten folgende Rechenregeln:

i) $a^x a^y = a^{x+y}$

ii) $(a^x)^y = a^{xy}$

iii) $a^x b^x = (ab)^x$

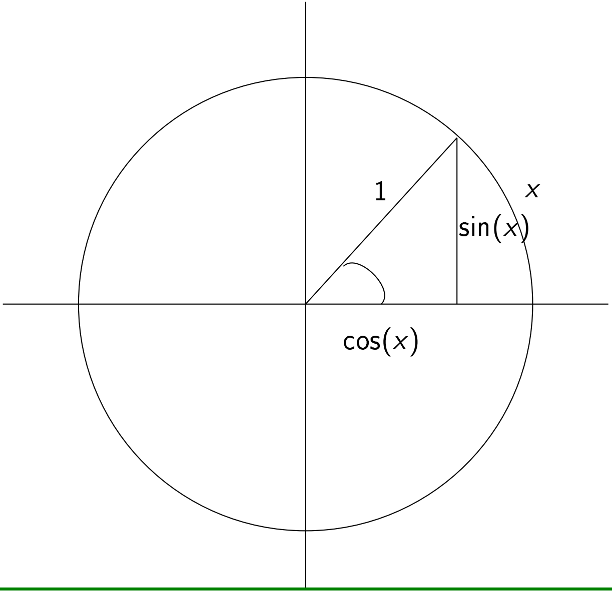
iv) $\left(\frac{1}{a^x}\right) = a^{-x}$

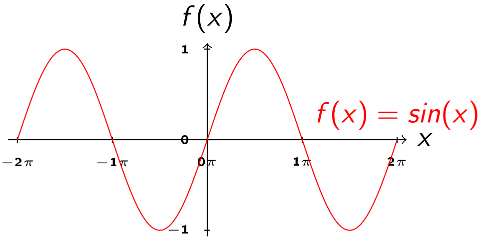
Definition 4.30

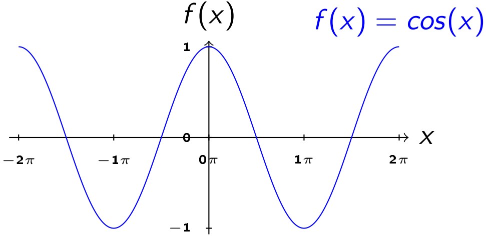
Sei $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$*, dann ist der Logarithmus zur Basis a definiert als*

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

4.7 Trigonometrische Funktionen


1
x
sin(x)
cos(x)


f(x)
1
0
−1
−2π
−1π
0π
1π
2π
x
f(x) = sin(x)


f(x)
f(x) = cos(x)
1
0
−1
−2π
−1π
0π
1π
2π
x

Definition 4.31

Für alle $x \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \text{ \textit{und} } \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Satz 4.32

Die Reihen für $\cos(x)$ *und* $\sin(x)$ *konvergieren absolut für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Beweisidee

Beweis unter Nutzung des Quotientenkriteriums. $\square$

Restglied bei Abbruch der Summation nach endlicher Schrittzahl

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n+2}(x), \ \sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+3}(x).$$

Satz 4.33

Für die Restglieder der Cosinus- und Sinus-Reihe gelten die folgenden Abschätzungen

$$\begin{aligned} |r_{2n+2}(x)| &\leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad \textit{für } |x| \leq 2n+3 \\ |r_{2n+3}(x)| &\leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \quad \textit{für } |x| \leq 2n+4 \end{aligned}$$

Beweisidee

Abschätzung der unendlichen Summen. □

Definition 4.34 (Periodische Funktion)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt ***periodische Funktion****, wenn es ein $p > 0$ gibt, so dass*

$$f(x) = f(x + p)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Das kleinste $p \in \mathbb{R}_{>0}$ mit der obigen Eigenschaft heißt ***Periode der Funktion*** *f.*

Satz 4.35 (Eigenschaften von sin und cos)

Es gilt:

i) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *(Satz des Pythagoras)*

ii) $\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$

iii) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

iv) $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$
$\sin(x+2\pi) = \sin(x)$

v) $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

vi) $|\sin(x)| \leq 1$
$|\cos(x)| \leq 1$

5. Differenzierbare Funktionen

Kapitelgliederung

5.1 Differenzierbarkeit einer Funktion

Definition 5.1 (Differenzierbarkeit)

*Sei $a \in A \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt **in** a **differenzierbar**, falls der Grenzwert*

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A \setminus \{a\}}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert.

Satz 5.2

Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ ist in einem Häufungspunkt $a \in A$ genau dann differenzierbar, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$f(x) = f(a) + c \cdot (x - a) + r(x)$$

für $x \in A$ und $r(x)$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$\lim_{x \to a,\ x \neq a} \frac{r(x)}{x - a} = 0$$

ist. Es gilt in diesem Fall $c = f'(a)$.

Beweisidee

„$\Rightarrow$" Falls f diff'bar, dann $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{r(x)}{x-a} = 0$ zeigen.

„$\Leftarrow$" Def. der Diff'barkeit ergibt sich genau aus den Grenzwerten. $\square$

Satz 5.3 (Stetigkeit - Differenzierbarkeit)

Ist die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ in $a \in A$ differenzierbar, so ist sie in $a \in A$ auch stetig.

Beweisidee

Nutzung der Darstellung aus Satz 5.2. $\square$

5.2 Differentiations-Regeln

Satz 5.4 (Algebraische Operationen)

Seien $f, g : A \to \mathbb{R}$ in $a \in A$ differenzierbar und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g, c \cdot f, f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ in a differenzierbar und es gelten folgende Rechenregeln:

i) *Linearität:* $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)$

ii) *Produktregel:* $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

Ist ferner $g(x) \neq 0$ für alle $x \in A$, so ist auch die Funktion $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt:

iii) *Quotientenregel:* $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

Beweisidee

Betrachtung der kombinierten Grenzwerte. $\square$

Satz 5.5 (Ableitung der Umkehrfunktion)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, das aus mehr als einem Punkt besteht und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion und $g = f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ mit $J = f(I)$ deren Umkehrfunktion.
Ist f in $a \in I$ differenzierbar und gilt $f'(a) \neq 0$, so ist g in $b = f(a)$ differenzierbar und es gilt:

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))} \ .$$

Beweisidee

Nutzung der Stetigkeit von g und Einsetzen der Grenzwerte in die Definition der Ableitung. □

Satz 5.6 (Kettenregel)

Seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ $(A, B \subseteq \mathbb{R})$ Funktionen.
Sei f in $a \in A$ differenzierbar und g sei in $b = f(a)$ differenzierbar.
Dann ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ in Punkt $a \in A$ differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) \; .$$

Beweisidee

Definition einer Hilfsfunktion

$$g^*(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(b)}{y-b} & , \text{ falls } y \neq b \\ g'(b) & , \text{ falls } y = b \; . \end{cases}$$

und Einsetzen von $g^*(x)$ in den Grenzwert. □

5.3 Ableitungen höherer Ordnung

Definition 5.7 (Ableitung höherer Ordnung)

*Sei $f : A \to \mathbb{R}$ mit $A \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist die k-**te Ableitung** (oder **Ableitung** k-**ter Ordnung**) von f in $a \in A$ definiert als $f^{(k)}(a)$ (f oben k, $k \in \mathbb{N}_0$) mit*

1. $f^{(0)}(a) = f(a)$
2. $f^{(k+1)}(a) = (f^{(k)}(a))' : A \to \mathbb{R}$, *falls die Ableitung von $f^{(k)}(a)$ in $a \in A$ existiert.*

Satz 5.8 (Operationen auf Ableitungen)

Sei $k \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$, $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ und seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : A \to \mathbb{R}$ k-mal differenzierbar.

1. *Dann sind $f + g$, $f - g$, $c \cdot f$, $f \cdot g$ und falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in A$ $\frac{f}{g}$ k-mal differenzierbar und es gilt:*

$$
\begin{aligned}
i)&\quad (f+g)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) + g^{(k)}(a)\\
ii)&\quad (f-g)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - g^{(k)}(a)\\
iii)&\quad (cf)^{(k)}(a) = cf^{(k)}(a)\\
iv)&\quad (fg)^{(k)}(a) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)}(a) \cdot g^{(k-i)}(a)
\end{aligned}
$$

(Leibnizsche Formel)

$$
v)\quad \left(\frac{f}{g}\right)^{(k)}(a) = \frac{f^{(k)}(a) - \sum\limits_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \left(\frac{f}{g}\right)^{(i)}(a) g^{(k-i)}(a)}{g(a)}
$$

Satz 5.8 (Fortsetzung)

2. *Ist ferner* $f(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ *und* $g : B \to \mathbb{R}$ k*-mal differenzierbar, so ist auch* $(g \circ f)$ k*-mal differenzierbar.*

Beweisidee

Rekursive Anwendung der Differentiationsregel. $\square$

5.4 Numerisches Differenzieren

Approximation der Ableitung durch

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

oder

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

für festes $h > 0$

Auftretende Fehler:

1. Approximationsfehler
2. Rundungsfehler

$$\exp'(1) \approx \frac{\exp(1+h)-\exp(1)}{h}\ ,$$

h	**Berechneter Wert**	**Fehler**
$1.0e+0$	4.6707742704716058	$1.9524924420125607e+0$
$1.0e-2$	2.7319186557871245	$1.3636827328079359e-2$
$1.0e-4$	2.7184177470829241	$1.3591862387896114e-4$
$1.0e-6$	2.7182831874306141	$1.3589715690542903e-6$
$1.0e-8$	2.7182818218562939	$-6.6027512346522599e-9$
$1.0e-10$	2.7182833761685279	$1.5477094827964777e-6$
$1.0e-12$	2.7187141427020829	$4.3231424303780130e-4$
$1.0e-14$	2.7089441800853815	$-9.3376483736635763e-3$
$1.0e-16$	0.0000000000000000	$-2.7182818284590451e+0$

$$\exp'(1) \approx \frac{\exp(1+h) - \exp(1-h)}{2h} \ ,$$

h	**Berechneter Wert**	**Fehler**
$5.0e-1$	2.8329677996379363	$1.1468597117889123e-1$
$5.0e-3$	2.7182931546474443	$1.1326188399163328e-5$
$5.0e-5$	2.7182818295923283	$1.133283245025040 7e-9$
$5.0e-7$	2.7182818285176320	$5.8586913098679361e-11$
$5.0e-9$	2.7182818218562939	$-6.6027512346522599e-9$
$5.0e-11$	2.7182833761685279	$1.5477094827964777e-6$
$5.0e-13$	2.7182700534922328	$-1.1774966812261312e-5$
$5.0e-15$	2.7533531010703878	$3.5071272611342685e-2$
$5.0e-17$	0.0000000000000000	$-2.7182818284590451e+0$

5.5 Lokale Extrema und Mittelwertsätze

Definition 5.9 (Lokale Extrema)

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann hat f in $x \in (a, b)$ ein ***lokales Maximum*** *(bzw.* ***lokales Minimum****), wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $f(x) \geq f(y)$ (bzw. $f(x) \leq f(y)$) für alle y mit $|x - y| < \varepsilon$ gilt.*

Gilt sogar $f(x) > f(y)$ (bzw. $f(x) < f(y)$) für alle $y \neq x$ mit $|x - y| < \varepsilon$ so spricht man von einem ***strikten lokalen Maximum*** *(bzw.* ***striktem lokalen Minimum****).*

Satz 5.10 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)

Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *besitze im Punkt* $x \in (a, b)$ *ein lokales Extremum und sei in* x *differenzierbar. Dann ist* $f'(x) = 0$.

Beweisidee

Zeigen, dass der Grenzwert in eine Richtung kleiner und in die andere Richtung größer 0 ist. $\square$

Satz 5.11 (Satz von Rolle)

Sei $a < b$ *und* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion mit* $f(a) = f(b)$*.* *Wenn die Funktion* f *in* (a, b) *differenzierbar ist, dann existiert ein* $c \in (a, b)$ *mit* $f'(c) = 0$*.*

Beweisidee

Es muss ein lokales Extremum im Intervall existieren, dort ist die Ableitung gleich 0 (nach Satz 5.10). □

Satz 5.12 (Mittelwertsatz)

Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in (a, b) differenzierbar ist. Dann existiert ein $c \in (a, b)$, sodass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)\,.$$

Beweisidee

Definition einer Hilfsfunktion, so dass der Satz aus Satz 5.11 folgt. □

Korollar 5.13

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige und in* (a, b) *differenzierbare Funktion mit* $K^- \leq f'(x) \leq K^+$ *für alle* $x \in (a, b)$ *und* $K^-, K^+ \in \mathbb{R}$.

Für alle $c, d \in [a, b]$ *mit* $c \leq d$ *gilt dann*

$$K^-(d-c) \leq f(d) - f(c) \leq K^+(d-c)\,.$$

Satz 5.14 (Monotonie von Funktionen)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann gilt:

i) $\forall x \in (a, b) : f'(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; f$ *in* $[a, b]$ *monoton wachsend*

ii) $\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; f$ *in* $[a, b]$ *streng monoton wachsend*

iii) $\forall x \in (a, b) : f'(x) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; f$ *in* $[a, b]$ *monoton fallend*

iv) $\forall x \in (a, b) : f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; f$ *in* $[a, b]$ *streng monoton fallend*

Beweisidee

Nutzung des Mittelwertsatzes 5.12 der den Zusammenhang zwischen den Funktionswerten und der Ableitung herstellt. □

Satz 5.15 (Strenges lokales Maximum/Minimum)

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die im Punkt $x \in (a, b)$ zweimal differenzierbar ist.

Falls $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ (bzw. $f''(x) < 0$),
dann besitzt f in x ein strenges lokales Minimum (bzw. Maximum).

Beweisidee

Für ein strenges lokales Minimum zeigen, dass f streng monoton fallend in $(x - \varepsilon, x)$ und streng monoton wachsend in $(x, x + \varepsilon)$ unter Nutzung von Satz 5.14. $\square$

Satz 5.16

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die im Punkt $x \in (a,b)$ $n+1$mal differenzierbar ist. Falls $f'(x) = f^{(2)}(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = 0$ und $f^{(n+1)}(x) \neq 0$, dann besitzt f in x

- *i) ein strenges lokales Minimum, falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x) > 0$,*
- *ii) ein strenges lokales Maximum, falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x) < 0$,*
- *iii) kein Extremum, falls n gerade ist.*

Beweisidee

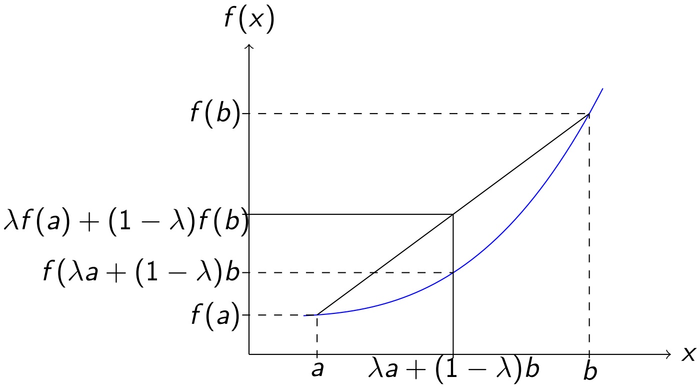
Über die Taylorreihenentwicklung der Funktion f, die wir in Kapitel 7 kennen lernen. $\square$

Definition 5.17

Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt ***konvex****, wenn für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ und alle $\lambda \in (0, 1)$ gilt*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Die Funktion heißt ***konkav****, falls $-f$ konvex ist.*


$f(x)$
$f(b)$
$\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$
$f(\lambda a + (1-\lambda)b$
$f(a)$
x
a
$\lambda a + (1-\lambda)b$
b

Satz 5.18

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion.

f ist genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$.

Beweisidee

Jeweils eine Richtung beweisen.
Wenn die zweite Ableitung nicht-negativ ist, ist die erste Ableitung monoton wachsend, woraus man mit Hilfe des Mittelwertsatzes die Konvexität ableiten kann.
Wenn f konvex ist, zeigt man per Widerspruchsbeweis, dass die zweite Ableitung nicht negativ werden kann. $\square$

Satz 5.19 (Zweiter Mittelwertsatz)

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar sind. Sei ferner $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es existiert ein $c \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

Beweisidee

Mit Hilfe von Satz 5.11 zeigt man, dass $g(a) \neq g(b)$ gilt.
Im zweiten Schritt wird eine Hilfsfunktion definiert, auf die wieder Satz 5.11 angewendet werden kann, um den Rest zu zeigen. □

Satz 5.20 (Regel von L'Hospital $\frac{0}{0}$)

Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei auf $[a,b]$ stetige und auf (a,b) differenzierbare Funktionen. Sei $c \in [a,b]$ und $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a,b) \setminus \{c\}$.

Gilt $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$ und existiert $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$, so existiert auch $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beweisidee

Grenzwertbetrachtungen, die zeigen, dass

$$\frac{f(x_i)}{g(x_i)} = \frac{f'(x_{i+1})}{g'(x_{i+1})}$$

für $x_{i+1} \in (x_i, c)$. □

Definition 5.21 (Uneigentlicher Grenzwert)

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ *und* a *ein Häufungspunkt von* A. *Falls für alle* $K \in \mathbb{R}$ *ein* $\delta > 0$ *existiert, sodass* $f(x) > K$ *für* $|x - a| < \delta$, *so schreibt man* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Falls $\lim\limits_{x \to a} -f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Satz 5.22 (Regel von L'Hospital $\frac{\infty}{\infty}$)

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *und* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *zwei auf* $[a, b]$ *stetig und auf* (a, b) *differenzierbare Funktionen. Sei* $c \in [a, b]$ *und* $g'(x) \neq 0$ *für* $x \in (a, b) \setminus \{c\}$.
Gilt $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$ *und* $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \infty$ *und existiert* $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *so existiert auch* $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ *und es gilt* $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beweisidee

Anwendung von Satz 5.20 auf $F(x) = \frac{1}{f(x)}$ und $G(x) = \frac{1}{g(x)}$. $\square$

5.6 Kurvendiskussion

Punkte der Kurvendiskussion einer Funktion $f : A \to \mathbb{R}$:

1. Symmetrie
2. Verhalten am Rand des Definitionsbereichs
3. Nullstellen
4. Extrempunkte
5. Wendepunkte
6. Funktionsgraph

1. Symmetrie
   Achsensymmetrie: $f(x) = f(-x)$
   Punktsymmetrie: $f(-x) = -f(x)$
   In beiden Fällen muss $x \in A \Leftrightarrow -x \in A$ gelten!
2. Verhalten am Rand
   - Interessant sind Häufungspunkte $a \notin A$ und
   - bei unbeschränktem A das Verhalten für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$

   Asymptote
   Verhalten für $x \to \infty$ beschrieben durch Gerade $g(x) = \alpha x + \beta$,
   so dass $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = 0$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$
   Es gilt:
   $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \text{ und } \lim_{x\to\infty}(f(x) - \alpha x) = \beta$$
   (analog für $x \to -\infty$)

3. Bestimmung von Nullstellen
   Berechne $f(x) = 0$ (siehe nächstes Kapitel)

4. Berechnung von Extrempunkten
   Notwendige Bedingung für lokalen Extrempunkt $a \in A$:

   $f'(a) = 0$ falls Umgebung $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subseteq A$ für $\epsilon > 0$ existiert

   Hinreichende Bedingung

   $f''(a) < 0$ für lokales Maximum, $f''(a) > 0$ für lokales Minimum
   (weitergehende hinreichende Bedingungen siehe Satz 5.16)

   Punkte "am Rand" von A separat untersuchen

5. Wendepunkte

Punkt $a \in A$, so dass $\epsilon > 0$ existiert und $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subseteq A$, sowie

$$f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x \in (a-\varepsilon, a) \\ = 0 & \text{für } x = a \\ > 0 & \text{für } x \in (a, a+\varepsilon) \end{cases} \qquad \text{oder}$$

$$f''(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x \in (a-\varepsilon, a) \\ = 0 & \text{für } x = a \\ < 0 & \text{für } x \in (a, a+\varepsilon) \end{cases}$$

Hinreichende Bedingung: $f''(a) = 0$ und $f^{(3)}(a) \neq 0$.

6. Lösungen von Gleichungen

Problemstellungen:

Nullstellenberechnung: $f(x) = 0$

Fixpunktberechnung: $f(x) = x$ $(\Rightarrow g(x) = f(x) - x = 0)$

Gleichungslösung: $f(x) = g(x)$ $(\Rightarrow h(x) = f(x) - g(x) = 0)$

Bestimmung von $x \in A$, so dass $f(x) = 0$

- Für lineare oder quadratische Funktionen:
  Berechnung mit vorgegebener Formel (analytische Berechnung)
- Für Polynome:
  Nullstelle raten (bzw. numerisch berechnen) und Division durch Nullstelle $\Rightarrow$ Polynom niedrigeren Grades
- Für allgemeine Funktionen:
  Iterative Berechnung: Bestimme eine Folge x_n, so dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ (Konvergenz)
  übliche Annahme: $f(x)$ stetig im “Suchintervall”
  - Nullstelle kann nur bis zu einer bestimmten Genauigkeit bestimmt werden (z.B. durch Rundungsfehler)
  - Verfahren sind nicht für alle Funktionen und Startpunkte konvergent

Regula-falsi-Verfahren

Seien

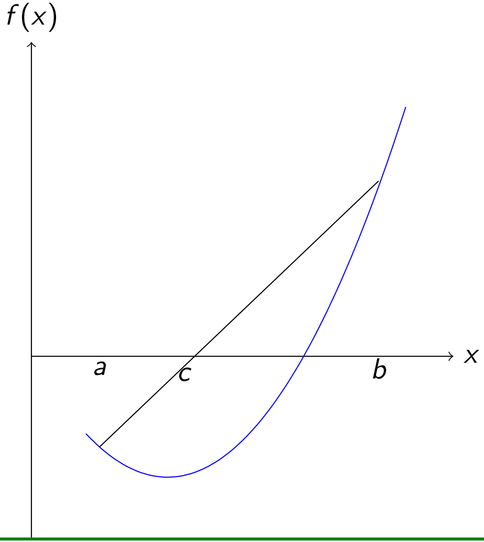
- $a, b \in A$ $(a < b)$,
- f sei stetig auf (a, b) und
- $f(a) < 0 < f(b)$
  (ähnliches Vorgehen für $f(a) > 0 > f(b)$)

dann hat f eine Nullstelle im Intervall (a, b) (Satz 4.18):

Algorithmus:

1. $c = b - f(b)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$
2. falls $|f(c)| < \epsilon$ Abbruch, c ist Approximation einer Nullstelle,
   sonst falls $f(c) < 0$ setze $a = c$, sonst $b = c$
   fahre bei 1. fort

Nutzung der Sekante zur Approximation der Nullstelle



Newton-Verfahren

Seien

- $a, b \in A$ $(a < b)$,
- f sei in $[a, b]$ stetig differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$

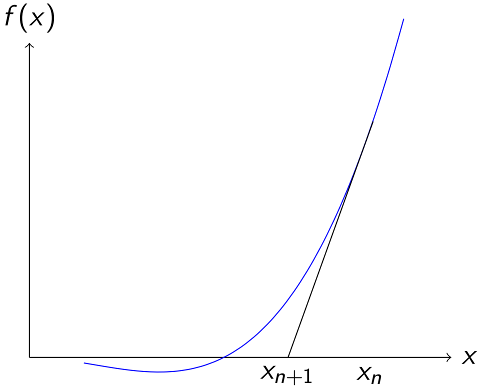
Algorithmus:

1. wähle $x_0 \in [a, b]$, $n = 0$
2. $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
3. falls $|f(x_{n+1})| < \epsilon$ Abbruch x_{n+1} ist Approximation der Nullstelle sonst $n = n + 1$ und fahre bei 2. fort

Konvergenz nicht für alle Funktionen und Startwerte garantiert deshalb Test auf Divergenz (z.B. falls $x_{n+1} \notin [a, b]$)

Newton-Verfahren
(Nutzung der Tangente zur Approximation der Nullstelle)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



7. Der Satz von Taylor

Satz 7.1 (Taylorsche Formel)

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ *eine in* A $(n+1)$*-mal stetig differenzierbare Funktion und* $a \in A$*. Dann gilt für alle* $x \in A$*:*

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$$

wobei es zu jedem $x \in A \setminus \{a\}$ *(mindestens) ein* $y \in (\min(x,a), \max(x,a))$ *gibt, sodass* $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

Beweisidee

$R_n(x)$ ist $n+1$ mal differenzierbar, so dass für jede Ableitung der zweite Mittelwertsatz (Satz 5.19) angewendet werden kann. $\square$

Definition 7.2 (Taylor-Reihe)

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion in $a \in A$. Dann heißt

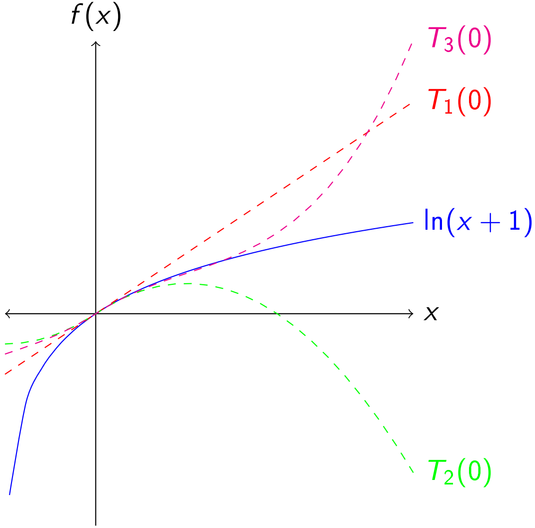
$$T[f,a](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die ***Taylor-Reihe*** *von f im* ***Entwicklungspunkt*** *a.*

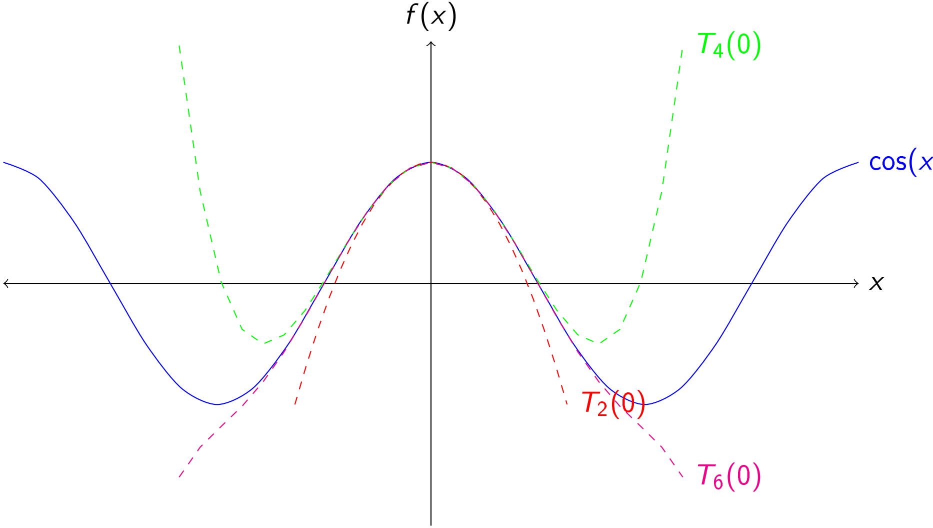
Taylor-Polynom vom Grad n im **Entwicklungspunkt** a:

$$T_n[f,a](x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$f(x) = \ln(x+1)$ und die Taylor-Polynome $T_n(0,x)$ für $n = 1, 2, 3$



$f(x) = \cos(x)$ und die Taylor-Polynome $T_n(0, x)$ für $n = 2, 4, 6$



8. Integralrechnung

Kapitelgliederung

8.1 Das bestimmte Riemann-Integral

Definition 8.1 (Zerlegung)

Gegeben seien ein Intervall $[a, b] \in \mathbb{R}$ *und eine endliche Anzahl von Punkten* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *mit* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$*.*

Dann heißt $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ *eine* ***Zerlegung*** *von* $[a, b]$ *und* $|Z| := \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \ldots, n\}$ *das* ***Feinheitsmaß*** *der Zerlegung* Z*.*

Eine Zerlegung heißt ***äquidistant****, wenn die Intervalle* $[x_{i-1}, x_i]$ *für* $i = 1, \ldots, n$ *alle gleich groß sind.*

Definition 8.2 (Unter- und Obersumme)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt $(\forall x \in [a, b].|f(x)| \leq K < \infty)$ und Z eine Zerlegung auf $[a, b]$. Wir nennen

$$s(Z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$ *die* ***Untersumme*** *und*

$$S(Z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$ *die* ***Obersumme***

von f bezüglich der Zerlegung Z.

Definition 8.3 (Verfeinerung und Überlagerung)

Eine Zerlegung $\tilde{Z}$ wird eine ***Verfeinerung****von Zerlegung Z genannt (in Zeichen: $Z \leq \tilde{Z}$) wenn $\tilde{Z}$ alle Punkte von Z enthält.*

Eine Zerlegung $\hat{Z}$, die genau die Punkte von Z und $\tilde{Z}$ enthält, soll ***Überlagerung*** *von Z und $\tilde{Z}$ heißen und mit $\hat{Z} = Z + \tilde{Z}$ bezeichnet werden.*

Lemma 8.4

Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ beschränkt mit $|f(x)| \leq K$ und Z eine Zerlegung von $[a, b]$. Die Zerlegung $\tilde{Z}$ entstehe aus Z durch Hinzunahme eines zusätzlichen Punktes. Dann gilt:

a) $s(Z) \leq s(\tilde{Z}) \leq s(Z) + 2K|Z|$

b) $S(Z) \geq S(\tilde{Z}) \geq S(Z) - 2K|Z|$

Beweisidee

Abschätzung des zusätzlichen Flächeninhaltes bei der Teilung eines Intervalls. □

Satz 8.5

Jede Untersumme ist kleiner oder gleich jeder Obersumme.

Beweisidee

Seien Z und $\tilde{Z}$ zwei beliebige Zerlegungen. Dann gilt

$$s(Z) \underset{8.4}{\overset{\text{Lem.}}{\leq}} s(Z+\tilde{Z}) \underset{8.2}{\overset{\text{Def.}}{\leq}} S(Z+\tilde{Z}) \underset{8.4}{\overset{\text{Lem.}}{\leq}} S(\tilde{Z})$$

□

Definition 8.6 (Riemann-Integral)

Die Funktion $f(x)$ sei auf $[a, b]$ beschränkt. Man nennt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{s(Z) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } [a, b]\}$$

das ***untere (Riemann-)Integral*** *und*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\{S(Z) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } [a, b]\}$$

das ***obere (Riemann-)Integral****.*

Definition 8.6 (Riemann-Integral (Fortsetzung))

Sind unteres und oberes Riemann-Integral gleich, dann heißt $f(x)$ über $[a, b]$ ***(Riemann-)integrierbar*** *und*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \sup_{Z \text{ Zerlegung von } [a,b]} s(Z) = \inf_{Z \text{ Zerlegung von } [a,b]} S(Z)$$

heißt das ***(Riemann-)Integral*** *von f über $[a, b]$.*

Man nennt a (bzw. b) die ***untere*** *(bzw.* ***obere****)* ***Integrationsgrenze*** *und x die* ***Integrationsvariable****.*

Satz 8.7

Es gilt $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ *bzw.* $\sup_Z s(Z) \le \inf_Z S(Z)$.

Beweisidee

Für zwei beliebige Zerlegungen Z und $\tilde{Z}$ gilt nach Satz 8.5 stets $s(Z) \le S(\tilde{Z})$.

Also gilt für ein beliebig fixiertes $\tilde{Z}$ auch $\sup_Z s(Z) \le S(\tilde{Z})$.

Da $\tilde{Z}$ beliebig, kann es derart gewählt werden, dass $S(\tilde{Z}) = \inf_Z S(Z)$.

Folglich $\sup_Z s(Z) \le \inf_Z S(Z)$. □

Satz 8.8

Sei f auf $[a,b]$ beschränkt und Z_n eine Folge von Zerlegungen mit $|Z_n| \to 0$ für $n \to \infty$. Dann gilt

a) $\lim\limits_{n\to\infty} s(Z_n) = \sup\limits_{Z} s(Z)$ *und*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} S(Z_n) = \inf\limits_{Z} S(Z)$

Beweisidee

Definition der passenden Zerlegung und Nutzung von Lemma 8.4 zur Bestimmung des Grenzwerts. $\square$

Satz 8.9 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)

Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ beschränkt.

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0. \exists Z(\varepsilon) : S(Z) - s(Z) < \varepsilon$$

Beweisidee

$\Rightarrow$: wähle passende Zerlegungen, die um höchsten $\epsilon/2$ vom Supremum bzw. Infumum abweichen und zeige, dass dann $S(Z) - s(z) < \epsilon$.

$\Leftarrow$: da zu jedem ϵ eine passende Zerlegung existiert, kann der Grenzwert für $\epsilon \to 0$ betrachtet werden. $\square$

Satz 8.10 (Integrierbarkeit stetiger und monotoner Funktionen)

a) *f stetig auf* $[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$.

b) *f auf* $[a, b]$ *monoton* $\Rightarrow f \in R[a, b]$.

Beweisidee

zu *a*) Herleitung aus der $\epsilon - \delta$ Definition für Stetigkeit unter Nutzung der gleichmäßigen Stetigkeit.
zu *b*) Nachweis, dass bei einer äquidistanten Zerlegung, die immer weiter verfeinert wird, die Differenz zwischen $S(Z_n)$ und $s(Z_n)$ gegen 0 konvergiert. □

Definition 8.11 ((Riemannsche) Zwischensumme)

Sei f auf $[a, b]$ beschränkt, $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $\tilde{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ für $i = 1, \ldots, n$. Man nennt

$$\sigma(Z, \tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\tilde{x}_i)$$

die ***(Riemannsche) Zwischensumme*** *von f auf $[a, b]$.*

Lemma 8.12

Sei f auf $[a, b]$ beschränkt. Für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es Zwischenpunkte $\tilde{x}$ und $\hat{x}$ mit

a) $s(Z) \leq \sigma(Z, \tilde{x}) \leq s(Z) + \varepsilon$ *und*

b) $S(Z) - \varepsilon \leq \sigma(Z, \hat{x}) \leq S(Z)$

Beweisidee

Wähle jeweils Werte aus den Intervallen der Zerlegung, deren Funktionswerte sich um maximal $\epsilon/(b-a)$ vom Minimum bzw. Maximum unterscheiden $\square$

Satz 8.13

Sei f auf $[a, b]$ beschränkt, Z_n eine Folge von Zerlegungen mit $|Z_n| \to 0$ für $n \to \infty$ mit passenden Zwischenpunkten $\tilde{x}^{(n)}$. Es gilt

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \text{ Jede Riemansche Zwischensumme konvergiert.}$$

In diesem Fall sind alle Grenzwerte gleich und sie haben den Wert

$$\lim_{n\to\infty} \sigma\left(Z_n, \tilde{x}^{(n)}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =: I$$

Beweisidee zu Satz 8.13

$\Rightarrow$: da $s(Z_n)$ und $S(Z_n)$ konvergieren, kann das Sandwich-Theorem genutzt werden.

$\Leftarrow$: Konstruktion konvergenter Teilfolgen, die gegen das untere und obere Riemann-Integral konvergieren.
Da auch nach Voraussetzung die Mischung der beiden Folgen zwei konvergente Teilfolgen besitzt und selbst konvergiert, müssen Teilfolgen und Folge gegen den selben Grenzwert konvergieren .

Satz 8.14

Sind die Funktionen f und g auf $[a, b]$ integrierbar, so ist auch die Funktion $\alpha f + \beta g$ für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Beweisidee

Herleitung des Integrals über die Zwischensummen. $\square$

Satz 8.15

Seien f und g integrierbar auf $[a, b]$. Dann gilt:

a) $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, $|f(x)|$ *sind integrierbar auf* $[a, b]$.

b) *Falls* $f \leq g$ *für alle* $x \in [a, b]$, *dann* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

c) $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

Beweisidee

Herleitung jeweils aus der Darstellung der Integrale über Ober- und Untersummen (für *a*)) oder Zwischensummen (für *b*)). □

Satz 8.16 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f \in R[a,b]$ *und* $m \le f(x) \le M$ *für* $x \in [a,b]$. *Dann ist*

a) $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$

b) *Ist* $f(x)$ *auf* $[a,b]$ *zudem stetig, dann existiert ein* $\tilde{x} \in (a,b)$ *mit*
$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\tilde{x})$

Beweisidee

Teil a) durch Intgeration der Ungleichung

Teil b) unter Nutzung des Zwischenwertsatzes (Korollar 4.19), um zu zeigen, dass jeder Wert zwischen m und M angenommen wird. $\square$

Satz 8.17 (Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $p(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$ und $p(x)$ sowie $f(x) \cdot p(x)$ integrierbar auf $[a, b]$.
Wenn $m \leq f(x) \leq M$ auf $[a, b]$ ist, dann gilt

$$m \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b p(x) f(x)\,\mathrm{d}x \leq M \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweisidee

Analog zu Satz 8.16. $\square$

Satz 8.18

Sei f auf $[a, b]$ beschränkt und $a < c < b$. Es gilt:

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f \in R[a, c] \text{ und } f \in R[c, b] \; .$$

In diesem Fall ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \; .$$

Beweisidee

Auswahl passender Zerlegungen für die Intervalle. $\square$

Definition 8.19

Für $a < b$ *und* $f \in R[a, b]$ *wird* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ *sowie* $\int\limits_c^c f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ *für* $c \in [a, b]$ *festgelegt.*

Satz 8.20

Sei $f \in R[a,b]$ und $[c,d] \subseteq [a,b]$. Dann gilt

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = F(d) - F(c)\ .$$

wobei $F(x) = \int_a^x f(y)\mathrm{d}y$ ist.

Beweisidee

Nutzung Satz 8.18 Teil 2. $\square$

8.2 Der Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung

Satz 8.21

Sei $f \in R[a, b]$ eine stetige Funktion und $c \in [a, b]$. Für $x \in [a, b]$ sei dann

$$F(x) = \int_c^x f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

Beweisidee

Einsetzen der Definition der Ableitung und zeigen, dass der Grenzwert für $h \to 0$ gerade $f(x)$ ist. $\square$

Definition 8.22 (Stammfunktion)

*Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $F(x)$ mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x)$ auf $[a, b]$ soll **Stammfunktion** oder **unbestimmtes Integral** von $f(x)$ heißen. Wir schreiben dafür $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Satz 8.23 (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung)

Ist $F(x)$ auf $[a, b]$ stetig differenzierbar, so gilt

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

und für $x, c \in [a, b]$ entsprechend

$$F(x) = F(c) + \int_c^x F'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Beweisidee

Zeige, dass $H(x) = F(x) - G(x)$ eine Konstante für alle $x \in [a, b]$, woraus der Satz gefolgert werden kann. □

8.3 Die Technik des Integrierens

Notation

$$F(x)\Big|_a^b := \Big[F(x)\Big]_a^b := F(b) - F(a).$$

Satz 8.24 (Partielle Integration)

Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *und* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *zwei auf* $[a,b]$ *stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x \,.$$

Beweisidee

Umkehrung der Produktregel der Differenziation. □

Satz 8.25 (Substitutionsregel)

Sei f stetig auf $\langle a, b\rangle$ und g : stetig differenzierbar auf $\langle \alpha, \beta\rangle$, wobei $< a, b >:= [\min\{a, b\},\ \max\{a, b\}]$ *und*

- $g(\langle \alpha, \beta\rangle) \subseteq \langle a, b\rangle$ *sowie*
- $g(\alpha) = a, g(\beta) = b.$

Dann ist $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t.$

Beweisidee

Umkehrung der Kettenregel der Differenziation. $\square$

Satz 8.26 (Nützliche Substitutionsregeln)

1. $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$ *für* $F'(x) = f(x)$.
2. $\int f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f^2(x)$.
3. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|$.

Beweisidee

Ableiten der rechten Seiten. $\square$

Satz 8.27

Jede rationale Funktion ist elementar integrierbar.

8.4 Uneigentliche Integrale

Definition 8.28 (unbeschränkter Integrationsbereich)

Sei f auf $[a,\infty)$ erklärt und über jedes $[a,c]$ für $a<c<\infty$ integrierbar. Man legt fest:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Wenn der Grenzwert existiert, dann existiert das uneigentliche Integral und es wird ***konvergent*** *genannt (andernfalls* ***divergent****). Entsprechend definieren wir für ein Intervall $(-\infty,a]$*

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Definition 8.28 (Fortsetzung)

und für $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$*, wobei beide Integrale auf der rechten Seite existieren müssen.*

Definition 8.29 (Integration unbeschränkter Funktionen)

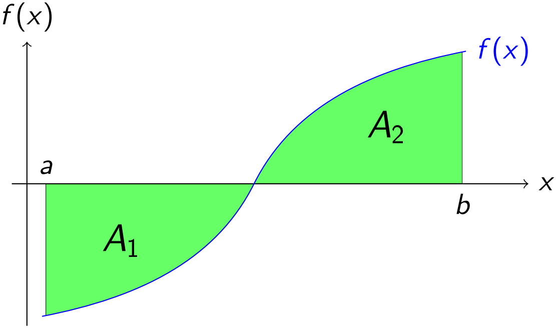
1. *Sei* $f \in R[c,b]$ *für jedes* c *mit* $a < c < b$ *und* $\lim\limits_{x \searrow a} |f(x)| = \infty$. *Man definiert* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim\limits_{c \searrow a} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, *falls der Grenzwert existiert.*
2. *Sei* $f \in R[a,c]$ *für jedes* c *mit* $a < c < b$ *und* $\lim\limits_{x \nearrow b} |f(x)| = \infty$. *Man definiert* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim\limits_{c \nearrow b} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, *falls der Grenzwert existiert.*
3. *Sei* $f \in R[c,d]$ *für alle* c, d *mit* $a < c < d < b$ *und* $\lim\limits_{x \searrow a} |f(x)| = \infty$ *sowie* $\lim\limits_{x \nearrow b} |f(x)| = \infty$. *Man definiert unter Rückführung auf die Fälle 1.) und 2.)* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $(a < c < b)$ *falls beide uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite existieren.*

8.5 Anwendungen

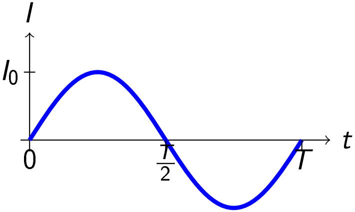
Wichtige Anwendungen der Integralrechnung:

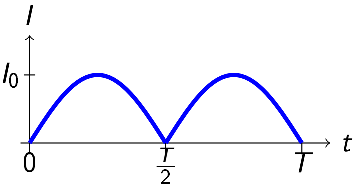
1. Summieren (Flächenberechnung)
2. Mitteln (Mittelwertsatz)
3. Rekonstruieren (von Funktionen aus der Änderungsrate)

Beispiel Summieren:



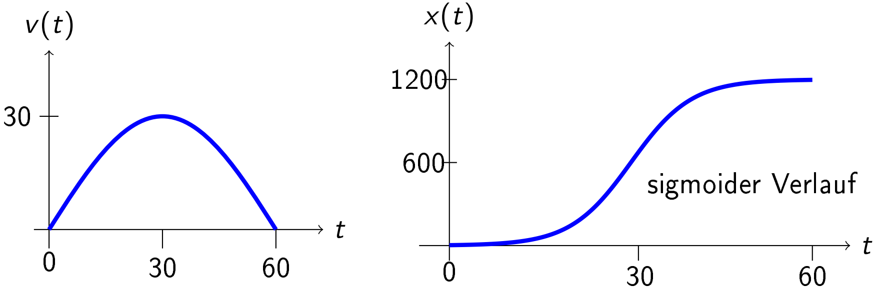
Beispiel Mitteln:





Wie groß ist der Mittelwert?

Beispiel Rekonstruieren:



Wie berechnet man aus der Geschwindigkeit die zurückgelegte Strecke?

8.6 Exkurs: Differentialgleichungen

Definition 8.30

Eine Gleichung der Form $f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots) = 0$ heißt ***gewöhnliche Differentialgleichung*** *(DGL). Die Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung heißt die* ***Ordnung der DGL****.*

Lösung einer homogenen Differentialgleichung (Trennung der Variablen)

$$x'(t) = a(t) \cdot x(t) \Leftrightarrow \frac{dx}{\mathrm{d}t} = a(t) \cdot x(t) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x(t)} = a(t) \cdot \mathrm{d}t$$

Beide Seiten integrieren

$$\begin{array}{rclcrcll}
\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{y} & = & \int\limits_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s & \Leftrightarrow & \ln y\big|_{x_0}^{x} & = & \int\limits_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s & \Leftrightarrow \\
\ln \frac{x}{x_0} & = & A(t) - A(t_0) & \Leftrightarrow & x(t) & = & x_0 \cdot e^{A(t)-A(t_0)} &
\end{array}$$

Lösung des inhomogenen Systems (durch Variation der Konstanten)

$$x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$$

Idee: in homogener Lösung Konstante x_0 zur Funktion $x_0(t)$ machen und behaupten, dass $\underbrace{x(t) = x_0(t) \cdot \varphi(t)}_{(*)}$ mit

$$\varphi(t) \overset{\varphi'(t)=a(t)\cdot\varphi(t)}{=} \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right) = e^{A(t)-A(t_0)}$$

Lösung nichtlinearer DGLs

$$x'(t) = a(t)g(x(t))$$

g ist stetig und nichtlinear

1. Trennung der Variablen

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(t)g(x) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = a(t)\mathrm{d}t$$

   Integration auf beiden Seiten

$$G(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s =: F(t)$$

   $G(x)$ nach x auflösen (d.h. $x(t) = G^{-1}(F(t))$), falls möglich

Lösung nichtlinearer DGLs

$$x'(t) = a(t)g(x(t))$$

g ist stetig und nichtlinear

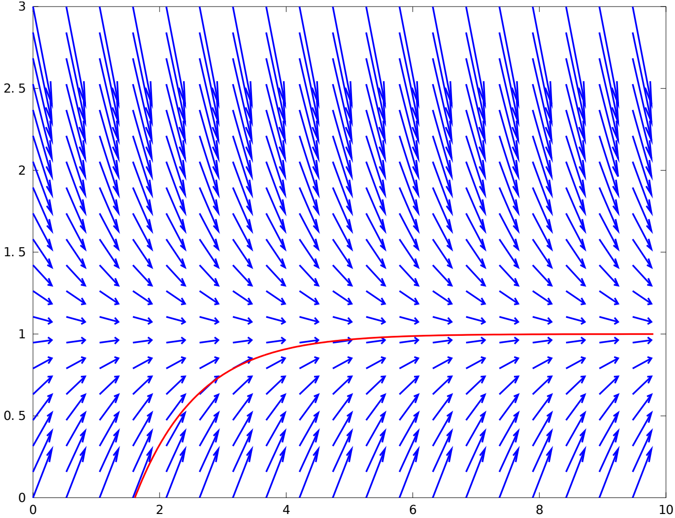
2. Numerische Lösung
   $x'(t) = f(t, x(t))$ ein Punkt in der Ebene (t, x).

   Anfangswert $t_0, x(t_0)$ bekannt, Steigung $f(t_0, x(t_0))$ bekannt

   Berechne (approximiere) $x(t_0 + h) \approx x(t_0) + f(t_0, x_0)$

   Erster Term der Taylor-Reihe (!)

Richtungsfeld und Isokline



9. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

Kapitelgliederung

9.1 Grundlagen des $\mathbb{R}^n$

Definition 9.1 (Kartesisches Produkt)

Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ beliebige Mengen. Die Menge

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$$

wird ***kartesisches Produkt*** *genannt.*
Ihre Elemente $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ heißen ***n-Tupel*** *und jeder Eintrag a_i $(i = 1, \ldots n)$* ***Komponente****.*
Zwei n-Tupel a und b sind gleich, wir schreiben $a = b$, wenn $a_i = b_i$ für alle $i = 1, \ldots n$

Definition 9.2

Die Menge $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}$ *für* $i = 1, \ldots n\}$ *heißt* n*-**dimensionaler Euklidischer Raum**. Die* n*-Tupel* $x \in \mathbb{R}^n$ *werden auch als **Vektoren** bezeichnet.*

Wir interpretieren Vektoren als Spaltenvektoren

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n)^T,$$

der hochgestellte Postfix T beschreibt, dass der Vektor transponiert wird

Definition 9.3 (Operatoren für Vektoren)

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)^T$ *Addition*
2. $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)^T$ *Skalarmultiplikation*
3. $x^T y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ *Skalarprodukt*
4. $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ *Euklidische Norm*
5. $d(x, y) = \|x - y\|$ *Abstand von* x *und* y
6. $x \leq y \Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n . x_i \leq y_i$ *kleiner gleich*
7. $x < y \Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n . x_i < y_i$ *kleiner*

Definition 9.4

Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann wird

$$\mathcal{U}_\varepsilon(x) = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\tilde{x} - x\| < \varepsilon\}$$

*eine ε-**Umgebung** von x genannt. Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ein Element $x \in \mathbb{R}^n$*

- ***innerer Punkt** vom M, wenn ein $\varepsilon > 0$ mit $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \subset M$ existiert;*
- ***Randpunkt** vom M, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ Elemente $\tilde{x}, \hat{x} \in \mathcal{U}_\varepsilon(x)$ existieren mit $\tilde{x} \in M$ und $\hat{x} \notin M$;*
- ***isolierter Punkt** von M, wenn ein $\varepsilon > 0$ mit $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap M = \{x\}$ existiert;*
- ***Häufungspunkt** von M, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Element $\tilde{x} \in \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap M$ mit $\tilde{x} \neq x$ existiert.*

Definition 9.4 (Fortsetzung)

Die Menge aller inneren Punkte von M wird mit $\overset{\circ}{M}$ oder $\mathrm{int}(M)$, die Menge aller Randpunkte mit ∂M bezeichnet.
Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ***offen****, wenn jeder Punkt von M ein innerer Punkt ist, und sie heißt* ***abgeschlossen****, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.*

Definition 9.5 (Normkonvergenz)

Eine Folge (x_k) *mit* $x_k \in \mathbb{R}^n$ *für* $k \in \mathbb{N}$ *ist* ***konvergent*** *gegen* $a \in \mathbb{R}^n$ *genau dann wenn* $\lim_{k \to \infty} \|x_k - a\| = 0$.

Satz 9.6

Im $\mathbb{R}^n$ ist Normkonvergenz gleichbedeutend mit komponentenweiser Konvergenz, also

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - \tilde{x}\| = 0 \Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n.\ \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = \tilde{x}_i\ .$$

Beweisidee

Nutzung des folgenden Lemmas:

Lemma 9.7

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm. Es gilt

$$0 \leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}\ .$$

□

9.2 Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$

Definition 9.8 (Grenzwert im $\mathbb{R}^n$)

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ *mit* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine Funktion und* a *ein Häufungspunkt von* M. *Dann heißt* $\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |f(x) - b| < \varepsilon$ *für alle* $x \in M \setminus \{a\}$ *mit* $\|x - a\| < \delta$ *der Grenzwert von* f *in* a.

Definition 9.9 (Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$)

Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ***stetig in*** *$y \in M \Leftrightarrow$ für jede Folge (x_k) mit $x_k \in \mathbb{R}^n$, die gegen y konvergiert, konvergiert $f(x_k)$ gegen $f(y)$.*
Ist f in jedem $x \in M$ stetig, so heißt f ***stetig auf*** *M.*

9.3 Partielle Ableitungen

Definition 9.10 (Partielle Ableitung)

Seien $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $e^{(k)}$ der k-te Einheitsvektor für $k = 1, \dots, n$ im $\mathbb{R}^n$ mit $e_k^{(k)} = 1$ und $e_i^{(k)} = 0$ für $i \neq k$. Der Grenzwert

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h \cdot e^{(i)}) - f(x)}{h} \\
= &\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} \\
=: &\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} =: f_{x_i}(x) =: \mathcal{D}_i f(x)
\end{aligned}$$

heißt ***partielle Ableitung (1. Ordnung) von f nach x_i an der Stelle*** *$x \in M$, sofern er existiert.*

Definition 9.10 (Fortsetzung)

Der aus den partiellen Ableitungen 1. Ordnung gebildete Vektor

$$\nabla f(x) := grad\ f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)^T$$

wird ***Gradient*** *genannt.*
Sind diese partiellen Ableitungen stetig, dann ist f in x ***stetig partiell differenzierbar*** *und wir schreiben $f \in C^1$.*

Definition 9.11 (Partielle Ableitung zweiter Ordnung)

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Wenn die n partiellen Ableitungen 1. Ordnung existieren und stetig sind, dann werden für $i, j = 1, \ldots, n$ die Ausdrücke

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j x_i} := \frac{\partial f_{x_i}(x)}{\partial x_j} := f_{x_i x_j}(x)$$

***partielle Ableitungen 2. Ordnung von f** nach x_i und x_j an der Stelle $x \in M$ genannt.*

Definition 9.11 (Fortsetzung)

Die aus den partiellen Ableitungen 2. Ordnung gebildete quadratische Matrix

$$\nabla^2 f(x) := H(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

heißt ***Hesse-Matrix****.*
Sind die partiellen Ableitungen stetig, so schreiben wir $f \in C^2$.

Satz 9.12 (Satz von Schwarz)

(Ohne Beweis)

Ist $f : M \to \mathbb{R}$ *mit* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *in* C^2, *dann* $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$ $\forall i, j = 1, \ldots, n$

9.4 Minima and Maxima

Definition 9.13

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$

a) *$x^* \in M$ heißt* ***globale Minimalstelle*** *von f, falls*
$\forall x \in M. f(x^*) \leq f(x)$.
Der Wert $f(x^*)$ wird dann ***globales Minimum*** *genannt.*

b) *$x^* \in M$ heißt* ***lokale Minimalstelle*** *von f, falls*
$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x^*) \cap M. f(x^*) \leq f(x)$.
Der Wert $f(x^*)$ wird dann ***lokales Minimum*** *genannt.*

c) *Entsprechend spricht man von* ***Maximalstellen*** *und* ***Maxima****, wenn die Ungleichungen umgekehrt werden.*

Satz 9.14 (Notwendiges Kriterium)

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ für offenes $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Ist $x^* \in M$ lokale Extremalstelle von f und ist f in x^* partiell differenzierbar, so ist $\nabla f(x^*) = (0, 0, \ldots, 0)^T$.

Beweisidee

Untersuche f an der Extremstelle unter der Annahme, dass alle bis auf eine Variable konstant sind. $\square$

Satz 9.15

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ mit offenem $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Wenn die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung existieren und stetig sind und außerdem $\nabla f(x^*) = (0, 0, \ldots, 0)^T$ für ein $x^* \in M$ gilt, dann ist x^* eine

a) *lokale Minimalstelle, wenn $x^T \cdot \nabla^2 f(x^*) x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*
b) *lokale Maximalstelle, wenn $x^T \cdot \nabla^2 f(x^*) x < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*

Ist $x^T \nabla^2 f(x^*) x$ für mindestens ein x_1 negativ und ein x_2 positiv, so liegt kein Extremum vor.

10. Abzählende Kombinatorik

Kapitelgliederung

10.1 Grundlagen

Satz 10.1 (Summen- und Produktregel)

Seien $A_1, \dots, A_n$ endliche Mengen. Dann gilt

a) $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$ *falls* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *für alle* $i \neq j$.

b) $\left|\times_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$.

Beweisidee

Teil a) trivial. Teil b) vollständige Induktion. $\square$

10.2 Prinzip des doppelten Abzählens

Satz 10.2 (Prinzip des doppelten Abzählens)

Sei $R \subseteq A \times B$ eine Relation über endliche Mengen A und B. Für $x \in A$ bezeichne $a(x)$ die Anzahl der mit x in Relation stehenden $y \in B$ und $b(y)$ die mit y in Relation stehenden $x \in A$. Dann gilt

$$\sum_{x \in A} a(x) = \sum_{y \in B} b(y)\,.$$

Beweisidee

Nutzung der charakteristischen Funktion der Relation. $\square$

10.3 Schubfachprinzip

Satz 10.3 (Schubfachprinzip; engl. pigeonhole principle)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen endlichen Mengen X und Y mit $|X| > |Y|$. Dann existiert ein $y \in Y$, so dass für $x_1, x_2 \in X$ $(x_1 \neq x_2)$ $f(x_1) = f(x_2) = y$.

Beweisidee

Annahme, dass es nur ein x für jedes y gibt wird zum Widerspruch geführt. $\square$

10.4 Auswahl von k aus n Elementen

Definition 10.4

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$ $(n \geq k)$ wird der Ausdruck

$$\binom{n}{k} := \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{(sprich: „}n\text{ über }k\text{“)}$$

als ***Binomialkoeffizient*** *bezeichnet. Für $k = 0$ wird*

$$\binom{n}{0} := 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ festgelegt. □

Satz 10.5 (Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten)

Es gilt

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

für $k, n \in \mathbb{N}_0$.

Beweisidee

Auflösen der Definition des Binomialkoeffizienten. $\square$

Satz 10.6

Die Anzahl der Möglichkeiten für die Auswahl von k Elementen aus einer n-elementigen Menge ist

$$\binom{n}{k}$$

für $k, n \in \mathbb{N}_0$.

Beweisidee

Fallunterscheidung, für $n = 0$, $k = 0$ und die restlichen Fälle. Im letzten Fall Darstellung der Anzahl als rekursive Funktion. $\square$

Satz 10.7

Die Anzahl der Möglichkeiten für die Auswahl von k Elementen einer n-elementigen Menge für $k, n \in \mathbb{N}_0$ ist:

	Anordnung im k-Tupel	*keine Anordnung*
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Beweisidee

Herleitung der unterschiedlichen Möglichkeiten des Elementauswahl. □

10.5 Prinzip der Inklusion / Exklusion

Satz 10.8

Seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Dann gilt

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \cdot \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| \,.$$

Beweisidee

Kombination aller Möglichkeiten bei denen Elemente in mehreren Mengen vorkommen. □