Abzählbare Kombinatorik

8. Juli 2013

Satz 10.1

Seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Dann gilt

a) $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$ falls $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$.

b) $\left|\bigtimes_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$.

Satz 10.2 (Prinzip des doppelten Abzählens)

Sei $R \subseteq A \times B$ eine Relation über endliche Mengen A und B. Für $x \in A$ bezeichne $a(x)$ die Anzahl der mit x in Relation stehenden $y \in B$ und $b(y)$ die mit y in Relation stehenden $x \in A$. Dann gilt

$$\sum_{x \in A} a(x) \;=\; \sum_{y \in B} b(y)\,.$$

Satz 10.3 (Schubfachprinzip)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen endlichen Mengen X und Y mit $|X| > |Y|$. Dann existiert ein $y \in Y$ mit $|f^{-1}(y)| \geqslant 2$.

Auswahl von k aus n Elementen

Definition 10.4

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$ wird der Ausdruck

$$\binom{n}{k} :=; \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} \quad \text{(sprich: „}n\text{ über }k\text{“)}$$

als *Binomialkoeffizient* bezeichnet. Für $k = 0$ wird

$$\binom{n}{0} := 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ festgelegt.

Satz 10.5 (Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten)

Es gilt $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ für $k, n \in \mathbb{N}_0$.

Auswahl von k aus n Elementen

Satz 10.6

Die Anzahl der Möglichkeiten für die Auswahl von k Elementen aus einer n-elementigen Menge ist

$$\binom{n}{k}$$

für $k, n \in \mathbb{N}_0$.

Auswahl von k aus n Elementen

Satz 10.7

Die Anzahl der Möglichkeiten für die Auswahl von k Elementen einer n-elementigen Menge für $k, n \in \mathbb{N}_0$ ist:

	Anordnung im k-Tupel	keine Anordnung
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Satz 10.8

Seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Dann gilt

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right| .$$