Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

28. Juni 2013

Definition 9.1

Seien $A_1, A_2, \dots, A_n$ beliebige Mengen. Die Menge $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$ wird *kartesisches Produkt* genannt. Ihre Elemente $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ heißen *n-Tupel* und jeder Eintrag a_i, $(i = 1, \dots n)$ *Komponente*. Zwei n-Tupel a und $\tilde{a}$ sind gleich, also $a = \tilde{a}$ wenn $a_i = \tilde{a}_i$ für alle $i = 1, \dots n$

Definition 9.2

Die Menge $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \ldots n\}$ heißt *n-dimensionaler Euklidischer Raum*. Die n-Tupel $x \in \mathbb{R}^n$ werden auch als *Vektoren* bezeichnet.

Anmerkung:
Typischerweise werden Vektoren als Spaltenvektoren aufgefasst.

Also $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, wobei das hochgestellte T kennzeichnet, dass der Zeilenvektor transponiert und damit ein Spaltenvektor ist.

Definition 9.3

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)^T$ Addition
2. $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)^T$ Skalarmultiplikation
3. $x^T y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ Skalarprodukt
4. $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ Euklidische Norm
5. $d(x, y) = \|x - y\|$ Abstand von x und y
6. $x \leq y \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n : x_i \leq y_i$ kleiner gleich
7. $x < y \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n : x_i < y_i$ kleiner

Definition 9.4

Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann wird $\mathcal{U}_\varepsilon(x) = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\tilde{x} - x\| < \varepsilon\}$ eine *ε-Umgebung* von x genannt. Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ein Element $x \in \mathbb{R}^n$

- *innerer Punkt* von M, wenn ein $\varepsilon > 0$ mit $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \subset M$ existiert;
- *Randpunkt* von M, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ Elemente $\tilde{x}, \hat{x} \in \mathcal{U}_\varepsilon(x)$ existieren mit $\tilde{x} \in M$ und $\hat{x} \notin M$;
- *isolierter Punkt* von M, wenn ein $\varepsilon > 0$ mit $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap M = \{x\}$ existiert;
- *Häufungspunkt* von M, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Element $\tilde{x} \in \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap M$ mit $\tilde{x} \neq x$ existiert.

Die Menge aller inneren Punkte von M wird mit $\overset{\circ}{M}$ oder $int(M)$, die Menge aller Randpunkte mit ∂M bezeichnet. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *offen*, wenn jeder Punkt von M ein innerer Punkt ist, und sie heißt *abgeschlossen*, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

Definition 9.5 (Normkonvergenz)

Eine Folge (x_k) mit $x_k \in \mathbb{R}^n$ für $k \geq 0$ *konvergiert* gegen $a \in \mathbb{R}^n$, wenn $\|x_k - a\| \to 0$ für $k \to \infty$.

Satz 9.6

Im $\mathbb{R}^n$ ist Normkonvergenz gleichbedeutend mit komponentenweiser Konvergenz, also

$$\|x^{(k)} - \tilde{x}\| \to 0 \Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n : x_i^{(k)} \to \tilde{x}_i$$

für $k \to \infty$.

Lemma 9.7

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm. Es gilt

$$0 \leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \; \leq \; \|x\| \; \leq \; \sqrt{n} \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \; .$$

Definition 9.8

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Funktion und a ein Häufungspunkt von M. Dann bedeutet

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \;\Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in M \setminus \{a\} : \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon.$$

Definition 9.9

Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *stetig in* $\tilde{x} \in M \Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_k) mit $x_k \in \mathbb{R}^n$, die gegen $\tilde{x}$ strebt, konvergiert $f(x_k)$ gegen $f(\tilde{x})$. Ist f in jedem $x \in M$ stetig, so heißt f *stetig auf* M.

Definition 9.10

Seien $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $e^{(k)}$ der k-te Einheitsvektor für $k = 1, \dots, n$ im $\mathbb{R}^n$ mit $e_k^{(k)} = 1$ und $e_i^{(k)} = 0$ für $i \neq k$. Der Limes

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h \cdot e^{(i)}) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

$$=: \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} =: f_{x_i}(x) =: \mathcal{D}_i f(x)$$

heißt *partielle Ableitung (1. Ordnung) von f nach x_i an der Stelle* $x \in M$, sofern er existiert.

(Fortsetzung auf nächster Folie)

Definition 9.10 (Fortsetzung)

Der aus den partiellen Ableitungen 1. Ordnung gebildete Vektor

$$\nabla f(x) := \operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right)^T$$

wird *Gradient* genannt. Sind diese partiellen Ableitungen stetig, dann ist f in x *stetig partiell differenzierbar* und wir schreiben in diesem Fall $f \in C^1$.

Definition 9.11

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Wenn die n partiellen Ableitungen 1. Ordnung existieren und stetig sind, dann werden für $i, j = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j x_i} := \frac{\partial f_{x_i}(x)}{\partial x_j} := f_{x_i x_j}(x)$$

partielle Ableitungen 2. Ordnung von f nach x_i und x_j an der Stelle $x \in M$ genannt.

(Fortsetzung auf nächster Folie)

Definition 9.11 (Fortsetzung)

Die aus den partiellen Ableitungen 2. Ordnung gebildete quadratische Matrix

$$\nabla^2 f(x) := H(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

heißt *Hesse-Matrix*. Sind die partiellen Ableitungen allesamt stetig, so schreiben wir $f \in C^2$.

Satz 9.12 (Satz von Schwarz)

Ist $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ in C^2, dann $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$ $\forall i, j = 1, \ldots, n$.

Minima und Maxima

Definition 9.13

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$

a) $x^* \in M$ heißt *globale Minimalstelle* von f, falls

$$\forall x \in M : f(x^*) \leq f(x).$$

Der Wert $f(x^*)$ wird dann *globales Minimum* genannt.

b) $x^* \in M$ heißt *lokale Minimalstelle* von f, falls

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x^*) \cap M : f(x^*) \leq f(x).$$

Der Wert $f(x^*)$ wird dann *lokales Minimum* genannt.

c) Entsprechend spricht man von *Maximalstellen* und *Maxima*, wenn die Ungleichungen umgekehrt werden.

Satz 9.14 (notwendiges Kriterium)

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ für offenes $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

Ist $x^* \in M$ lokale Extremalstelle von f und ist f in x^* partiell differenzierbar, so ist $\nabla f(x^*) = (0, 0, \ldots, 0)^T$.

Satz 9.15

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ mit offenem $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Wenn die partiellen Ableitungen 2. Ordnung existieren und stetig sind und außerdem $\nabla f(x^*) = (0, 0, \ldots, 0)^T$ für ein $x^* \in M$ gilt, dann ist x^* eine

a) lokale Minimalstelle, wenn $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $x^T \nabla^2 f(x^*)\, x > 0$

b) lokale Maximalstelle, wenn $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $x^T \nabla^2 f(x^*)\, x < 0$.

Ist $x^T \nabla^2 f(x^*)\, x$ für mindestens ein x negativ und ein x positiv, so liegt kein Extremum vor.