

Integralrechnung

26. Juni 2013

Definition 8.1

Gegeben seien ein Intervall $[a, b] \in \mathbb{R}$ und eine endliche Anzahl von Punkten x_0, x_1, \dots, x_n mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Dann heißt $Z = (x_0, \dots, x_n)$ eine *Zerlegung* von $[a, b]$ und $|Z| := \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, n\}$ das *Feinheitsmaß* der Zerlegung Z .

Eine Zerlegung heißt *äquidistant*, wenn die Intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ für $i = 1, \dots, n$ alle gleich groß sind.

Definiton 8.2

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt ($\forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq K < \infty$) und Z eine Zerlegung auf $[a, b]$. Wir nennen

$s(Z) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ die *Untersumme*

und

$S(Z) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ die *Obersumme*

von f bezüglich der Zerlegung Z .

Definition 8.3

Eine Zerlegung \tilde{Z} wird eine *Verfeinerung* von Zerlegung Z genannt (in Zeichen: $Z \leq \tilde{Z}$), wenn \tilde{Z} alle Punkte von Z enthält.

Eine Zerlegung \hat{Z} , die genau die Punkte von Z und \tilde{Z} enthält, soll *Überlagerung* von Z und \tilde{Z} heißen und mit $\hat{Z} = Z + \tilde{Z}$ bezeichnet werden.

Lemma 8.4

Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ beschränkt mit $|f(x)| \leq K$ und Z eine Zerlegung von $[a, b]$. Die Zerlegung \tilde{Z} entstehe aus Z durch Hinzunahme eines zusätzlichen Punktes. Dann gilt:

- 1 $s(Z) \leq s(\tilde{Z}) \leq s(Z) + 2K|Z|$
- 2 $S(Z) \geq S(\tilde{Z}) \geq S(Z) - 2K|Z|$

Satz 8.5

Jede Untersumme ist kleiner oder gleich jeder Obersumme.

Definition 8.6

Die Funktion $f(x)$ sei auf $[a, b]$ beschränkt. Man nennt

$$\int_{-a}^b f(x) dx := \sup\{s(Z) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } [a, b]\}$$

das *untere (Riemann-)Integral* und

$$\int_a^b f(x) dx := \inf\{S(Z) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } [a, b]\}$$

das *obere (Riemann-)Integral*.

(Fortsetzung der Definition auf nächster Folie)

Definition 8.6 (Fortsetzung)

Sind unteres und oberes Riemann-Integral gleich, dann heißt $f(x)$ über $[a,b]$ *(Riemann-) integrierbar* und

$$\int_a^b f(x)dx := \sup_Z s(Z) = \inf_Z S(Z)$$

das *(Riemann-)Integral* von f über $[a,b]$. Man nennt a (bzw. b) die *untere* (bzw. *obere*) *Integrationsgrenze* und x die *Integrationsvariable*.

Satz 8.7

Es gilt $\int_{-a}^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$.

Satz 8.8

Sei f auf $[a, b]$ beschränkt und Z_n eine Folge von Zerlegungen mit $|Z_n| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Dann gilt

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} s(Z_n) = \sup_Z s(Z)$ und
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} S(Z_n) = \inf_Z S(Z)$

Satz 8.9 (Riemannsches Integritätskriterium)

Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ beschränkt.

$$f(x) \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists Z(\varepsilon) : S(Z) - s(Z) < \varepsilon$$

Satz 8.10

- a) $f(x)$ stetig auf $[a, b] \Rightarrow f(x) \in R[a, b]$.
- b) $f(x)$ auf $[a, b]$ monoton $\Rightarrow f(x) \in R[a, b]$.

Definition 8.11

Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ beschränkt, $Z = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $\tilde{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ für $i = 1, \dots, n$. Man nennt

$$\sigma(Z, \tilde{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\tilde{x}_i)$$

die (*Riemannsches*) *Zwischensumme* von f auf $[a, b]$.

Lemma 8.12

Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ beschränkt. Für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es Zwischenpunkte \tilde{x} und \hat{x} mit

a) $s(Z) \leq \sigma(Z, \tilde{x}) \leq s(Z) + \varepsilon$ und

b) $S(Z) - \varepsilon \leq \sigma(Z, \hat{x}) \leq S(Z)$

Satz 8.13

Sei f auf $[a, b]$ beschränkt, Z_n eine Folge von Zerlegungen mit $|Z_n| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ mit passenden Zwischenpunkten $\tilde{x}^{(n)}$. Es gilt $f \in R[a, b] \Leftrightarrow$ Jede Riemansche Zwischensumme konvergiert. In diesem Fall sind alle Grenzwerte gleich und sie haben den Wert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(Z_n, \tilde{x}^{(n)}) = \int_a^b f(x) dx =: I$$

Satz 8.14

Sind f und g auf $[a, b]$ integrierbar, so ist für beliebige Konstanten α und β auch die Funktion $\alpha f + \beta g$ auf $[a, b]$ integrierbar und es ist

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Satz 8.15

Seien $f(x)$ und $g(x)$ integrierbar auf $[a, b]$. Dann gilt:

a) $\max\{f(x), g(x)\}$, $\min\{f(x), g(x)\}$ sowie $|f(x)| \in R[a, b]$.

b) Falls $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

c) $\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$

Satz 8.16 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f \in R[a, b]$ und $m \leq f(x) \leq M$ für $x \in [a, b]$. Dann ist

a) $m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M \cdot (b - a).$

b) Ist $f(x)$ auf $[a, b]$ zudem stetig, dann existiert ein $\tilde{x} \in (a, b)$ mit

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b - a)f(\tilde{x}).$$

Satz 8.17 (Erweiterter Mittelwertsatz)

Sei $p(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$ und $p(x)$ sowie $f(x) \cdot p(x)$ integrierbar auf $[a, b]$. Wenn $m \leq f(x) \leq M$ auf $[a, b]$, dann

$$m \int_a^b p(x) \, dx \leq \int_a^b p(x) f(x) \, dx \leq M \int_a^b p(x) \, dx$$

Satz 8.18

Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ beschränkt und $a < c < b$. Es gilt:
 $f \in R[a, b] \Leftrightarrow f \in R[a, c]$ und $f(x) \in R[c, b]$. In diesem Fall ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Definition 8.19

Für $a < b$ und $f \in R[a, b]$ wird $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ sowie $\int_c^c f(x) dx = 0$ für $c \in [a, b]$ festgelegt.

Satz 8.20

Sei $f \in R[a, b]$ und $[c, d] \subseteq [a, b]$.

$$\int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c)$$

Der Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung

Satz 8.21

Sei $f \in R[a, b]$ und in $\tilde{x} \in [a, b]$ stetig. Dann ist für ein $c \in [a, b]$ die Funktion $F(x) = \int_c^x f(t) dt$ in \tilde{x} differenzierbar und $F'(\tilde{x}) = f(\tilde{x})$. Ist also f stetig auf $[a, b]$, so ist F stetig differenzierbar und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$

Der Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung

Definition 8.22

Sei die Funktion $f(x)$ in $[a, b]$ erklärt. Eine Funktion $F(x)$ mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x)$ auf $[a, b]$ soll *Stammfunktion* oder *unbestimmtes Integral* von $f(x)$ heißen. Wir schreiben dafür

$$F(x) = \int f(x) dx$$

Der Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung

Satz 8.23

Ist $F(x)$ auf $[a, b]$ stetig differenzierbar, so gilt

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t) dt,$$

und für $x, c \in [a, b]$ entsprechend

$$F(x) = F(c) + \int_c^x F'(t) dt.$$

Definition 8.24 (Notation)

$$F(x) \Big|_a^b := \left[F(x) \right]_a^b := F(b) - F(a).$$

Satz 8.25 (Partielle Integration)

Seien $f(x)$ und $g(x)$ auf $[a, b]$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_b^a f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_b^a f'(x) \cdot g(x) \, dx.$$

Satz 8.26 (Substitutionsregel)

Sei f stetig auf $\langle a, b \rangle$ und g stetig differenzierbar auf $\langle \alpha, \beta \rangle$, wobei

- $g(\langle \alpha, \beta \rangle) \subseteq \langle a, b \rangle$ und
- $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$.

Dann ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

Satz 8.27

$$\textcircled{1} \int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) \text{ für } F'(x) = f(x).$$

$$\textcircled{2} \int f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} f^2(x).$$

$$\textcircled{3} \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)|.$$

Satz 8.28

Jede rationale Funktion ist elementar integrierbar.

Definition 8.29 (unbeschränkter Integrationsbereich)

Sei f auf $[a, \infty)$ erklärt und über jedes $[a, c]$ für $a < c < \infty$ integrierbar. Man legt fest :

$$\int_a^{\infty} f(x) dx := \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) dx$$

Wenn der Limes existiert, dann existiert das uneigentliche Integral und es wird *konvergent* genannt (andernfalls *divergent*).

Entsprechend definieren wir für ein Intervall $(-\infty, a]$

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^a f(x) dx$$

und für ganz $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx$$

für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$, wobei beide Integrale auf der rechten Seite existieren müssen.

Definition 8.30

- 1 Sei $f \in R[c, b]$ für jedes c mit $a < c < b$ und $\lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| = \infty$. Man definiert
$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx, \text{ falls der Limes existiert.}$$
- 2 Sei $f \in R[a, c]$ für jedes c mit $a < c < b$ und $\lim_{x \rightarrow b^-} |f(x)| = \infty$. Man definiert
$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx, \text{ falls der Limes existiert.}$$
- 3 Sei $f \in R[c, d]$ für alle c, d mit $a < c < d < b$ und $\lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| = \infty$ sowie $\lim_{x \rightarrow b^-} |f(x)| = \infty$.
Man definiert unter Rückführung auf die Fälle 1.) und 2.)
$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad (a < c < b)$$
falls beide uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite existieren.

Definition 8.31

Eine Gleichung der Form $f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots) = 0$ heißt *gewöhnliche Differentialgleichung* (DGL). Die Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung heißt die *Ordnung der DGL*.

Richtungsfeld mit Isokline zu Beispiel 8.16

