

Abzählbare Kombinatorik

7. Juli 2014

Satz 10.1

Seien A_1, \dots, A_n endliche Mengen. Dann gilt

$$\text{a) } \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| \text{ falls } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ f\"ur alle } i \neq j.$$

$$\text{b) } \left| \prod_{i=1}^n A_i \right| = \prod_{i=1}^n |A_i|.$$

Satz 10.2 (Prinzip des doppelten Abzählens)

Sei $R \subseteq A \times B$ eine Relation über endliche Mengen A und B . Für $x \in A$ bezeichne $a(x)$ die Anzahl der mit x in Relation stehenden $y \in B$ und $b(y)$ die mit y in Relation stehenden $x \in A$. Dann gilt

$$\sum_{x \in A} a(x) = \sum_{y \in B} b(y).$$

Satz 10.3 (Schubfachprinzip)

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen endlichen Mengen X und Y mit $|X| > |Y|$. Dann existiert ein $y \in Y$ mit $|f^{-1}(y)| \geq 2$.

Definition 10.4

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$ wird der Ausdruck

$$\binom{n}{k} := \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{k} \quad (\text{sprich: „}n \text{ über } k\text{“})$$

als *Binomialkoeffizient* bezeichnet. Für $k = 0$ wird

$$\binom{n}{0} := 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ festgelegt.

Satz 10.5 (Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten)

Es gilt $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ für $k, n \in \mathbb{N}_0$.

Satz 10.6

Die Anzahl der Möglichkeiten für die Auswahl von k Elementen aus einer n -elementigen Menge ist

$$\binom{n}{k}$$

für $k, n \in \mathbb{N}_0$.

Satz 10.7

Die Anzahl der Möglichkeiten für die Auswahl von k Elementen einer n -elementigen Menge für $k, n \in \mathbb{N}_0$ ist:

| | Anordnung im k -Tupel | keine Anordnung |
|------------------|-------------------------|--------------------|
| mit Zurücklegen | n^k | $\binom{n+k-1}{k}$ |
| ohne Zurücklegen | $\frac{n!}{(n-k)!}$ | $\binom{n}{k}$ |

Satz 10.8

Seien A_1, \dots, A_n endliche Mengen. Dann gilt

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|.$$