Integralrechnung

16. Juli 2014

Definition 8.1

Gegeben seien ein Intervall $[a, b] \in \mathbb{R}$ und eine endliche Anzahl von Punkten $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.
Dann heißt $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ eine *Zerlegung* von $[a, b]$ und $|Z| := \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \ldots, n\}$ das *Feinheitsmaß* der Zerlegung Z.
Eine Zerlegung heißt *äquidistant*, wenn die Intervalle $[\, x_{i-1}, x_i \,]$ für $i = 1, \ldots, n$ alle gleich groß sind.

Definiton 8.2

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt $(\forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq K < \infty)$ und Z eine Zerlegung auf $[a, b]$. Wir nennen

$$s(Z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \text{ die } \textit{Untersumme}$$

und

$$S(Z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \text{ die } \textit{Obersumme}$$

von f bezüglich der Zerlegung Z.

Definition 8.3

Eine Zerlegung $\tilde{Z}$ wird eine *Verfeinerung* von Zerlegung Z genannt (in Zeichen: $Z \leq \tilde{Z}$), wenn $\tilde{Z}$ alle Punkte von Z enthält. Eine Zerlegung $\hat{Z}$, die genau die Punkte von Z und $\tilde{Z}$ enthält, soll *Überlagerung* von Z und $\tilde{Z}$ heißen und mit $\hat{Z} = Z + \tilde{Z}$ bezeichnet werden.

Lemma 8.4

Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ beschränkt mit $|f(x)| \leq K$ und Z eine Zerlegung von $[a, b]$. Die Zerlegung $\tilde{Z}$ entstehe aus Z durch Hinzunahme eines zusätzlichen Punktes. Dann gilt:

1. $s(Z) \leq s(\tilde{Z}) \leq s(Z) + 2K|Z|$
2. $S(Z) \geq S(\tilde{Z}) \geq S(Z) - 2K|Z|$

Das bestimmte Riemann-Integral

Satz 8.5

Jede Untersumme ist kleiner oder gleich jeder Obersumme.

Das bestimmte Riemann-Integral

Definition 8.6

Die Funktion $f(x)$ sei auf $[a, b]$ beschränkt. Man nennt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{s(Z) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } [a, b]\}$$

das *untere (Riemann-)Integral* und

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\{S(Z) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } [a, b]\}$$

das *obere (Riemann-)Integral*.

(Fortsetzung der Definition auf nächster Folie)

Definition 8.6 (Fortsetzung)

Sind unteres und oberes Riemann-Integral gleich, dann heißt $f(x)$ über [a,b] *(Riemann-) integrierbar* und

$$\int_a^b f(x)dx := \sup_Z s(Z) = \inf_Z S(Z)$$

das *(Riemann-)Integral* von f über $[a, b]$. Man nennt a (bzw. b) die *untere* (bzw. *obere*) *Integrationsgrenze* und x die *Integrationsvariable*.

Das bestimmte Riemann-Integral

Satz 8.7

Es gilt $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Satz 8.8

Sei f auf $[a, b]$ beschränkt und Z_n eine Folge von Zerlegungen mit $|Z_n| \to 0$ für $n \to \infty$. Dann gilt

a) $\lim\limits_{n\to\infty} s(Z_n) = \sup\limits_{Z} s(Z)$ und

b) $\lim\limits_{n\to\infty} S(Z_n) = \inf\limits_{Z} S(Z)$

Satz 8.9 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)

Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ beschränkt.

$$f(x) \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists Z(\varepsilon) : S(Z) - s(Z) < \varepsilon$$

Das bestimmte Riemann-Integral

Satz 8.10

a) $f(x)$ stetig auf $[a, b] \Rightarrow f(x) \in R[a, b]$.

b) $f(x)$ auf $[a, b]$ monoton $\Rightarrow f(x) \in R[a, b]$.

Definition 8.11

Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ beschränkt, $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $\tilde{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ für $i = 1, \ldots, n$. Man nennt

$$\sigma(Z, \tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\tilde{x}_i)$$

die *(Riemannsche) Zwischensumme* von f auf $[a, b]$.

Lemma 8.12

Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ beschränkt. Für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es Zwischenpunkte $\tilde{x}$ und $\hat{x}$ mit

a) $s(Z) \leq \sigma(Z, \tilde{x}) \leq s(Z) + \varepsilon$ und

b) $S(Z) - \varepsilon \leq \sigma(Z, \hat{x}) \leq S(Z)$

Satz 8.13

Sei f auf $[a, b]$ beschränkt, Z_n eine Folge von Zerlegungen mit $|Z_n| \to 0$ für $n \to \infty$ mit passenden Zwischenpunkten $\tilde{x}^{(n)}$. Es gilt $f \in R[a, b] \Leftrightarrow$ Jede Riemansche Zwischensumme konvergiert. In diesem Fall sind alle Grenzwerte gleich und sie haben den Wert

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)}) = \int\limits_a^b f(x)dx =: I$$

Satz 8.14

Sind f und g auf [a,b] integrierbar, so ist für beliebige Konstanten α und β auch dir Funktion $\alpha f + \beta g$ auf [a, b] integrierbar und es ist

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Satz 8.15

Seien $f(x)$ und $g(x)$ integrierbar auf $[a, b]$. Dann gilt:

a) $\max\{f(x), g(x)\}, \min\{f(x), g(x)\}$ sowie $|f(x)| \in R[a, b]$.

b) Falls $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

c) $$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Satz 8.16 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f \in R[a, b]$ und $m \leq f(x) \leq M$ für $x \in [a, b]$. Dann ist

a) $m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M \cdot (b - a)$.

b) Ist $f(x)$ auf $[a, b]$ zudem stetig, dann existiert ein $\tilde{x} \in (a, b)$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b - a)f(\tilde{x}).$$

Satz 8.17 (Erweiterter Mittelwertsatz)

Sei $p(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$ und $p(x)$ sowie $f(x) \cdot p(x)$ integrierbar auf $[a, b]$. Wenn $m \leq f(x) \leq M$ auf $[a, b]$, dann

$$m \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b p(x) f(x)\,\mathrm{d}x \leq M \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$$

Satz 8.18

Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ beschränkt und $a < c < b$. Es gilt:
$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f \in R[a, c]$ und $f(x) \in R[c, b]$. In diesem Fall ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definition 8.19

Für $a < b$ und $f \in R[a, b]$ wird $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ sowie $\int\limits_c^c f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für $c \in [a, b]$ festgelegt.

Satz 8.20

Sei $f \in R[a,b]$ und $[c,d] \subseteq [a,b]$.

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = F(d) - F(c)$$

.

Der Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung

Satz 8.21

Sei $f \in R[a, b]$ und in $\tilde{x} \in [a, b]$ stetig. Dann ist für ein $c \in [a, b]$ die Funktion $F(x) = \int\limits_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ in $\tilde{x}$ differenzierbar und $F'(\tilde{x}) = f(\tilde{x})$. Ist also f stetig auf $[a, b]$, so ist F stetig differenzierbar und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$

Der Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung

Definition 8.22

Sei die Funktion $f(x)$ in $[a, b]$ erklärt. Eine Funktion $F(x)$ mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x)$ auf $[a, b]$ soll *Stammfunktion* oder *unbestimmtes Integral* von $f(x)$ heißen. Wir schreiben dafür

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

.

Der Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung

Satz 8.23

Ist $F(x)$ auf $[a, b]$ stetig differenzierbar, so gilt

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,\mathrm{d}t,$$

und für $x, c \in [a, b]$ entsprechend

$$F(x) = F(c) + \int_c^x F'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Definition 8.24 (Notation)

$$F(x)\Big|_a^b := \Big[F(x)\Big]_a^b := F(b) - F(a).$$

Satz 8.25 (Partielle Integration)

Seien $f(x)$ und $g(x)$ auf $[a, b]$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_b^a f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Satz 8.26 (Substitutionsregel)

Sei f stetig auf $\langle a, b\rangle$ und g stetig differenzierbar auf $\langle \alpha, \beta\rangle$, wobei

- $g(\langle \alpha, \beta\rangle) \subseteq \langle a, b\rangle$ und
- $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$.

Dann ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Satz 8.27

1. $$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{a}F(ax+b) \text{ für } F'(x)=f(x).$$
2. $$\int f(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}f^2(x).$$
3. $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x \;=\; \log|f(x)|.$$

Satz 8.28

Jede rationale Funktion ist elementar integrierbar.

Definition 8.29 (unbeschränkter Integrationsbereich)

Sei f auf $[a, \infty)$ erklärt und über jedes $[a, c]$ für $a < c < \infty$ integrierbar. Man legt fest :

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Wenn der Limes existiert, dann existiert das uneigentliche Integral und es wird *konvergent* genannt (andernfalls *divergent*).

Entsprechend definieren wir für ein Intervall $(-\infty, a]$
$\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x$
und für ganz $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$
$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$
für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$, wobei beide Integrale auf der rechten Seite existieren müssen.

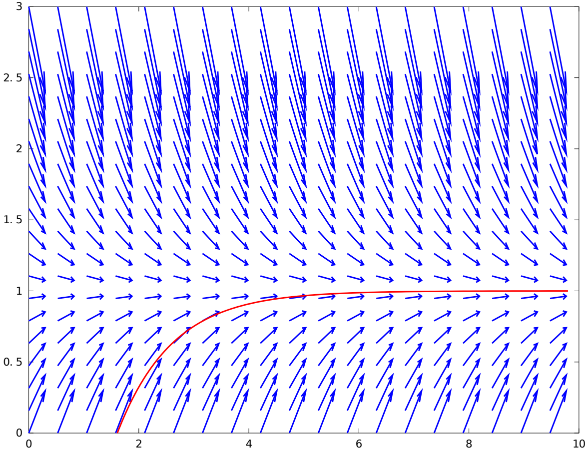
Definition 8.30

1. Sei $f \in R[c, b]$ für jedes c mit $a < c < b$ und $\lim_{x \to a^+} |f(x)| = \infty$. Man definiert $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim\limits_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, falls der Limes existiert.
2. Sei $f \in R[a, c]$ für jedes c mit $a < c < b$ und $\lim_{x \to b^-} |f(x)| = \infty$. Man definiert $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim\limits_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, falls der Limes existiert.
3. Sei $f \in R[c, d]$ für alle c, d mit $a < c < d < b$ und $\lim_{x \to a^+} |f(x)| = \infty$ sowie $\lim_{x \to b^-} |f(x)| = \infty$. Man definiert unter Rückführung auf die Fälle 1.) und 2.) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $(a < c < b)$ falls beide uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite existieren.

Definition 8.31

Eine Gleichung der Form $f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots) = 0$ heißt *gewöhnliche Differentialgleichung* (DGL). Die Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung heißt die *Ordnung der DGL*.

Richtungsfeld mit Isokline zu Beispiel 8.16



Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

16. Juli 2014

Definition 9.1

Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ beliebige Mengen.
Die Menge $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n =$

$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$$

wird *kartesisches Produkt* genannt.

Ihre Elemente $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ heißen *n-Tupel* und jeder Eintrag a_i, $(i = 1, \ldots n)$ *Komponente*.

Zwei n-Tupel a und $\tilde{a}$ sind gleich, also $a = \tilde{a}$, wenn $a_i = \tilde{a}_i$ für alle $i = 1, \ldots n$

Definition 9.2

Die Menge $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \ldots n\}$ heißt *n-dimensionaler Euklidischer Raum*. Die n-Tupel $x \in \mathbb{R}^n$ werden auch als *Vektoren* bezeichnet.

Anmerkung:
Typischerweise werden Vektoren als Spaltenvektoren aufgefasst. Also $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, wobei das hochgestellte T kennzeichnet, dass der Zeilenvektor transponiert und damit ein Spaltenvektor ist.

Definition 9.3

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)^T$ Addition
2. $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)^T$ Skalarmultiplikation
3. $x^T y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ Skalarprodukt
4. $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ Euklidische Norm
5. $d(x, y) = \|x - y\|$ Abstand von x und y
6. $x \leq y \Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n : x_i \leq y_i$ kleiner gleich
7. $x < y \Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n : x_i < y_i$ kleiner

Definition 9.4

Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann wird $\mathcal{U}_\varepsilon(x) = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\tilde{x} - x\| < \varepsilon\}$ eine ε-*Umgebung* von x genannt. Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ein Element $x \in \mathbb{R}^n$

- *innerer Punkt* von M, wenn ein $\varepsilon > 0$ mit $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \subset M$ existiert;
- *Randpunkt* von M, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ Elemente $\tilde{x}, \hat{x} \in \mathcal{U}_\varepsilon(x)$ existieren mit $\tilde{x} \in M$ und $\hat{x} \notin M$;
- *isolierter Punkt* von M, wenn ein $\varepsilon > 0$ mit $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap M = \{x\}$ existiert;
- *Häufungspunkt* von M, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Element $\tilde{x} \in \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap M$ mit $\tilde{x} \neq x$ existiert.

Die Menge aller inneren Punkte von M wird mit $\overset{\circ}{M}$ oder $int(M)$, die Menge aller Randpunkte mit ∂M bezeichnet.

(Fortsetzung auf nächster Folie)

Definition 9.4 (Fortsetzung)

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *offen*,
wenn jeder Punkt von M ein innerer Punkt ist,
und sie heißt *abgeschlossen*,
wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

Definition 9.5 (Normkonvergenz)

Eine Folge (x_k) mit $x_k \in \mathbb{R}^n$ für $k \geq 0$ *konvergiert* gegen $a \in \mathbb{R}^n$, wenn $\|x_k - a\| \to 0$ für $k \to \infty$.

Satz 9.6

Im $\mathbb{R}^n$ ist Normkonvergenz gleichbedeutend mit komponentenweiser Konvergenz, also

$$\|x^{(k)} - \tilde{x}\| \to 0 \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n : x_i^{(k)} \to \tilde{x}_i$$

für $k \to \infty$.

Lemma 9.7

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm. Es gilt

$$0 \leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \;\leq\; \|x\| \;\leq\; \sqrt{n} \cdot \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \; .$$

Definition 9.8

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von M. Dann bedeutet

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \;\Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in M \setminus \{a\} : \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon.$$

Definition 9.9

Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *stetig in* $\tilde{x} \in M$ $\Leftrightarrow$
Für jede Folge (x_k) mit $x_k \in \mathbb{R}^n$, die gegen $\tilde{x}$ strebt, konvergiert $f(x_k)$ gegen $f(\tilde{x})$.

Ist f in jedem $x \in M$ stetig, so heißt f *stetig auf* M.

Definition 9.10

Seien $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $e^{(k)}$ der k-te Einheitsvektor für $k = 1, \dots, n$ im $\mathbb{R}^n$ mit $e_k^{(k)} = 1$ und $e_i^{(k)} = 0$ für $i \neq k$. Der Limes

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h \cdot e^{(i)}) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

$$=: \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} =: f_{x_i}(x) =: \mathcal{D}_i f(x)$$

heißt *partielle Ableitung (1. Ordnung) von f nach x_i an der Stelle $x \in M$*, sofern er existiert.

(Fortsetzung auf nächster Folie)

Partielle Ableitungen

Definition 9.10 (Fortsetzung)

Der aus den partiellen Ableitungen 1. Ordnung gebildete Vektor

$$\nabla f(x) := \mathrm{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right)^T$$

wird *Gradient* genannt. Sind diese partiellen Ableitungen stetig, dann ist f in x *stetig partiell differenzierbar* und wir schreiben in diesem Fall $f \in C^1$.

Definition 9.11

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Wenn die n partiellen Ableitungen 1. Ordnung existieren und stetig sind, dann werden für
$i, j = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j x_i} := \frac{\partial f_{x_i}(x)}{\partial x_j} := f_{x_i x_j}(x)$$

partielle Ableitungen 2. Ordnung von f nach x_i und x_j an der Stelle $x \in M$ genannt.

(Fortsetzung auf nächster Folie)

Definition 9.11 (Fortsetzung)

Die aus den partiellen Ableitungen 2. Ordnung gebildete quadratische Matrix

$$\nabla^2 f(x) := H(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

heißt *Hesse-Matrix*. Sind die partiellen Ableitungen allesamt stetig, so schreiben wir $f \in C^2$.

Satz 9.12 (Satz von Schwarz)

Ist $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ in C^2, dann $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$ $\forall i, j = 1, \ldots, n$.

Definition 9.13

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$

a) $x^* \in M$ heißt *globale Minimalstelle* von f, falls

$$\forall x \in M : f(x^*) \leq f(x).$$

Der Wert $f(x^*)$ wird dann *globales Minimum* genannt.

b) $x^* \in M$ heißt *lokale Minimalstelle* von f, falls

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x^*) \cap M : f(x^*) \leq f(x).$$

Der Wert $f(x^*)$ wird dann *lokales Minimum* genannt.

c) Entsprechend spricht man von *Maximalstellen* und *Maxima*, wenn die Ungleichungen umgekehrt werden.

Satz 9.14 (notwendiges Kriterium)

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ für offenes $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

Ist $x^* \in M$ lokale Extremalstelle von f und ist f in x^* partiell differenzierbar, so ist $\nabla f(x^*) = (0, 0, \ldots, 0)^T$.

Satz 9.15

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ mit offenem $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Wenn die partiellen Ableitungen 2. Ordnung existieren und stetig sind und außerdem $\nabla f(x^*) = (0, 0, \ldots, 0)^T$ für ein $x^* \in M$ gilt, dann ist x^* eine

a) lokale Minimalstelle, wenn $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $x^T \nabla^2 f(x^*)\, x > 0$

b) lokale Maximalstelle, wenn $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $x^T \nabla^2 f(x^*)\, x < 0$.

Ist $x^T \nabla^2 f(x^*)\, x$ für mindestens ein x negativ und ein x positiv, so liegt kein Extremum vor.