

2. Reelle Zahlen

Kapitelgliederung

- 2.1 Der Körper der reellen Zahlen
- 2.2 Anordnungsaxiome
- 2.3 Betrag und Dreiecksungleichungen
- 2.4 Darstellung von Zahlen im Rechner
- 2.5 Intervalle

2.1 Der Körper der reellen Zahlen

Definition 2.1 (Gruppe)

Sei G eine Menge und \circ eine Verknüpfung auf G
 (d. h. $\forall x, y \in G. x \circ y \in G$ und $x \circ y$ ist eindeutig). Das Paar (G, \circ) heißt
 eine **Gruppe**, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\forall x, y, z \in G. (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$. (Assoziativität)
2. Es gibt ein Element $n \in G$ mit der Eigenschaft
 $\forall x \in G. n \circ x = x \circ n = x$ (Existenz des **neutralen Elements**).
3. Zu jedem $x \in G$ gibt es genau ein $\bar{x} \in G$ mit der Eigenschaft
 $x \circ \bar{x} = \bar{x} \circ x = n$ (Existenz des **inversen Elements**).

Falls zusätzlich $\forall x, y \in G. x \circ y = y \circ x$ (Kommutativität) gilt, spricht
 man von einer **kommutativen** (oder **abelschen**) Gruppe.

Definition 2.2 (Körper)

Auf einer Menge G sind zwei Verknüpfungen $+$ und \cdot mit folgenden Eigenschaften gegeben:

1. $(G, +)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0
2. $(G \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 1
3. $\forall x, y, z \in G. x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
 und $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$ (Distributivgesetze)

In diesem Fall wird $(G, +, \cdot)$ ein **Körper** genannt.

2.2 Anordnungsaxiome

Definition 2.3 (Ordnung)

Sei M eine Menge und ν eine Relation auf M (d. h. eine Teilmenge von $M \times M$). Für $(x, y) \in \nu$ schreiben wir $x\nu y$. Die Relation ν heißt eine **Ordnung** und (M, ν) ist eine **geordnete Menge**, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\forall x \in M. x\nu x$ (Reflexivität)
2. $\forall x, y \in M. x\nu y \wedge y\nu x \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie)
3. $\forall x, y, z \in M. x\nu y \wedge y\nu z \Rightarrow x\nu z$ (Transitivität)

Gilt darüber hinaus

4. $\forall x, y \in M. x\nu y \vee y\nu x$,

so heißt ν eine **lineare** (oder **totale**) **Ordnung** und (M, ν) eine **linear** (oder **total**) **geordnete Menge**.

Definition 2.4 (\mathbb{R} als linear geordneter Körper)

Wir definieren eine lineare Ordnung \leq ("kleiner oder gleich") auf \mathbb{R} , sodass (\mathbb{R}, \leq) eine linear geordnete Menge mit folgenden Eigenschaften ist:

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$. falls $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
(Verträglichkeit mit der Addition)
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$. falls $x \leq y \wedge 0 \leq z \Rightarrow xz \leq yz$
(Verträglichkeit mit der Multiplikation)

Die Beziehung $x \leq y$ heißt **Ungleichung**.

Definition 2.5

Seien $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $y \geq x$ ("größer oder gleich") bedeutet $x \leq y$
2. $x < y$ ("kleiner") bedeutet $x \leq y \wedge x \neq y$
3. $x > y$ ("größer") bedeutet $x \geq y \wedge x \neq y$
4. y heißt **nichtnegativ** (bzw. positiv) wenn $0 \leq y$ (bzw. $0 < y$)
5. x heißt **nichtpositiv** (bzw. negativ) wenn $x \leq 0$ (bzw. $x < 0$).

Satz 2.6

*Für je zwei Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Beziehungen:
 $x < y$, $x = y$, $x > y$.*

Satz 2.6

*Für je zwei Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Beziehungen:
 $x < y$, $x = y$, $x > y$.*

Beweisidee

Beweis in zwei Schritten:

1. Mindestens eine der drei Beziehungen trifft zu.
2. Höchstens eine der drei Beziehungen trifft zu.



Satz 2.7

Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ (Verträglichkeit mit der Addition)
2. $a \leq b \wedge c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$
 $a < b \wedge c \leq d \Rightarrow a + c < b + d$
3. $a < b \wedge 0 < c \Rightarrow ac < bc$ (Verträglichkeit mit der Multiplikation)
4. $0 \leq a \leq b \wedge 0 \leq c \leq d \Rightarrow ac \leq bd$
 $0 \leq a < b \wedge 0 < c \leq d \Rightarrow ac < bd$
5. $a \leq b \wedge c < 0 \Rightarrow ac \geq bc$
 $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc$
6. $0 < a \Rightarrow 0 < \frac{1}{a}$
 $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
7. $0 < 1$

Beweisidee

Herleitung aus den Rechenregeln.

Zum Beispiel Beweis von 1.:

Nach Definition von $<$ gilt $a < b \Rightarrow a \leq b$.

Also folgt aufgrund der Verträglichkeit mit der Addition $a + c \leq b + c$.

Gleichheit kann nicht gelten, da aus $a + c = b + c$ auch $a = b$ folgt, was aber $a < b$ widerspricht. □

2.3 Betrag und Dreiecksungleichung

Definition 2.8 (Betrag)

Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

der **(Absolut-)Betrag** von x .

Satz 2.9

Der Absolutbetrag hat folgende Eigenschaften

1. $\forall x \in \mathbb{R}. |x| \geq 0 \wedge (|x| = 0 \Rightarrow x = 0)$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}. |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}. |x + y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung*)

Satz 2.9

Der Absolutbetrag hat folgende Eigenschaften

1. $\forall x \in \mathbb{R}. |x| \geq 0 \wedge (|x| = 0 \Rightarrow x = 0)$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}. |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}. |x + y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung*)

Beweisidee

1. folgt aus der Definition
2. mit Fallunterscheidung positiv/negativ
3. Nutzung von Satz 2.7.2.



Satz 2.10

Für $a, x, \varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ gilt:

1. $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow x < \varepsilon$ und $-\varepsilon < x \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$
2. $|x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$
3. Die Aussagen 1. und 2. gelten auch, wenn $<$ durch \leq ersetzt wird.

Satz 2.10

Für $a, x, \varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ gilt:

1. $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow x < \varepsilon$ und $-\varepsilon < x \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$
2. $|x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$
3. Die Aussagen 1. und 2. gelten auch, wenn $<$ durch \leq ersetzt wird.

Beweisidee

Nutzung der Rechenregeln.



Satz 2.11 (Bernoullische Ungleichung)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

Satz 2.11 (Bernoullische Ungleichung)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

Beweisidee

Induktion über n .



Archimedisches Axiom

Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x < n$.

Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $n \cdot x > y$ ist.

Ein Körper, in dem das archimedische Axiom gilt, heißt archimedisch geordnet.

2.4 Darstellung von Zahlen im Rechner

Definition 2.12 (Stellenwertsystem)

Seien $a_0, a_1, \dots, a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ Ziffern, dann ist $p = \sum_{i=0}^n a_i \cdot 10^i \in \mathbb{N}_0$

und es existiert eine Darstellung $b_0, b_1, \dots, b_m \in \{0, 1\}$, sodass

$$p = \sum_{i=0}^m b_i \cdot 2^i \in \mathbb{N}_0$$

- ▶ Darstellung von natürlichen/ganzen Zahlen durch Zeichenketten fester Länge
- ▶ Vorzeichenbit erlaubt die Darstellung von ganzen Zahlen
- ▶ Vorgegebene Länge definiert darstellbaren Zahlenbereich

Man unterscheidet Festkomma- und Gleitkommadarstellung

Festkommadarstellung

(feste Anzahl von Stellen vor und nach dem Komma)

- ▶ $a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+m} \in \{0, 1\}$, so dass

$$x = \sum_{i=-n}^m a_{i+n} \cdot 2^i \in \mathbb{R}$$
- ▶ eigentlich nur $x \in \mathbb{Q}$ darstellbar, da $x = \frac{\sum_{i=0}^{m+n} a_i \cdot 2^i}{2^n} \in \mathbb{Q}$
- ▶ vorgegebene Länge definiert darstellbaren Zahlenbereich
- ▶ zusätzliches Vorzeichenbit erlaubt die Darstellung negativer Zahlen

Gleitkommadarstellung

$$x = M \cdot b^E \text{ mit } b^{-1} \leq |M| < 1, E \in \mathbb{Z}$$

es gilt

$$\blacktriangleright M = \pm 0.m_1 m_2 \dots m_t = \pm \sum_{j=1}^t m_j \cdot b^{-j} \text{ und}$$

$$E = \pm e_{s-1} \dots e_1 e_0 = \pm \sum_{j=0}^{s-1} e_j \cdot b^j$$

$\blacktriangleright M$ heißt Mantisse, E heißt Exponent, b heißt Basis

Jedes darstellbare x gehört zu \mathbb{Q}

Aber nicht jedes $x \in \mathbb{Q}$ ist darstellbar

Standardisierte Darstellung der IEEE:

- ▶ Single precision $t = 24$ und $E \in [-125, 128]$
größte darstellbare Zahl $x_{\max} \approx 3.40 \cdot 10^{38}$
kleinste positive darstellbare Zahl $x_{\min} \approx 1.18 \cdot 10^{-38}$
- ▶ Double precision $t = 53$ und $E \in [-1021, 1024]$
größte darstellbare Zahl $x_{\max} \approx 1.80 \cdot 10^{308}$
kleinste positive darstellbare Zahl $x_{\min} \approx 2.23 \cdot 10^{-308}$
- ▶ Zusätzlich spezielle Symbole $\pm INF$ oder NaN
- ▶ Spezielle Software erlaubt die Nutzung frei definierbarer Darstellungen

Jede Zahl muss durch eine darstellbare Zahl dargestellt
 (bzw. approximiert) werden

- ▶ Sei $x = a \cdot 2^e$ mit $0.5 \leq a < 1$ und $x_{min} \leq x \leq x_{max}$
- ▶ Seien u, v zwei benachbarte darstellbare Zahlen mit $u \leq x \leq v$
- ▶ Sei $u = 2^e \cdot \sum_{i=1}^t b_i \cdot 2^{-i}$ (wir nehmen zur Vereinfachung an, dass $2^{-t} + \sum_{i=1}^t b_i \cdot 2^{-i}$ keinen Überlauf erzeugt),
- ▶ dann ist $v = 2^e \cdot (\sum_{i=1}^t b_i \cdot 2^{-i} + 2^{-t})$, so dass
- ▶ $u - v = 2^{e-t}$ und $|rd(x) - x| \leq \frac{1}{2}(v - u) = 2^{e-t-1}$ mit $rd(x)$ optimale Darstellung von x
- ▶ relative Fehler $\frac{|rd(x)-x|}{x} \leq \frac{2^{e-t-1}}{a \cdot 2^e} \leq 2^{-t}$
 (relative Maschinengenauigkeit ϵ_{ps})

Rundungsfehler treten bei jeder Berechnung auf

2.5 Intervalle

Definition 2.13 (Erweiterung von \mathbb{R})

$\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ heißt **erweiterte reelle Zahlengerade**

Es gilt $-\infty < \infty$ und $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$

a) Abgeschlossene Intervalle

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, dann ist $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

b) Offene Intervalle

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, dann ist $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
 (Man schreibt manchmal auch $]a, b[$ statt (a, b))

c) Halboffene Intervalle

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$:

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

d) Uneigentliche Intervalle

Sei $a \in \mathbb{R}$:

$$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

$$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

Definition 2.14 (Länge eines Intervalls)

Für ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ bezeichnet $|[a, b]| = b - a$ die **Länge des Intervalls**.

Definition kann auf offene, halboffene und uneigentliche Intervalle übertragen werden.

Einige weitere weitere Bezeichnungen:

▶ $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

▶ $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

▶ $\mathbb{R}_{\neq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

▶ $\hat{\mathbb{R}}_{>0} := \{x \in \hat{\mathbb{R}} \mid x > 0\}$

▶ $\hat{\mathbb{R}}_{\geq 0} := \{x \in \hat{\mathbb{R}} \mid x \geq 0\}$

▶ $\hat{\mathbb{R}}_{\neq 0} := \{x \in \hat{\mathbb{R}} \mid x \neq 0\}$

Intervalle definieren Mengen!

Definition 2.15 (Beschränkte Menge)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer.

A heißt **nach oben** (bzw. **nach unten**) **beschränkt**, wenn es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $x \leq K$ (bzw. $x \geq K$) für alle $x \in A$.

Man nennt K dann **obere** (bzw. **untere**) **Schranke** von A .

Die Menge A wird **beschränkte Menge** genannt, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Definition 2.16 (Supremum und Infimum)

Sei $A \subset \mathbb{R}$ nichtleer.

Eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ heißt **Supremum** (bzw. **Infimum**) von A , wenn K die kleinste obere (bzw. größte untere) Schranke von A ist.

Dabei heißt K **kleinste obere Schranke**, falls gilt

- i) K ist eine obere Schranke von A ,
- ii) für jede obere Schranke K' von A gilt $K \leq K'$

und **größte untere Schranke**, falls gilt

- i) K ist eine untere Schranke von A ,
- ii) für jede untere Schranke K' von A gilt $K \geq K'$.

Satz 2.17 (Eindeutigkeit des Supremums/Infimums)

Jede nichtleere Teilmenge A von \mathbb{R} hat höchstens ein Supremum und höchstens ein Infimum. D. h. das Supremum (bzw. Infimum) von A ist, falls vorhanden, eindeutig und wird mit $\sup(A)$ (bzw. $\inf(A)$) bezeichnet.

Satz 2.17 (Eindeutigkeit des Supremums/Infimums)

Jede nichtleere Teilmenge A von \mathbb{R} hat höchstens ein Supremum und höchstens ein Infimum. D. h. das Supremum (bzw. Infimum) von A ist, falls vorhanden, eindeutig und wird mit $\sup(A)$ (bzw. $\inf(A)$) bezeichnet.

Beweisidee

Zwei obere/untere Schranken, die nicht gleich sind, müssen in Relation $>$ stehen. □

Wir sagen: $[a, b] \subset [c, d]$, falls $c \leq a \wedge d \geq b \wedge (a \neq c \vee d \neq b)$

Wir sagen: $[a, b] \subset [c, d]$, falls $c \leq a \wedge d \geq b \wedge (a \neq c \vee d \neq b)$

Definition 2.18 (Intervallschachtelung)

Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen I_1, I_2, I_3, \dots heißt **Intervallschachtelung**, falls gilt:

- i) $I_{n+1} \subset I_n$ für $n = 1, 2, 3, \dots$
- ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein Intervall I_n mit $|I_n| \leq \varepsilon$.

Wir sagen: $[a, b] \subset [c, d]$, falls $c \leq a \wedge d \geq b \wedge (a \neq c \vee d \neq b)$

Definition 2.18 (Intervallschachtelung)

Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen I_1, I_2, I_3, \dots heißt **Intervallschachtelung**, falls gilt:

- i) $I_{n+1} \subset I_n$ für $n = 1, 2, 3, \dots$
- ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein Intervall I_n mit $|I_n| \leq \varepsilon$.

Wir fordern folgendes Axiom:

Für jede Intervallschachtelung gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$, sodass $x \in I_n$ für alle $n = 1, 2, 3, \dots$

Satz 2.19 (Existenz des Supremums/Infimums)

Jede nichtleere nach oben (bzw. unten) beschränkte Menge A besitzt ein Supremum (bzw. Infimum).

Satz 2.19 (Existenz des Supremums/Infimums)

Jede nichtleere nach oben (bzw. unten) beschränkte Menge A besitzt ein Supremum (bzw. Infimum).

Beweisidee

Konstruktion des Supremums/Infimums per Intervallschachtelung beginnen mit einer beliebigen oberen/unteren Schranke und einem Element aus der Menge. □

Satz 2.20 (Existenz von Wurzeln)

Zu jedem $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $y^k = x$, d. h. $y = x^{\frac{1}{k}}$ oder $y = \sqrt[k]{x}$ (k -te Wurzel von x).

Satz 2.20 (Existenz von Wurzeln)

Zu jedem $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $y^k = x$, d. h. $y = x^{\frac{1}{k}}$ oder $y = \sqrt[k]{x}$ (k -te Wurzel von x).

Beweisidee

Konstruktion einer Intervallschachtelung per Induktion, sodass x in allen Intervallen liegt und Nachweis, dass x die gesuchte Wurzel ist. □

Satz 2.21 (Überabzählbarkeit von \mathbb{R})

Die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} ist nicht abzählbar.

Satz 2.21 (Überabzählbarkeit von \mathbb{R})

Die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} ist nicht abzählbar.

Wenn \mathbb{R} abzählbar wäre, so könnte man eine Anordnung x_1, x_2, \dots aller reellen Zahlen finden.

Wir konstruieren eine Intervallschachtelung, deren Intervalle eine Zahl y enthalten, die nicht zur Aufzählung gehört.