

# Abzählbare Kombinatorik

7. Juli 2014

## Satz 10.1

Seien  $A_1, \dots, A_n$  endliche Mengen. Dann gilt

$$\text{a) } \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| \text{ falls } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ f\"ur alle } i \neq j.$$

$$\text{b) } \left| \prod_{i=1}^n A_i \right| = \prod_{i=1}^n |A_i|.$$

## Satz 10.2 (Prinzip des doppelten Abzählens)

Sei  $R \subseteq A \times B$  eine Relation über endliche Mengen  $A$  und  $B$ . Für  $x \in A$  bezeichne  $a(x)$  die Anzahl der mit  $x$  in Relation stehenden  $y \in B$  und  $b(y)$  die mit  $y$  in Relation stehenden  $x \in A$ . Dann gilt

$$\sum_{x \in A} a(x) = \sum_{y \in B} b(y).$$

## Satz 10.3 (Schubfachprinzip)

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen endlichen Mengen  $X$  und  $Y$  mit  $|X| > |Y|$ . Dann existiert ein  $y \in Y$  mit  $|f^{-1}(y)| \geq 2$ .

## Definition 10.4

Für  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $k \in \mathbb{N}$  wird der Ausdruck

$$\binom{n}{k} := \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{k} \quad (\text{sprich: „}n \text{ über } k\text{“})$$

als *Binomialkoeffizient* bezeichnet. Für  $k = 0$  wird

$$\binom{n}{0} := 1$$

für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  festgelegt.

## Satz 10.5 (Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten)

Es gilt  $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$  für  $k, n \in \mathbb{N}_0$ .

## Satz 10.6

Die Anzahl der Möglichkeiten für die Auswahl von  $k$  Elementen aus einer  $n$ -elementigen Menge ist

$$\binom{n}{k}$$

für  $k, n \in \mathbb{N}_0$ .

## Satz 10.7

Die Anzahl der Möglichkeiten für die Auswahl von  $k$  Elementen einer  $n$ -elementigen Menge für  $k, n \in \mathbb{N}_0$  ist:

	Anordnung im $k$ -Tupel	keine Anordnung
mit Zurücklegen	$n^k$	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

## Satz 10.8

Seien  $A_1, \dots, A_n$  endliche Mengen. Dann gilt

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|.$$