Spezialvorlesung

Einführung in die Fuzzy-Logik

Helmut Thiele

Universität Dortmund
Fachbereich Informatik
Lehrstuhl für Informatik I

Inhaltsverzeichnis

1. Zweiwertige und mehrwertige Logik. Zusammenhang zwischen Logik und Mengenlehre. Scharfe und unscharfe Mengen

1.1 Der aristotelische Wahrheitsbegriff. Zweiwertige Logik

Die wichtigsten Gebilde von deskriptiven (beschreibenden) Sprachen sind die *Aussagen.*

Eine Aussage A als syntaktisches Gebilde hat eine *Semantik*, d. h. sie besagt, daß sich bestimmte Dinge in einer bestimmten Weise verhalten oder — etwas allgemeiner — daß in einem gegebenen Medium ein bestimmter Zustand vorliegt.

Ist diese Beschreibung *eindeutig*, so sagt man mit ARISTOTELES, daß

- A *WAHR* sei, falls der von A beschriebene Zustand tatsächlich vorliegt, und daß
- A *FALSCH* sei, falls der von A beschriebene Zustand **nicht** vorliegt.

(*„Aristotelischer Wahrheitsbegriff"*)

Anmerkung

Die in diesen Formulierungen gebrauchten Begriffe wie „Sprache", „syntaktisches Gebilde", „Semantik", „Beschreibung", „Zustand" usw. werden zunächst rein „intuitiv" verwendet, entsprechend ihrer umgangssprachlichen Bedeutung; korrekte Definitionen werden später entwickelt.

Beispiele

1. $A_1 =_{def} 2 + 1 = 3$.

   Diese Aussage beschreibt (im Medium der natürlichen Zahlen) einen Sachverhalt eindeutig, und dieser Sachverhalt liegt vor, also ist die Aussage A_1 *WAHR*.

2. $A_2 =_{def} 2 + 1 = 4$.

   Wiederum eindeutige Beschreibung eines Sachverhalts, aber dieser Sachverhalt liegt **nicht** vor, also ist A_2 *FALSCH*.

3. $A_3 =_{def}$ Fritz ist 184 cm groß.

   Eindeutige Beschreibung eines Zustandes; A_3 ist wahr bzw. falsch, wenn Fritz diese Größe hat bzw. nicht hat.

Anmerkung
Die „**Bestimmung**" des Wahrheitswertes einer Aussage wird **hier** noch nicht als Problem behandelt; es wird vielmehr vorausgesetzt, daß die entsprechenden Prozeduren stets erfolgreich ausführbar sind.

4. $A_4 =_{def}$ Fritz ist groß.

   Wie ist eine *Semantik* dieser Aussage definiert?

   1. Möglichkeit: A_4 ist *WAHR* (bzw. *FALSCH*), falls die Größe von Fritz 184 cm oder mehr beträgt (bzw. weniger als 184 cm beträgt).

   Semantische Paradoxie

   a) Hat Fritz die Größe 184 cm, dann ist er *„groß"*.
   b) Hat er die Größe 183.9 cm, dann ist er nicht groß, also *„klein"*.

   Anmerkung zur Terminologie

   „Paradoxie": Unverständlich, unserem „natürlichen" Empfinden nicht entsprechend.

   „Antinomie": Logisch widerspruchsvoll.

   Beispiel Der Dorfbarbier ist derjenige im Dorf, der alle rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Die Frage „Wer rasiert den Dorfbarbier?" führt zu dem logischen Widerspruch:

   > Der Dorfbabier rasiert sich selbst genau dann, wenn er sich nicht selbst rasiert.

   2. Möglichkeit: Man nimmt zur Kenntnis und akzeptiert, daß der aristotelische Wahrheitsbegriff und die zweiwertige Logik **nicht ausreichen**, um die Beziehung Syntax – Semantik, also Sprache – Realität hinreichend genau zu erfassen.

   Ausweg Man verwendet mehr als zwei Wahrheitswerte, geht also zur mehrwertigen Logik über.

Weiteres ***Musterbeispiel*** für mehrwertige Logik:
Bewertung des Wahrheitsgehaltes der Aussagen von Studenten in Prüfungen:
Notenskala (d. h. „Wahrheitswerte") hier in Dortmund für Vordiplom- und Diplomprüfungen:

$$1, 1.3, 1.7, 2, 2.3, 2.7, 3, 3.3, 3.7, 4, 5,$$

also 11 (Wahrheits-) Werte, davon

10 „positive" (bestanden)

1 „negativer" (nicht bestanden)

Merke
Die bisherige Informatik beruht (in der Regel) auf der zweiwertigen Logik, sowohl die Software als auch die Hardware.

Für mehr Informationen zu diesen einleitenden Darstellungen vergleiche man z. B. das dreibändige Werk über mathematische Logik von Günter Asser: [1–3].

1.2 Zweiwertige Prädikate. Scharfe Mengen

Grundlage aller mathematischen Betrachtungen ist die *Mengenlehre*. Die Mengenlehre ihrerseits basiert auf *Logik*.

Ausgangspunkt ist der Begriff eines *Universums* (Individuenbereich, Grundbereich, *Domain*).

Beispiele für Universa

1. $\boldsymbol{U_1}$**:** Alle natürlichen Zahlen von 2 bis 9 (Grenzen eingeschlossen).

   Endliches Universum!

2. $\boldsymbol{U_2}$**:** Alle natürlichen Zahlen, 0 eingeschlossen.

   Abzählbar unendliches Universum.

3. $\boldsymbol{U_3}$**:** Alle reellen Zahlen.

   Nicht abzählbares (überabzählbares) unendliches Universum.

Scharfe Mengen aus einem Universum U sind „Kollektionen“ von Elementen x aus U.

Merke
Dies und auch die folgenden Ausführungen beruhen auf den Vorstellungen der *naiven* (d. h. anschaulichen, **nicht** axiomatischen) Mengenlehre, wie sie

GEORG CANTOR (1845–1918)

als Schöpfer der Mengenlehre ursprünglich entwickelt hat.

Die naive Mengenlehre kann aber zu Widersprüchen (antinomischen Mengen) führen.

Beispiel einer antinomischen Menge
Die Menge M aller derjenigen Mengen X, die sich nicht selbst als Element enthalten, d. h. für die $X \notin X$ gilt.

Frage: Gilt $M \in M$ oder $M \notin M$?

M ist antinomisch, da jede der obigen Annahmen zum (logischen) Widerspruch führt.

Ausweg
Aufbau axiomatischer Mengenlehren (Hier nicht zu behandeln!).

Jedoch ist auch hier das Problem der Widerspruchsfreiheit solcher Systeme nicht völlig gelöst. → Spezialliteratur zur Mengenlehre oder entsprechende Spezialvorlesungen.

Charakterisierung von Mengen.
Wählen als Beispiel das Universum U_2, also alle natürlichen Zahlen (einschließlich 0).

1. **Spezialfall von endlichen Mengen**.

   Hier „*Aufweisung*“ der einzelnen Elemente und damit der ganzen Menge möglich, z. B. bedeutet

   $$\{2, 5, 8, 100\}$$

   diejenige Menge, die aus **genau** den natürlichen Zahlen $2, 5, 8$ und 100 besteht.

2. **Allgemeiner Fall**.

   Charakterisierung durch ein Prädikat, das einstellig und zweiwertig ist.

Definition 1.2.1
π ist (einstelliges, zweiwertiges) Prädikat über U (auch einstelliges „BOOLEsches“ Prädikat über U genannt)
$=_{def}$ $\pi : U \to \{0, 1\}$.

Beispiel

$$U = \text{Alle natürlichen Zahlen (einschließlich 0)}$$

$$\pi(x) =_{def} \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \text{ ungerade} \\ 1 & \text{, falls } x \text{ gerade} \end{cases} \qquad \text{wobei } x \in U$$

Man schreibt dann

$$\{x \,|\, \pi(x) = 1 \text{ und } x \in U\}$$

oder kürzer (falls U fixiert)

$$\{x \,|\, \pi(x)\}\,.$$

Erläuterung
Durch das einstellige zweiwertige Prädikat π ist eine *scharfe* Menge aus Elementen von U festgelegt, und zwar die scharfe Menge aller derjenigen Elemente $x \in U$, für die das Prädikat *zutrifft*, d. h. $\pi(x) = 1$ ist.

Im obigen Beispiel legt π die *scharfe* Menge *GER* aller geraden natürlichen Zahlen fest, d. h. wir haben

$$\begin{aligned} \{x \,|\, \pi(x) = 1 \text{ und } x \in U\} &= \{x \,|\, \pi(x)\} \\ &= GER \\ &= \{0, 2, 4, 6, \dots\}^1 \end{aligned}$$

Merke

1. Für eine *scharfe* Menge

   $$M = \{x \,|\, \pi(x) = 1 \text{ und } x \in U\}$$

   steht für **jedes** Element $x \in U$ *eindeutig* fest, ob es zu M gehört oder nicht, d. h. es gilt

   $$\textit{entweder } x \in M \textit{ oder } x \notin M,$$

   und zwar auf Grund der Tatsache, daß wegen

   $$\pi : U \to \{0, 1\}$$

   für alle $x \in U$ gilt:

   $$\textit{entweder } \pi(x) = 1 \textit{ oder } \pi(x) = 0.$$

2. Das Prädikat π wird auch häufig *charakteristische Funktion* der Menge M genannt und durch

   $$\chi_M$$

   bezeichnet.

   Somit gilt:

[1] („*Pseudo*“-) Aufweisung der Menge aller geraden natürlichen Zahlen.

Die charakteristische Funktion χ_M einer scharfen Menge M bestimmt die Menge M *eindeutig*.

3. Umkehrung von Punkt 2.

   Es sei eine scharfe Menge M von Elementen aus U irgendwie gegeben, z. B. für endliche Mengen M durch Aufweisung. Dann bestimmt M *eindeutig* ein zweiwertiges Prädikat π_M, das seinerseits (als charakteristische Funktion) wieder die Menge M festlegt.

$$\pi_M(x) =_{def} \begin{cases} 0, & \text{falls } x \notin M \\ 1, & \text{falls } x \in M \end{cases} \qquad \text{und } x \in U$$

Beispiel

$$\begin{aligned} U &=_{def} \text{Alle natürlichen Zahlen einschl. } 0 \\ M &=_{def} \{3, 5, 10\} \\ \pi_M(x) &=_{def} \begin{cases} 0, & \text{falls } x \notin M \\ 1, & \text{falls } x \in M \text{, d. h. } x = 3 \text{ oder } x = 5 \text{ oder } x = 10 \end{cases} \qquad x \in U \end{aligned}$$

Literatur Für weiterführende Informationen zum Thema Mengenlehre vergleiche man z. B. das Werk von Jürgen Schmidt [34].

1.3 Mehrwertige Prädikate. Unscharfe Mengen

Von dem polnischen Logiker

Jan Łukasiewicz (–)

stammt die Idee (1915), beliebige reelle Zahlen c aus dem abgeschlossenen Einheitsintervall $\langle 0, 1 \rangle$ **aller** reellen Zahlen x mit $0 \leqq x \leqq 1$ als Wahrheitswerte zu verwenden, um den *Wahrheitsgehalt* bestimmter Aussagen zu charakterisieren.

Ausgangspunkt von Łukasiewicz: „*Wahrscheinlichkeitsaussagen*". Wahrscheinlichkeitsaussagen beschreiben *stochastische Ereignisse*, die noch **nicht** realisiert (eingetreten) sind.

Beispiel Gegeben ein symmetrischer (also **nicht** „gefälschter") Würfel W.

Wahrscheinlichkeitsaussage

$A =_{def}$ Das Ergebnis eines (normalen) Wurfes mit W **wird sein** eine „4".

Bewertung mit 1 (wahr) oder
mit 0 (falsch)

vor Ausführung des Wurfes keine zutreffende Modellierung;

nach Ausführung des Wurfes möglich (Nachsehen, ob das Resultat „4" ist oder nicht).

Merke Grundsätzlicher *Unterschied* zwischen einem stochastischen Ereignis und dessen *Realisierung*.

Veranschaulichung Die Geschichte von einer Bombe im Flugzeug.

Definition 1.3.1
π ist ein (einstelliges, reellwertiges) Prädikat über U (Łukasiewiczsches Prädikat über U)
$=_{def}$ $\pi : U \to \langle 0, 1\rangle$.

Merke

1. Von Łukasiewicz selbst wurden neben $\langle 0, 1\rangle$ auch Teilmengen von $\langle 0, 1\rangle$ als Wahrheitswertmengen benutzt, und zwar

   1.1. die Menge aller *rationalen Zahlen* $r \in \langle 0, 1\rangle$ und

   1.2. Mengen der Form
   $$\left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-1}{n-1}, 1\right\}$$
   mit $n = 2, 3, \ldots$

   Man spricht im Fall 1.1 von der *rational*-wertigen Łukasiewiczschen Logik; der Fall 1.2 heißt n-wertige Łukasiewiczsche Logik. Offenbar erhält man für $n = 2$ die Menge $\{0, 1\}$ der Wahrheitswerte der zweiwertigen Logik.

2. Später (etwa ab 1920) wurden von anderen (z. B. von E. L. Post) auch andere Mengen von Wahrheitswerten eingeführt und betrachtet.

3. Eine besondere Stellung nehmen als Verallgemeinerung des Łukasiewiczschen Ansatzes sogenannte L-Prädikate (etwa ab den frühen siebziger Jahren) ein, wobei L eine halbgeordnete Menge oder ein Verband (siehe Abschnitt 2.1) ist.

4. Der Zusammenhang zwischen mehrwertigen Prädikaten und (scharfen) Mengen ist nicht mehr so einfach und übersichtlich wie im zweiwertigen Fall.

5. *Neuansatz* im Jahre 1965 durch den iranisch-US-amerikanischen Regelungstechniker

   Lotfi („Lofti“) A. Zadeh (geb. 19),

   der nach Konrad Zuse (geb. 19) im Frühjahr 1993 zweiter Ehrendoktor des Fachbereichs Informatik der Universität Dortmund wurde.

Ausgangspunkt waren *nichtlineare* Regelungsprobleme, die sich der „klassischen“ Regelungstheorie, die mit Differential- und auch Integralgleichungen (und deren Lösungen) arbeitet, weitgehend entzogen.

Musterbeispiel Ein LKW, welcher von einem Fahrer, der (etwa wegen der Ladung) nicht nach hinten sehen kann, auf Grund von Kommandos eines Einweisers rückwärts an eine Laderampe gesteuert werden soll. Die Situation ist in Abbildung 1.1 skizziert.

Der Einweiser bedient sich der natürlichen Sprache. Mögliche Kommandos:

1. Ein „kleines“ Stück rückwärts.

2. Lenkrad „stark“ rechts einschlagen.

3. Lenkrad „ein bißchen“ nach links einschlagen.

Versuch einer **zweiwertigen** Interpretation dieser Kommandos. Wir wählen für

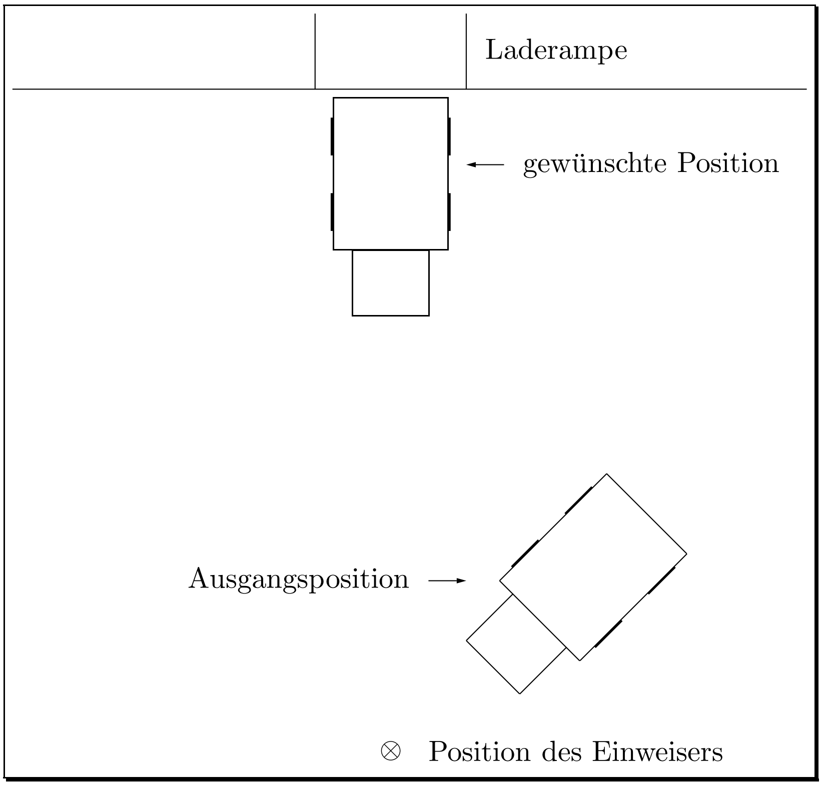


Abbildung 1.1: Situation im Beispiel „LKW zurücksetzen“

„Ein **kleines** Stück rückwärts“

als Universum U

$$\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$$

sowie die Maßeinheit 1 cm.

1. „Scharfes“ Kommando.

   150 cm rückwärts.

   Für den Fahrer nicht realisierbar!

   Ferner:

   - Warum 150 cm?
   - Warum nicht 149 cm oder 151 cm?

2. „Scharfes“ Kommando mit Schwellenwert.

   x cm rückwärts mit $x \leqq 150$.

   Warum ist dann 150.1 cm nicht mehr erlaubt, weil schon kein „kleines Stück“ mehr?

Wie man sieht, führt die zweiwertige Interpretation zu *paradoxen* Situationen und Resultaten.

Ausweg (ZADEH)

Klein : $U \to \langle 0,1\rangle$ als reellwertiges Prädikat, etwa

$$Klein(x) =_{def} \frac{1}{1+x}.$$

Vorstellung von Zadeh Dahinterliegende Fuzzy-Menge F, die durch ihre Zugehörigkeitsfunktion $\mu_F : U \to \langle 0,1\rangle$ (auch membership-function genannt) charakterisiert wird.

Grundsätzliche Feststellung Wir machen in dieser Vorlesung **keine** Unterscheidung zwischen einer „Fuzzy-Menge F über einem Universum U" und der „Zugehörigkeitsfunktion μ_F von F" mit

$$\mu_F : U \to \langle 0,1\rangle\,,$$

weil diese Unterscheidung logisch-mathematisch **sinnlos** ist, denn es ist nicht möglich, den Terminus „F ist Fuzzy-Menge über U" in Abgrenzung zur Zugehörigkeitsfunktion μ_F zu definieren. Demgemäß definieren wir grundsätzlich

Definition 1.3.2

F ist eine Fuzzy-Menge über U

$=_{def}$ $F : U \to \langle 0,1\rangle$.

Bemerkungen zu **Definition 1.3.2**.

1. Entsprechend **Definition 1.3.2** sind einstellige reellwertige (oder „ŁUKASIEWICZsche" Prädikate über U Fuzzy-Mengen über U und umgekehrt. Demgemäß werden wir **nicht** zwischen einstelligen reellwertigen Prädikaten über U und Fuzzy-Mengen über U unterscheiden.

2. In den folgenden Betrachtungen dieser Vorlesung werden wir uns auf den Fall, daß von U in $\langle 0,1\rangle$ abgebildet wird, beschränken. Wir sehen dies als „*Standard-Fall*" an und sprechen gegebenenfalls von *Standard*-Fuzzy-Mengen über U.

   Wird das reelle Intervall $\langle 0,1\rangle$ durch die Menge aller *rationalen* Zahlen $r \in \langle 0,1\rangle$ ersetzt, sprechen wir von *rationalen* Fuzzy-Mengen über U; Abbildungen F mit

   $$F : U \to \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$$

   könnte man n-wertige ($n \geqq 2$) Fuzzy-Mengen über U nennen. Für $n = 2$ fällt der Begriff der „zweiwertigen" Fuzzy-Menge mit dem einer charakteristischen Funktion zusammen.

3. Ein allgemeiner Rahmen für „*Nicht-Standard*" Fuzzy-Mengen ist durch die sogenannten *L-Fuzzy-Mengen* gegeben. Man vergleiche dazu die folgende **Definition 1.3.3**.

Modellierung von unscharfen Begriffen der Umgangssprache durch Fuzzy-Mengen.

Wir stellen fest, daß wir bei der Kommunikation in einer Umgangssprache eine Fülle von unscharfen Begriffen antreffen und verwenden.

Beispiele dazu sind im Deutschen:

„groß", „klein", „schnell", „reich", „schön", „warm", „kalt", „heiß" usw.

Man kann feststellen, daß ohne Verwendung von unscharfen Begriffen eine Kommunikation in der Umgangssprache sehr schwerfällig oder gar unmöglich wäre. Verarbeitung von Umgangssprache (oder „natürlicher Sprache") auf einem Rechner setzt deshalb eine geeignete **Modellierung** von unscharfen Begriffen voraus, wofür wir Fuzzy-Mengen verwenden.

Wir betrachten dazu den unscharfen Begriff „warm", und zwar im Hinblick auf die Temperatur von Badewasser. Wir wollen diesen Begriff durch eine Fuzzy-Menge modellieren.

Dazu wählen wir als Universum U die Menge

$$U = \{0, 1, \dots, 99, 100\}$$

der natürlichen Zahlen von 0 bis 100.

Die **Wahl** des Universums ist **kein** mathematisches Problem, sondern hängt vom Anwendungsproblem (d. h. Modellierungsproblem) ab. Hier scheinen uns die natürlichen Zahlen $0, 1, \dots, 99, 100$ als Temperaturangaben von Wasser in *Grad Celsius* angemessen zu sein, weil es sich um **Badewasser** handelt; denn Sprünge um 1 Grad *Celsius* sind wohl in diesem Falle akzeptabel.

Handelt es sich aber z. B. um die Temperatur von Flüssigkeiten bei einer sensiblen chemischen Reaktion (etwa Farbfilmentwicklung), werden Temperatursprünge von 1 °C nicht tolerierbar sein. Man wird in diesem Fall etwa als U die Menge aller natürlichen Zahlen von 0 bis 1000, also

$$U = \{0, 1, \dots, 999, 1000\}$$

wählen und 1 als $\frac{1}{10}$ °C interpretieren.

Modellierung 1. „Warmes Badewasser"

$$WARM_1(x) =_{def} 1 - \frac{3}{3+x} \qquad x \in \{0, 1, \dots, 99, 100\}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} WARM_1(0) &= 0 \\ WARM_1(6) &= \frac{1}{2} \\ WARM_1(30) &= \frac{10}{11} = 0.\overline{90} \\ WARM_1(60) &= \frac{20}{21} = 0.952\dots \end{aligned}$$

Der gesamte Werteverlauf ist in Abbildung 1.2 dargestellt.

Im Temperaturbereich von 0 °C bis etwa 35 °C gibt $WARM_1$ eine akzeptable Modellierung des unscharfen Begriffs „warmes Badewasser", über 35 °C kann man das nicht akzeptieren, denn die Fuzzy-Menge $WARM_1$ ist „*kumulativ*", d. h. monoton wachsend, und das bedeutet, daß das Wasser umso besser als „warmes Badewasser" geeignet ist, je näher seine Temperatur an 100 °C liegt — wohl eine nicht sehr realistische Beurteilung!

Modellierung 2. „Warmes Badewasser"

$$WARM_2(x) =_{def} 1 - \frac{3}{3+x^2} \qquad x \in \{0, 1, \dots, 99, 100\}$$

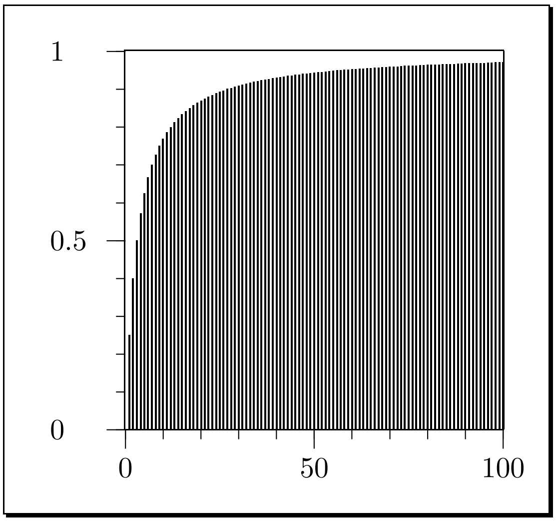


Abbildung 1.2: Werteverlauf von $WARM_1$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
WARM_2(0) &= 0\\
WARM_2(6) &= \frac{12}{13} = 0.923\ldots\\
WARM_2(30) &= \frac{300}{301} = 0.996\ldots\\
WARM_2(60) &= \frac{1200}{1201} = 0.999\ldots
\end{aligned}
$$

Der gesamte Werteverlauf ist in Abbildung 1.3 dargestellt.

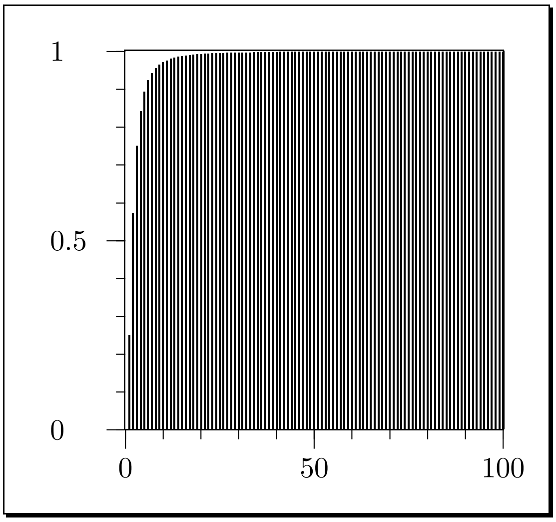


Abbildung 1.3: Werteverlauf von $WARM_2$

Diese Modellierung ist noch weniger geeignet als $WARM_1$, denn sie ist nicht nur kumulativ („je wärmer, desto besser"), sondern sie gibt auch im Temperaturbereich

unter 35 °C eine **nicht** akzeptable Beurteilung (im allgemeinen wird man Wasser mit der Temperatur von 6 °C **nicht** mit 0.923... als „Warm“ beurteilen).

Modellierung 3. „Warmes Badewasser“

$$WARM_3(x) =_{def} \frac{1}{1 + \sqrt[2]{|35 - x|}} \qquad x \in \{0, 1, \ldots, 99, 100\}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} WARM_3(35) &= 1 \\ WARM_3(34) = WARM_3(36) &= \frac{1}{2} \\ WARM_3(31) = WARM_3(39) &= \frac{1}{3} \\ WARM_3(26) = WARM_3(44) &= \frac{1}{4} \\ WARM_3(19) = WARM_3(51) &= \frac{1}{5} \\ WARM_3(0) = WARM_3(70) &= 0.144\ldots \end{aligned}$$

Der gesamte Werteverlauf ist in Abbildung 1.4 dargestellt.

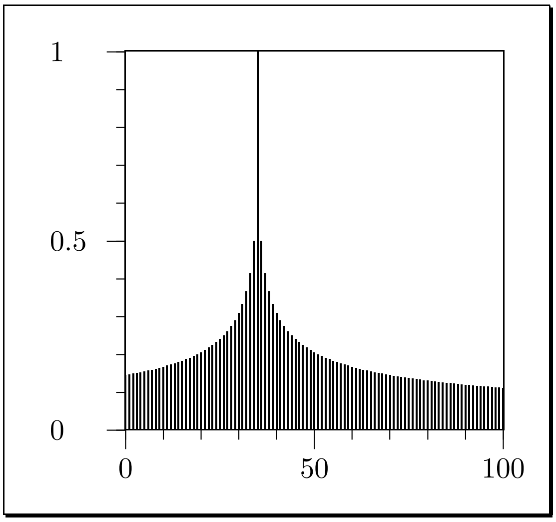


Abbildung 1.4: Werteverlauf von $WARM_3$

Diese Fuzzy-Menge ist **nicht** kumulativ, der Wahrheitswert fällt ab $x = 35$ nach „unten“ und „oben“ symmetrisch ab. Nach „unten“ ist der Abfall akzeptabel, vielleicht etwas zu schnell (für Babies geeignet), nach „oben“ ist der Abfall wohl nicht stark genug; denn Wasser mit der Temperatur von 51 °C ist wohl als Badewasser schon „ungeeignet“ (Wert 0) und nicht mit dem Wert $\frac{1}{5}$ geeignet.

Modellierung 4. „Warmes Badewasser“

$$WARM_4(x) =_{def} \begin{cases} e^{0.1\cdot(x-35)}, & \text{falls } x \leqq 35 \\ e^{0.4\cdot(35-x)}, & \text{falls } x > 35 \end{cases} \qquad x \in \{0, 1, \ldots, 99, 100\}$$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
WARM_4(0) &= 0.030\ldots \\
WARM_4(10) &= 0.082\ldots \\
WARM_4(20) &= 0.223\ldots \\
WARM_4(30) &= 0.606\ldots \\
WARM_4(35) &= 1 \\
WARM_4(40) &= 0.135\ldots \\
WARM_4(50) &= 0.002\ldots
\end{aligned}
$$

Der gesamte Werteverlauf ist in Abbildung 1.5 dargestellt.

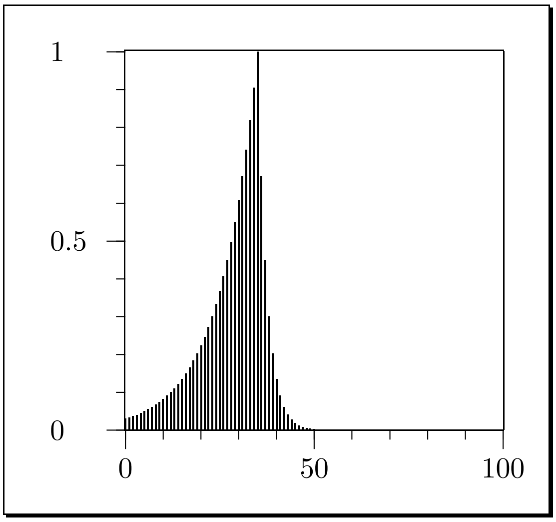


Abbildung 1.5: Werteverlauf von $WARM_4$

Diese Fuzzy-Menge ist **nicht** kumulativ, der Wahrheitswert fällt ab $x = 35$ nach „unten“ und „oben“ ab, und man kann das „Gefälle“ der Kurve für „oben“ und „unten“ getrennt durch die Faktoren in den Exponenten der beiden ‘Teilfunktionen’ festlegen.

Literatur/Historisches In [27] entwickelt Jan Łukasiewicz erste Ideen zum Aufbau mehrwertiger Logiken. Anlaß dafür ist das Problem, Wahrscheinlichkeitsaussagen durch Wahrheitswerte zu bewerten.

Derselbe Autor beschreibt in [28] den Aufbau einer dreiwertigen Logik.

Ebenfalls von Łukasiewicz stammen [29] sowie [30] (zusammen mit Alfred Tarski), wo Konzeption und Aufbau der endlich-wertigen und unendlich-wertigen „Łukasiewiczschen“ Logiken beschrieben werden.

Unabhängig von Łukasiewicz entwickelte der US-amerikanische Logiker E. L. Post Ideen zum Aufbau mehrwertiger Logiken. Siehe dazu [33].

Die Entwicklung der *Fuzzy-Logik* (und der gesamten *Fuzzy-Methodologie*) im heutigen Sinne begann mit der Arbeit [54] von Lotfi A. Zadeh.

Ein Vorläufer von Zadeh ist Max Black [9]. Allerdings ist der philosophische Ausgangspunkt bei Black (“Vagueness”) ein anderer als beim Vorläufer Łukasiewicz (“Probability”).

Eine sehr informationsreiche Arbeit zur „Vorläuferlinie“, die auf Black zurückgeht, findet sich in der Arbeit [18] von Goguen.

Von Goguen stammt eine wichtige *Verallgemeinerung* des Begriffs „Fuzzy Set“ von Zadeh als Abbildung

$$F : U \to \langle 0, 1\rangle$$

zum Begriff der “L-Fuzzy Sets”. Zur Definition dieser Verallgemeinerung sei ein Verband L (mit Null- und Einselement) gegeben. Sei ferner U ein Universum.

Definition 1.3.3
F ist eine L-Fuzzy Set über U
$=_{def}$ $F : U \to L$.

1.4 Beziehungen von Fuzzy-Mengen zu scharfen Mengen

Gegeben sei ein Universum U und eine (Standard-) *Fuzzy*-Menge F, d. h.

$$F : U \to \langle 0, 1\rangle .$$

Gegeben sei ferner ein fixiertes $c \in \langle 0, 1\rangle$.

Definition 1.4.1

1. *Der Support $SUPP(F)$ von F*

   $SUPP(F)$
   $=_{def}$ $\{x | x \in U \wedge F(x) > 0\}$

2. *Der c-Schnitt (c-Cut) $CUT_c(F)$ von F*

   $CUT_c(F)$
   $=_{def}$ $\{x | x \in U \wedge F(x) \geqq c\}$

3. *Der starke c-Schnitt (c-Cut) $CUT'_c(F)$ von F*
   $=_{def}$ $\{x | x \in U \wedge F(x) > c\}$

4. *Die c-Ebene (c-Level) von F*

   $LEV_c(F)$
   $=_{def}$ $\{x | x \in U \wedge F(x) = c\}$

5. *Der Kern von F*

   $KER(F)$
   $=_{def}$ $\{x | x \in U \wedge F(x) = 1\}$

6. *Der Co-Kern von F*

   $COKER(F)$
   $=_{def}$ $\{x | x \in U \wedge F(x) = 0\}$

Folgerung 1.4.1

1. $SUPP(F) = \bigcup\limits_{\substack{c \in \langle 0,1\rangle \\ c > 0}} LEV_c(F)$

2. $CUT_c(F) = \bigcup\limits_{\substack{d \in \langle 0,1\rangle \\ d \geqq c}} LEV_d(F)$

3. $CUT'_c(F) = \bigcup_{\substack{d \in \langle 0,1 \rangle \\ d > c}} LEV_d(F)$

4. $CUT_c(F) = CUT'_c(F) \cup LEV_c(F)$

Definition 1.4.2

1. $F = G$
   $=_{def}$ *Für jedes* $x \in U$ *gilt:* $F(x) = G(x)$

2. *Die Zerlegung (Partition) von* F

   $PART(F)$
   $=_{def} \{LEV_c(F) \,|\, c \in \langle 0,1 \rangle\}$

Folgerung 1.4.2

1. *Für jede Fuzzy-Menge* F *ist das Mengensystem* $PART(F)$ *eine Partition (Zerlegung) des Universums* U*, d. h.*

   1.1. $\bigcup PART(F) = U$ *(Überdeckung von* U*)*

   1.2. $\forall Z \forall Z' \, (Z, Z' \in PART(F) \wedge Z \neq Z' \rightarrow Z \cap Z' = \emptyset)$ *(*$PART(F)$ *ist disjunkt)*

2. *Für beliebige Fuzzy-Mengen* $F, G : U \rightarrow \langle 0,1 \rangle$ *gilt:*

$$\text{Wenn } F = G\text{, so } PART(F) = PART(G).$$

Problem

Kann man aus $PART(F)$ die Fuzzy-Menge F rekonstruieren?

Antwort: Im allgemeinen nicht, es sei denn, man hat zu jedem Zerlegungselement Z die „Niveauzahl" c, d. h. mit $Z = LEV_c(F)$ gegeben.

1.5 Einige wichtige Eigenschaften (Definitionen) von (für) Fuzzy-Mengen

Definition 1.5.1

*Die **Höhe** bzw. **Co-Höhe** (**Tiefe**) einer Fuzzy-Menge* F *über* U

1. $HEIGHT(F)$
   $=_{def} Sup \, \{F(x) \,|\, x \in U\}$

2. $COHEIGHT(F) = DEPTH(F)$
   $=_{def} Inf \, \{F(x) \,|\, x \in U\}$

Diese Begriffe spielen an vielen Stellen, insbesondere in den Anwendungen, eine große Rolle. Sie dienen u. a. dazu, die folgenden speziellen Eigenschaften von Fuzzy-Mengen zu definieren

Definition 1.5.2

1. F *ist normal*
   $=_{def} HEIGHT(F) = 1$

2. F *ist conormal*

$=_{def}$ $COHEIGHT(F) = DEPTH(F) = 0$

3. *F ist stark normal*
   $=_{def}$ $\exists x(x \in U \wedge F(x) = 1)$

4. *F ist stark conormal*
   $=_{def}$ $\exists x(x \in U \wedge F(x) = 0)$

Offenbar folgt die Normalität (bzw. die *Co*Normalität) aus der starken Normalität (bzw. aus der starken Conormalität). Die Umkehrungen gelten jedoch im allgemeinen nicht.

Definition 1.5.3
Sei F Fuzzy-Menge über U.

1. *F ist universell*
   $=_{def}$ $\forall x(x \in U \rightarrow F(x) = 1)$

2. *F ist leer*
   $=_{def}$ $\forall x(x \in U \rightarrow F(x) = 0)$

3. *F ist zweiwertig*
   $=_{def}$ $\forall x(x \in U \rightarrow F(x) \in \{0, 1\})$

4. *F ist n-wertig* $(n \geqq 2)$
   $=_{def}$ $\forall x \left(x \in U \rightarrow F(x) \in \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}\right)$

Folgerung 1.5.1

1. *Es gibt über U genau eine universelle und genau eine leere Fuzzy-Menge. Wir bezeichnen diese durch* $\not{U}$ *und* $\not{\emptyset}$.

2. *Ist F universell oder leer, so gilt*

$$PART(F) = \{U\}.$$

3. *Ist F zweiwertig, so gilt*

$$PART(F) = \{KER(F), COKER(F)\}.$$

4. *Ist F n-wertig, so besteht PART(F) aus höchstens n Mengen, d. h.* $Card\, PART(F) \leqq n$.

Für beliebige Fuzzy-Mengen F und G über U definieren wir nun eine „scharfe" Teilmengenbeziehung $F \subseteqq G$ wie folgt:

Definition 1.5.4
$F \subseteqq G$
$=_{def}$ $\forall x(x \in U \rightarrow F(x) \leqq G(x))$

Folgerung 1.5.2
Für jede Fuzzy-Menge F über U gilt:

$$\not{\emptyset} \subseteqq F \subseteqq \not{U}.$$

Theorem 1.5.3
Für jede Fuzzy-Menge F, G, H über U gilt:

1. *Reflexivität:*
$$F \subseteqq F$$

2. *Transitivität:*
$$\text{Wenn } F \subseteqq G \text{ und } G \subseteqq H\,, \text{ so } F \subseteqq H$$

3. *Antisymmetrie:*
$$\text{Wenn } F \subseteqq G \text{ und } G \subseteqq F\,, \text{ so } F = G.$$

2. Operationen mit scharfen bzw. mit unscharfen Mengen

2.1 Hilfsmittel aus der Ordnungstheorie und aus der Algebra: Halbordnungen, Verbände, boolesche Algebren

Wir definieren eine Reihe algebraischer Begriffe, die für die Beschreibung und das Verständnis einiger im folgenden auftretenden Strukturen von großer Bedeutung sind.

Gegeben seien eine nicht-leere Menge M sowie eine binäre Relation R über M, d. h. $R \subseteqq M \times M$. Dann definiert man:

Definition 2.1.1

1. *R ist reflexiv über $M =_{def}$ Für jedes $x \in M$ gilt: xRx.*

2. *R ist transitiv $=_{def}$ Für jedes x, y und z gilt: Wenn xRy und yRz, so xRz.*

3. *R ist antisymmetrisch*
   $=_{def}$ Für jedes x und y gilt: Wenn xRy und yRx, so $x = y$.

4. *R ist symmetrisch $=_{def}$ Für jedes $x, y \in M$ gilt: Wenn xRy, so yRx.*

5. *R ist linear über $M =_{def}$ Für jedes $x, y \in M$ gilt: xRy oder yRx.*

6. *R ist (reflexive) **Quasihalbordnungsrelation** über M*
   $=_{def}$ R erfüllt die Eigenschaften 1 und 2.

7. *R ist (reflexive) **Halbordnungsrelation** über M*
   $=_{def}$ R erfüllt die Eigenschaften 1, 2 und 3.

8. *R ist (reflexive) **Ordnungsrelation** über M*
   $=_{def}$ R erfüllt 1, 2, 3 und 5.

9. *R ist **Ähnlichkeitsrelation** über $M =_{def}$ R erfüllt 1 und 4.*

10. *R ist **Äquivalenzrelation** über $M =_{def}$ R erfüllt 1, 2 und 4.*

Bemerkung
In den Bedingungen 2 und 3 der obigen Definitionen sind die Voraussetzungen $x, y, z \in M$ nicht erforderlich, da diese aus den Prämissen xRy und xRz folgen, weil $R \subseteqq M \times M$.

Aufgabe 2.1.1 *Man veranschauliche sich die angegebenen Eigenschaften binärer Relationen durch geeignete Beispiele.*

Aufgabe 2.1.2 *Man verifiziere den (bekannten) eineindeutigen Zusammenhang zwischen Äquivalenzrelationen über M und* ***Zerlegungen*** *von M.*

Aufgabe 2.1.3 *Gegeben sei eine* ***Quasi****halbordnungsrelation R über M. Wir definieren für beliebige $x, y \in M$:*

$$x \approx y \ =_{def} \ xRy \text{ und } yRx$$

1. *Man zeige, daß $\approx$ eine Äquivalenzrelation über M ist.*
2. *Sei $M/\approx$ die durch $\approx$ in M erzeugte Zerlegung. Wir definieren für $K, L \in M/\approx$:*

   $$K \leqq L \ =_{def} \ \text{Es gibt ein } x \in K \text{ und ein } y \in L, \text{ so daß } xRy.$$

   Man beweise, daß $\leqq$ eine Halbordnungsrelation über $M/\approx$ ist.

Bemerkung Ersetzt man Bedingung 1 durch

$1'$ R ist *irreflexiv* über $M =_{def}$ Es gibt **kein** $x \in M$ mit xRx,

dann wird 3 beweisbar in der Form

$3'$ Für alle $x, y \in M$ gilt: Wenn xRy, so **nicht** yRx.

Ferner muß Bedingung 5 jetzt formuliert werden in der Form

$5'$ Für alle $x, y \in M$ gilt: xRy oder yRx oder $x = y$.

Die folgende Definition präzisiert den für viele Anwendungen wichtigen Begriff des Verbandes.

Definition 2.1.2
$\mathfrak{V} = [M, \sqcap, \sqcup]$ *ist ein* ***Verband***
$=_{def}$ *0. M ist eine nicht-leere Menge und*

$$\sqcap : M \times M \to M \text{ und}$$
$$\sqcup : M \times M \to M$$

1. Für alle $x, y, z \in M$ gilt:

$$x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$$
$$x \sqcap y = y \sqcap x$$
$$x \sqcap (y \sqcup x) = x$$

2.

$$x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$$
$$x \sqcup y = y \sqcup x$$
$$x \sqcup (y \sqcap x) = x$$

Folgerung 2.1.1
In beliebigen Verbänden sind die Operationen idempotent, d. h. für beliebige $x \in M$ gilt:

$$x \sqcap x = x \qquad \text{und} \qquad x \sqcup x = x.$$

Beweis
Aufgabe 2.1.4. ■

Definition 2.1.3
$\mathfrak{V} = [M, \sqcap, \sqcup]$ *heißt* ***distributiver*** *Verband*
$=_{def}$ $\mathfrak{V}$ *ist ein Verband, d. h. es gelten die Bedingungen 0, 1 und 2 von* **Definition 2.1.2** *und ferner gilt:*

3. *Für alle* $x, y, z \in M$:

$$x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$$
$$x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$$

Aufgabe 2.1.5 *Man konstruiere distributive und auch* ***nicht****-distributive Verbände.*

Aufgabe 2.1.6 *In* **Definition 2.1.3** *kann eine Bedingung weggelassen werden, weil sie aus den übrigen beweisbar ist. Welche?*

In einer Reihe von Anwendungen spielt der Begriff des Verbandes mit Nullelement und mit Einselement eine Rolle, wobei die betreffenden Verbände sowohl distributiv als auch nicht-distributiv sein können.

Definition 2.1.4
$\mathfrak{V} = [M, \sqcap, \sqcup, \emptyset, e]$ *heißt Verband mit Nullelement* $\emptyset$ *und Einselement* e
$=_{def}$ $\mathfrak{V}$ *ist ein Verband, d. h. es gelten die Bedingungen 0, 1 und 2 von* **Definition 2.1.2** *und ferner gilt:*

4. *Für jedes* $x \in M$:

$$x \sqcap \emptyset = \emptyset$$
$$x \sqcup \emptyset = x$$
$$x \sqcap e = x$$
$$x \sqcup e = e$$

Aufgabe 2.1.7 *Man beweise, daß in einem Verband sowohl Nullelement als auch Einselement eindeutig bestimmt sind.*

Aufgabe 2.1.8 *Es sei* $\mathfrak{V} = [M, \sqcap, \sqcup, \emptyset, e]$ *ein Verband mit dem Nullelement* $\emptyset$ *und dem Einselement* e*. Welche der unter 4 angegebenen Bedingungen sind aus den restlichen beweisbar?*

Wir schließen diesen Abschnitt mit der Definition des Begriffs der BOOLEschen Algebra, der in vielen Untersuchungen aus der Logik und auch aus der Informatik verwendet wird

Definition 2.1.5
1. $\mathfrak{B} = [M, \sqcap, \sqcup, \emptyset, e, \overline{}]$ *heißt* ***BOOLEsche Algebra***
   $=_{def}$ $\mathfrak{V} = [M, \sqcap, \sqcup, \emptyset, e]$ *ist ein distributiver Verband mit dem Nullelement* $\emptyset$ *und dem Einselement* e *und ferner gilt:*

5. $^-$ *ist eine eindeutige Abbildung von M in M, so daß für jedes $x \in M$ gilt:*

$$\overline{\overline{x}} = x$$
$$x \sqcap \overline{x} = \emptyset$$
$$x \sqcup \overline{x} = e$$

2. *Eine* BOOLE*sche Algebra heißt nicht-trivial, falls sie mindestens zwei Elemente enthält, d. h. Card $M \geqq 2$ ist.*

Beispiele für BOOLEsche Algebren findet man in den Abschnitten 2.2 und 2.3.

Folgerung

1. In einer nicht-trivialen BOOLEschen Algebra gilt $\emptyset \neq e$.
2. Die Bedingungen $x \sqcap \overline{x} = \emptyset$ und $x \sqcup \overline{x} = e$ sind in beliebigen BOOLEschen Algebren beweisbar.
3. In beliebigen BOOLEschen Algebren gelten die folgenden Rechenregeln, auch als „DE MORGANsche Gesetze“ bekannt:

$$\overline{x \sqcap y} = \overline{x} \sqcup \overline{y}$$
$$\overline{x \sqcup y} = \overline{x} \sqcup \overline{y}$$

2.2 Boolesche Funktionen

BOOLEsche Funktionen sind die „einfachste“ Form von Funktionen überhaupt, weil ihre Argumente und Werte stets in $\{0,1\}$ liegen. Sie werden in vielen Gebieten, vorrangig in wichtigen Teilgebieten der („scharfen“, d. h. „zweiwertigen“) Informatik angewendet, z. B. in der Schaltwerktheorie. Sei n eine natürliche Zahl mit $n \geqq 0$.

Definition 2.2.1
β ist eine n-stellige BOOLE*sche Funktion*
$=_{def}$ $\beta: \ \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Anmerkung Im Spezialfall $n = 0$ gibt es genau zwei (nullstellige) BOOLEsche Funktionen, die durch die Werte 0 bzw. 1 charakterisiert werden.

Folgerung 2.2.1
Es gibt genau 2^{2^n} BOOLE*sche Funktionen der Stellenzahl n, d. h.*

$$\begin{aligned}
2^{2^0} &= 2^1 = 2 && \text{im Fall } n = 0\\
2^{2^1} &= 2^2 = 4 && \text{im Fall } n = 1\\
2^{2^2} &= 2^4 = 16 && \text{im Fall } n = 2\\
2^{2^3} &= 2^8 = 256 && \text{im Fall } n = 3\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Beweis Es gibt genau 2^n mögliche Argumentvektoren, also gibt es zu diesen Argumentvektoren 2^{2^n} mögliche Zuordnungen (also Funktionen) der Werte 0 und 1.

Dies kann allerdings nur als „Plausibilitätsbetrachtung“ gewertet werden; ein mathematisch korrekter Beweis wird z. B. durch Induktion über n geführt.

Anmerkung Die Anzahl der Booleschen Funktionen wächst mit n sehr schnell, so daß in den Anwendungen Boolescher Funktionen häufig Fragen der Effizienz entsprechender Algorithmen (Laufzeit und Platzbedarf) eine entscheidende Rolle spielen.

Für die Stellenzahlen $n = 1$ und $n = 2$ kann man die entsprechenden Booleschen Funktionen leicht durch die folgenden Tabellen charakterisieren:

Fall $n = 1$

	β_0^1	β_1^1	β_2^1	β_3^1
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1

Fall $n = 2$

	β_0^2	β_1^2	β_2^2	β_3^2	β_4^2	β_5^2	β_6^2	β_7^2	β_8^2	β_9^2	β_{10}^2	β_{11}^2	β_{12}^2	β_{13}^2	β_{14}^2	β_{15}^2
00	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
01	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
10	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Wir stellen fest, daß in β_i^2 (wie auch in β_i^1) der untere Index i sich dadurch errechnet, indem man den zu β_i^2 gehörenden Vektor der Funktionswerte „nach rechts umlegt" und das Resultat als Binärdarstellung einer natürlichen Zahl interpretiert.

Beispiel

$$\beta_{11}^2 \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sim 1011 \sim 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 2 + 1 = 11$$

Wie üblich verwenden wir für eine Reihe der oben eingeführten Funktionen spezielle Bezeichnungen, und zwar

$$\begin{array}{lll}
\beta_1^1 \sim \textit{non} \text{ oder auch } \textit{not} & \\
\beta_1^2 \sim \textit{nor} & \text{(verneintes oder)} \\
\beta_6^2 \sim \textit{exor} & \text{(exclusives oder)} \\
\beta_7^2 \sim \textit{nand} & \text{(verneintes und)} \\
\beta_8^2 \sim \textit{and} \text{ bzw. } \textit{et} & \\
\beta_{11}^2 \sim \textit{imp} \text{ bzw. } \textit{seq} & \text{(wenn } \ldots \text{ so)} \\
\beta_{14}^2 \sim \textit{or} \text{ bzw. } \textit{vel} & \text{(inclusives oder)}
\end{array}$$

Aufgabe 2.2.1 *Man beschreibe die übrigen der angegebenen* Boole*schen Funktionen mit Wörtern der deutschen Sprache.*

Für Theorie und Praxis der Booleschen Funktionen ist das folgende Minterm-Normalformen-Theorem wesentlich.

Zur eleganten Formulierung dieses Theorems verwendet man die folgenden Abkürzungen und Bezeichnungen:

Für $\beta_1^1(x) = non(x)$ schreibt man $\overline{x}$.

Ferner wird definiert für $e \in \{0,1\}$:

$$x^e \;=_{def}\; \begin{cases} \overline{x} & \text{, falls } e = 0 \\ x & \text{, falls } e = 1 \end{cases}.$$

Für $\beta_8^2(x,y) = and(x,y) = et(x,y)$ schreibt man xy, was auch als Produkt der natürlichen Zahlen $x, y \in \{0,1\}$ gedeutet werden kann.

Iterierte Konjunktionen von Ausdrücken der Form x^e dürfen wegen der Assoziativität und Kommutativität der *and*-Funktion **ohne** Klammern und in **beliebiger** Reihenfolge geschrieben werden.

Minterme sind dann Ausdrücke der Form

$$x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n} \qquad (n \geqq 1), \tag{2.1}$$

wobei die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ paarweise verschieden sind und $e_1, \ldots, e_n \in \{0,1\}$ gilt.

Für $\beta_{14}^2(x,y) = or(x,y) = vel(x,y)$ gelten ebenfalls die Assoziativität und Kommutativität; ferner schreiben wir $x \vee y$ anstelle von $or(x,y)$ bzw. $\bigvee_{i \in I} K_i$ für „mehrgliedrige“ Alternativen (d. h. Iterationen von or).

Theorem 2.2.2
Ist $\beta : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, $n \geqq 1$, so gilt die Darstellung

$$\beta(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{e_1, \ldots, e_n \in \{0,1\} \\ \beta(e_1, \ldots, e_n) = 1}} x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}$$

Beweis Man diskutiere die folgenden zwei Fälle:

Fall 1: $\beta(x_1, \ldots, x_n) = 1$

Dann nimmt die „rechte Seite“ wegen

$$e_1^{e_1} \cdots e_n^{e_n} = 1$$

den Wert 1 an.

Fall 2: $\beta(x_1, \ldots, x_n) = 0$

Dann nehmen **alle** Minterme der „rechten Seite“ den Wert 0 an, also erhält die rechte Seite den Wert 0.

q. e. d.

Das folgende Theorem hat entscheidende Bedeutung für das „Rechnen“ mit *scharfen* Mengen, wie Abschnitt 2.3 zeigen wird.

Theorem 2.2.3
$\mathfrak{B}^2 =_{def} [\{0,1\}, and, or, 0, 1, non]$ *ist eine* BOOLE*sche Algebra, und zwar bis auf Isomorphie die „kleinste“ nicht-triviale* BOOLE*sche Algebra.*

Beweis

1. $\mathfrak{B}^2$ ist eine BOOLEsche Algebra. — Beweis durch Nachprüfen der entsprechenden Axiome (siehe **Definition 2.1.5**).

2. Wir zeigen: Ist

$$\mathfrak{B} = [M, \sqcap, \sqcup, \emptyset, e, {}^{-}]$$

eine beliebige nicht-triviale BOOLEsche Algebra, so ist

$$\mathfrak{B}(\emptyset, e) \ =_{def} \ [\{\emptyset, e\}, \sqcap', \sqcup', \emptyset, e, {}^{-\prime}]\,,$$

wobei $\sqcap'$, $\sqcup'$, ${}^{-\prime}$ die *Einschränkungen* der Operationen $\sqcap$, $\sqcup$, ${}^{-}$ auf die Menge $\{\emptyset, e\}$ bedeuten, eine BOOLEsche Algebra.

3. **Ferner gilt:** Alle BOOLEschen Algebren der Form $\mathfrak{B}(\emptyset, e)$ mit $\emptyset \neq e$ sind isomorph, also isomorph zu $\mathfrak{B}^2$.

4. **Schließlich:** Keine BOOLEsche Algebra der Form $\mathfrak{B}(\emptyset, e)$ mit $\emptyset \neq e$ hat eine *echte* BOOLEsche *Unteralgebra*, weil keine der Mengen $\{\emptyset\}$ und $\{e\}$ abgeschlossen ist bezüglich ${}^{-\prime}$ („Negation“).

2.3 Operationen mit scharfen Mengen

Wir definieren jetzt die üblichen Operationen mit *scharfen* Mengen und zeigen ihren *engen Zusammenhang* mit BOOLEschen Funktionen. Das Aufweisen dieses Zusammenhangs führt zu einem vertieften Verständnis für *standard*-Operationen und *nicht-standard*-Operationen mit Fuzzy-Mengen.

Gegeben sei ein Universum U sowie Mengen M und N aus U.

Definition 2.3.1

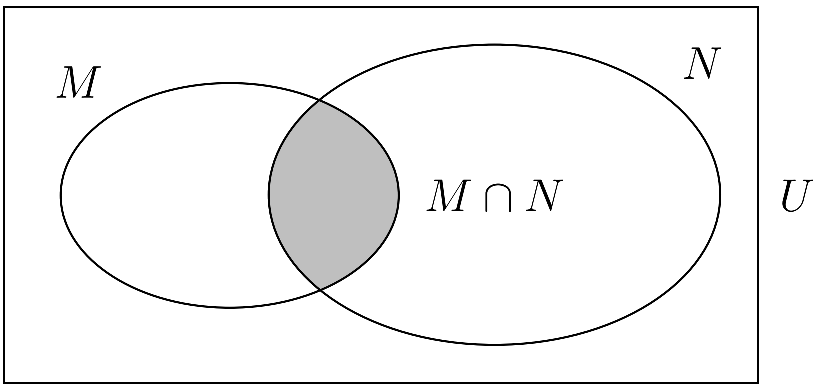
1. $M \cap N \ =_{def} \ \{x | x \in U \wedge x \in M \wedge x \in N\}$ *(Durchschnitt)*

2. $M \cup N \ =_{def} \ \{x | x \in U \wedge (x \in M \vee x \in N)\}$ *(Vereinigung)*

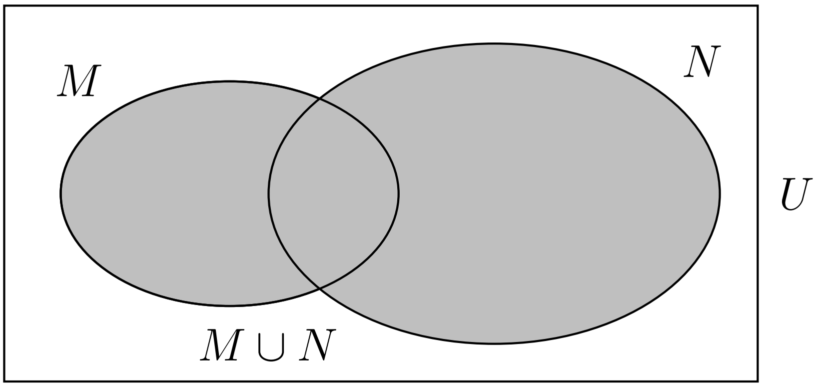
3. $\overline{M} \ =_{def} \ \{x | x \in U \wedge x \notin M\}$ *(Komplement bezüglich U)*

Veranschaulichung

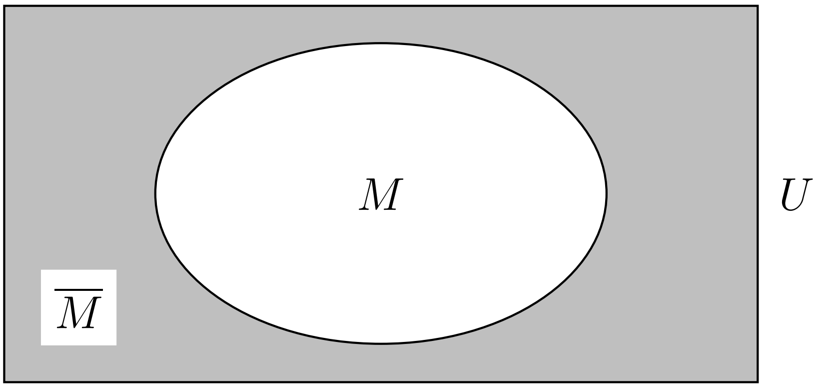
1. **Durchschnitt**



2. **Vereinigung**



3. **Komplement** bezüglich U



Definition 2.3.2

1. *ϕ (die leere Menge)*
   $=_{def} \{x | x \in U \wedge x \neq x\}$

2. *$\mathfrak{P}M =_{def} \{X \,|\, X \subseteqq M\}$*

Theorem 2.3.1
Das System $\mathfrak{S} = [\mathfrak{P}M, \cap, \cup, \phi, M, ^{-}]$ ist eine Boole*sche Algebra.*

Beweis Nachprüfen der Bedingungen, durch die eine Boolesche Algebra definiert ist.
Aufgabe 2.3.1!

Das folgende Theorem konstatiert einen engen Zusammenhang zwischen den oben definierten mengenalgebraischen Operationen und bestimmten Booleschen Funktionen.

Theorem 2.3.2
Für alle $x \in U$ gilt:

1. $\chi_{M\cap N}(x) = \mathit{and}\left(\chi_M(x), \chi_N(x)\right)$

2. $\chi_{M\cup N}(x) = \mathit{or}\left(\chi_M(x), \chi_N(x)\right)$

3. $\chi_{\overline{M}}(x) = \mathit{non}\left(\chi_M(x)\right)$

Beweis Rückgang auf die Definition der charakteristischen Funktion χ_M einer Menge $M \subseteqq U$ und die Definition der entsprechenden BOOLEschen Funktionen.

Wir definieren zwei weitere wichtige Operationen mit Mengen $M, N \subseteqq U$.

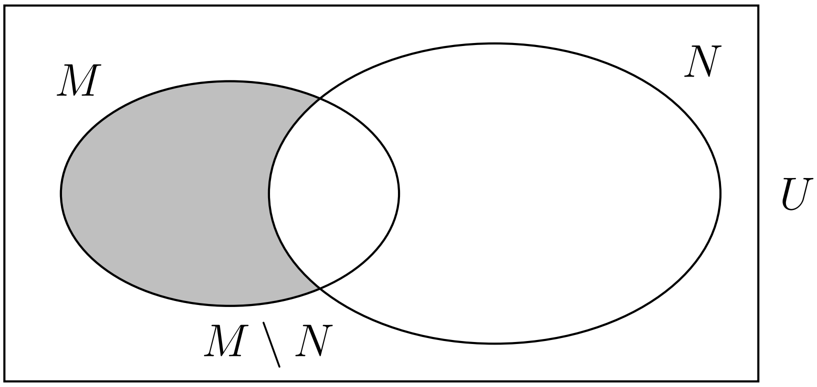
Definition 2.3.3

1. $M \setminus N$ *(Die Differenz der Mengen M und N)*
   $=_{def} \{x | x \in U \wedge x \in M \wedge x \notin N\}$

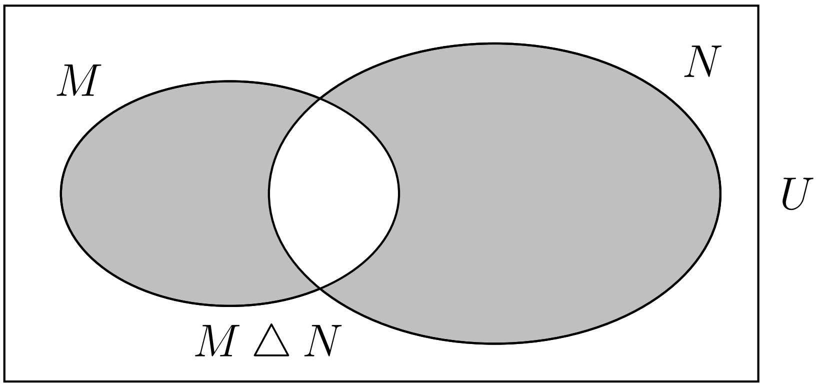
2. $M \triangle N$ *(Die symmetrische Differenz)*
   $=_{def} (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$

Veranschaulichung

1. **Differenz**



2. **Symmetrische Differenz**



Aufgabe 2.3.2 *Man bestimme zweistellige* BOOLE*sche Funktionen β und β' so, daß für alle $x \in U$ gilt:*

1. $\chi_{M \setminus N}(x) = \beta\left(\chi_M(x), \chi_N(x)\right)$

2. $\chi_{M \triangle N}(x) = \beta'\left(\chi_M(x), \chi_N(x)\right)$

Umgekehrt zu dem in der obigen Übungsaufgabe gelösten Problem kann man die Frage stellen und beantworten, wie eine gegebene BOOLEsche Funktion eine Mengenoperation festlegt.

Gegeben seien — als *Beispiel* — die BOOLEschen Funktionen *nand* und *nor*, wobei (zur Erinnerung) diese Funktionen durch die folgende Tabelle definiert sind:

	nand	*nor*
00	1	1
01	1	0
10	1	0
11	0	0

Wir führen nun zweistellige Mengenoperationen $NAND(M,N)$ und $NOR(M,N)$ ein, die „implizit“ über die charakteristischen Funktionen wie folgt definiert werden:

1. $\chi_{NAND(M,N)}(x) =_{def} nand\left(\chi_M(x), \chi_N(x)\right)$ $\qquad (x \in U)$
2. $\chi_{NOR(M,N)}(x) =_{def} nor\left(\chi_M(x), \chi_N(x)\right)$

Aufgabe 2.3.3 *Man drücke $NAND(M,N)$ und $NOR(M,N)$ (möglichst einfach) durch $\cap$, $\cup$ und $^-$ aus.*

Allgemeiner Fall Gegeben eine beliebige n-stellige BOOLEsche Funktion β, d. h.

$$\beta : \{0,1\}^n \to \{0,1\}\,.$$

Um unliebsame Trivial- und Spezialfälle auszuschließen, setzen wir $n \geqq 1$ voraus. Wir erzeugen nun eine n-stellige Mengenoperation B_β (kurz B) wie folgt:

Definition 2.3.4
$\chi_{B(M_1,\ldots,M_n)}(x) =_{def} \beta\left(\chi_{M_1}(x), \ldots, \chi_{M_n}(x)\right), \qquad x \in U$

Durch Anwendung des Minterm-Normalformen-Theorems erhält man das folgende Theorem, das eine Darstellung des Resultats $B(M_1, \ldots, M_n)$ der Operation B gestattet. Wir definieren dazu in Analogie zu x^e für $e \in \{0,1\}$:

$$M^e =_{def} \begin{cases} \overline{M} & \text{, falls } e = 0 \\ M & \text{, falls } e = 1. \end{cases}$$

Theorem 2.3.3
$$B(M_1, \ldots, M_n) = \bigcup_{\substack{e_1,\ldots,e_n \in \{0,1\} \\ \text{und } \beta(e_1,\ldots,e_n)=1}} \left(M_1^{e_1} \cap M_2^{e_2} \cap \cdots \cap M_n^{e_n}\right)$$

Beweis Nach Definition von B gilt:

$$\chi_{B(M_1,\ldots,M_n)}(x) = \beta\left(\chi_{M_1}(x), \ldots, \chi_{M_n}(x)\right),$$

also nach dem Minterm-Normalformen-Theorem für β

$$\chi_{B(M_1,\ldots,M_n)} = \bigvee_{\substack{e_1,\ldots,e_n \in \{0,1\} \\ \text{und } \beta(e_1,\ldots,e_n)=1}} \chi_{M_1}^{e_1}(x) \cdots \chi_{M_n}^{e_n}(x)$$

Daraus folgt aber durch Anwendung von **Theorem 2.3.2** und Rückgang auf die Definitionen der charakteristischen Funktion unmittelbar das formulierte Theorem.

2.4 Łukasiewiczsche Funktionen

Wir führen in Analogie zu den BOOLEschen Funktionen die folgende **neue** Begriffsbildung (Bezeichnung) ein.

Definition 2.4.1
λ ist eine n-stellige ŁUKASIEWICZ*sche Funktion*
$=_{def}$ $\lambda : \langle 0,1\rangle^n \to \langle 0,1\rangle$

Anmerkung Im Spezialfall $n = 0$ gibt es kontinuierlich viele ŁUKASIEWICZsche Funktionen, und zwar stellt jede fixierte reelle Zahl $c \in \langle 0,1\rangle$ eine solche Funktion dar.

Abzählbarkeitsfragen im Sinne der BOOLEschen Funktionen haben hier keinen („wenig") Sinn.

Universelle Darstellungsätze (wie das Minterm-Normalformen-Theorem für BOOLEsche Funktionen) gibt es offensichtlich für ŁUKASIEWICZsche Funktionen nicht.

„Relativierte" Darstellungssätze bisher spärlich, „noch viel zu tun".

Fundamental ist das folgende *Erweiterungsprinzip*.

Gegeben seien eine n-stellige BOOLEsche Funktion $\beta : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ und eine n-stellige ŁUKASIEWICZsche Funktion $\lambda : \langle 0,1\rangle^n \to \langle 0,1\rangle$.

Definition 2.4.2
*λ ist **eine*** ŁUKASIEWICZ*sche Erweiterung von β*
$=_{def}$ *λ und β stimmen auf $\{0,1\}$ überein, d. h. für jedes $x_1, \dots, x_n \in \{0,1\}$ gilt*

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = \beta(x_1, \dots, x_n).$$

Beispiele

1. **Fünf wichtige Erweiterungen der BOOLEschen Funktion *and***

   1. **Die Minimum-Konjunktion** $et_{\min}$ (kurz et_{m})

      $$\boxed{et_{\mathrm{m}}(x,y) =_{def} min(x,y)} \qquad x,y \in \langle 0,1\rangle$$

   2. **Die „*bold*"-Konjunktion** et_{bold} (kurz et_{b}), manchmal auch „beschränkte Differenz" genannt.

      $$\boxed{et_{\mathrm{b}}(x,y) =_{def} max(0, x+y-1)} \qquad x,y \in \langle 0,1\rangle$$

   3. **Die „algebraische" Konjunktion** et_{alg} (kurz et_{a}), manchmal auch „Produkt-Konjunktion" genannt.

      $$\boxed{et_{\mathrm{a}}(x,y) =_{def} x \cdot y} \qquad x,y \in \langle 0,1\rangle$$

   4. **Die „schwach-drastische" Konjunktion** et_{sd}

      $$\boxed{\begin{array}{l} et_{\mathrm{sd}}(1,y) =_{def} y \\ et_{\mathrm{sd}}(x,1) =_{def} x \\ et_{\mathrm{sd}}(x,y) =_{def} 0 \quad \text{für } 0 \leqq x < 1 \text{ und } 0 \leqq y < 1 \end{array}} \qquad x,y \in \langle 0,1\rangle$$

   5. **Die „drastische" Konjunktion** et_{d}

      $$\boxed{et_{\mathrm{d}}(x,y) =_{def} \begin{cases} 1 & \text{, falls } x = 1 \text{ und } y = 1 \\ 0 & \text{, falls } \begin{array}{r} 0 \leqq x < 1 \\ \text{oder} \quad 0 \leqq y < 1 \end{array} \end{cases}} \qquad x,y \in \langle 0,1\rangle$$

Folgerung 2.4.1
Für jedes $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$\boxed{et_{\mathrm{d}}(x,y) \leqq et_{\mathrm{sd}}(x,y) \leqq et_{\mathrm{b}}(x,y) \leqq et_{\mathrm{a}}(x,y) \leqq et_{\mathrm{m}}(x,y)}$$

Beweis **Aufgabe 2.4.1**.

Anmerkungen

1. Im Buch von Klir und Folger [24] wird et_{sd} durch i_{min} bezeichnet.
2. Im Buch von Bandemer und Gottwald [5] heißt et_{sd} „drastisches Produkt" (Seite 43).

2. **Fünf wichtige Erweiterungen der Booleschen Funktion *or***

   1. **Die Maximum-Alternative** $vel_{\max}$ (kurz vel_{m}), auch Maximum-Disjunktion genannt.

   $$\boxed{vel_{\mathrm{m}}(x,y) =_{def} max(x,y)} \qquad x, y \in \langle 0, 1\rangle$$

   2. **Die „*bold*"-Alternative** vel_{bold} (kurz vel_{b}), auch „beschränkte Summe" genannt.

   $$\boxed{vel_{\mathrm{b}}(x,y) =_{def} min(1, x+y)} \qquad x, y \in \langle 0, 1\rangle$$

   3. **Die „algebraische" Alternative** vel_{alg} (kurz vel_{a}), manchmal auch (mißverständlich) „algebraische Summe" genannt.

   $$\boxed{vel_{\mathrm{a}}(x,y) =_{def} x + y - x \cdot y} \qquad x, y \in \langle 0, 1\rangle$$

   4. **Die „schwach-drastische" Alternative** vel_{sd}

   $$\boxed{\begin{array}{l} vel_{\mathrm{sd}}(0,y) =_{def} y \\ vel_{\mathrm{sd}}(x,0) =_{def} x \\ vel_{\mathrm{sd}}(x,y) =_{def} 1 \quad \text{für } 0 < x \leqq 1 \text{ und } 0 < y \leqq 1 \end{array}} \qquad x, y \in \langle 0, 1\rangle$$

   5. **Die „drastische" Alternative** vel_{d}

   $$\boxed{vel_{\mathrm{d}}(x,y) =_{def} \begin{cases} 1 & \text{, falls} \quad \begin{array}{r} 0 < x \leqq 1 \\ \text{oder} \quad 0 < y \leqq 1 \end{array} \\ 0 & \text{, falls } x = 0 \text{ und } y = 0 \end{cases}} \qquad x, y \in \langle 0, 1\rangle$$

Folgerung 2.4.2
Für jedes $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$\boxed{vel_{\mathrm{m}}(x,y) \leqq vel_{\mathrm{a}}(x,y) \leqq vel_{\mathrm{b}}(x,y) \leqq vel_{\mathrm{sd}}(x,y) \leqq vel_{\mathrm{d}}(x,y)}$$

Beweis **Aufgabe 2.4.2**.

Anmerkungen

1. Im Buch von Klir und Folger [24] wird vel_{sd} durch u_{max} bezeichnet.
2. Im Buch von Bandemer und Gottwald [5] heißt vel_{sd} „drastische Summe“ (Seite 44).

Aus der zweiwertigen Logik sind bekannt die de Morganschen Regeln, die vermöge der *non*-Funktion einen Zusammenhang zwischen *and* und *or* vermitteln.

De Morgansche Regeln Für alle $x, y \in \{0, 1\}$ gilt

1. $or(x, y) = non(and(non(x), non(y)))$
2. $and(x, y) = non(or(non(x), non(y)))$

Für eine beliebige Łukasiewiczsche Funktion $\lambda : \langle 0, 1\rangle^n \to \langle 0, 1\rangle$ definieren wir ihr $DUAL$, angedeutet durch $DUAL(\lambda)$, wie folgt, wobei $x_1, \dots, x_n \in \langle 0, 1\rangle$ und $n \geqq 1$.

Definition 2.4.3

$$DUAL(\lambda)(x_1, \dots, x_n) =_{def} non\,(\lambda\,(non(x_1), \dots, non(x_n)))$$

Somit gilt

$$DUAL(\lambda)(x_1, \dots, x_n) =_{def} 1 - (\lambda\,(1 - x_1, \dots, 1 - x_n))$$

Folgerung 2.4.3

1. $vel_{\mathrm{m}} = DUAL(et_{\mathrm{m}})$ *1′.* $et_{\mathrm{m}} = DUAL(vel_{\mathrm{m}})$

2. $vel_{\mathrm{b}} = DUAL(et_{\mathrm{b}})$ *2′.* $et_{\mathrm{b}} = DUAL(vel_{\mathrm{b}})$

3. $vel_{\mathrm{a}} = DUAL(et_{\mathrm{a}})$ *3′.* $et_{\mathrm{a}} = DUAL(vel_{\mathrm{a}})$

4. $vel_{\mathrm{sd}} = DUAL(et_{\mathrm{sd}})$ *4′.* $et_{\mathrm{sd}} = DUAL(vel_{\mathrm{sd}})$

5. $vel_{\mathrm{d}} = DUAL(et_{\mathrm{d}})$ *5′.* $et_{\mathrm{d}} = DUAL(vel_{\mathrm{d}})$

3. **Einige Erweiterungen der Booleschen Funktion *non***

   1. **Die Łukasiewiczsche Negation** non_{L} (auch non_1)

   $$\boxed{non_{\mathrm{L}}(x) =_{def} 1 - x} \qquad x \in \langle 0, 1\rangle$$

   2. **Die „schwach-drastische“ Negation** non_{sd}

   $$\boxed{non_{\mathrm{sd}}(x) =_{def} \begin{cases} 1 & \text{, falls } 0 \leqq x < 1 \\ 0 & \text{, falls } x = 1 \end{cases}} \qquad x \in \langle 0, 1\rangle$$

   3. **Die „drastische“ Negation** non_{d}

   $$\boxed{non_{\mathrm{d}}(x) =_{def} \begin{cases} 1 & \text{, falls } x = 0 \\ 0 & \text{, falls } 0 < x \leqq 1 \end{cases}} \qquad x \in \langle 0, 1\rangle$$

Folgerung 2.4.4

Für jedes $x \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$\boxed{non_{\mathrm{d}}(x) \leqq non_{\mathrm{L}}(x) \leqq non_{\mathrm{sd}}(x)}$$

Beweis Aufgabe 2.4.3.

Bemerkungen zu den oben definierten Negationen.

1. In der Fuzzy-Logik, die auf der Menge $\langle 0,1\rangle$ als Menge aller Wahrheitswerte beruht, wurde bisher in der Regel nur die ŁUKASIEWICZsche Negation $non_{\mathrm{L}}(x) = 1 - x$ studiert und angewendet.
2. In dem Buch von KLIR und FOLGER [24] findet man allgemeine Betrachtungen zu Negationsfunktionen (in dieser Vorlesung → Kapitel 3).
3. Die Einführung der Negationen non_{d} und non_{sd} in die Fuzzy-Logik dürfte neu sein; ihre Anwendbarkeit muß noch gezeigt werden. In der dreiwertigen Logik, z. B. beim Aufbau der *logischen Programmierung* auf der Grundlage der dreiwertigen Logik, sind diese Negationen wohlbekannt, und sie werden dort erfolgreich angewendet.

   Zur Veranschaulichung geben wir noch die folgende „dreiwertige" Tabelle für die betrachteten Negationen an:

	non_{d}	non_{L}	non_{sd}
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
1	0	0	0

4. **Einige Erweiterungen der BOOLEschen Funktion *seq***
   („Wenn ... , so"; if ... then)

Erinnerung:

x	y	$seq(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

1. **Die KLEENE-DIENES-Implikation** seq_{KD}.

$$\boxed{seq_{\mathrm{KD}}(x,y) =_{def} max(1-x,y)} \qquad x,y \in \langle 0,1\rangle$$

2. **Die ŁUKASIEWICZ-Implikation** seq_{L}.

$$\boxed{seq_{\mathrm{L}}(x,y) =_{def} min(1, 1-x+y)} \qquad x,y \in \langle 0,1\rangle$$

3. **Die REICHENBACH-Implikation** seq_{R} (auch „algebraische" Implikation).

$$\boxed{seq_{\mathrm{R}}(x,y) =_{def} 1-x+xy} \qquad x,y \in \langle 0,1\rangle$$

4. **Die schwach-drastische Implikation** seq_{sd}

$$\boxed{seq_{\mathrm{sd}}(x,y) =_{def} \begin{cases} y & \text{, falls } x = 1 \\ 1-x & \text{, falls } y = 0 \\ 1 & \text{, falls } \begin{array}{r} 0 \leqq x < 1 \\ \text{und } 0 < y \leqq 1 \end{array} \end{cases}} \qquad x,y \in \langle 0,1\rangle$$

5. **Die drastische Implikation** seq_{d}

$$\boxed{seq_{\mathrm{d}}(x,y) =_{def} \begin{cases} 1 & \text{, falls } 0 \leqq x < 1 \text{ oder } 0 < y \leqq 1 \\ 0 & \text{, falls } x = 1 \text{ und } y = 0 \end{cases}} \qquad x, y \in \langle 0,1 \rangle$$

Folgerung 2.4.5
Für jedes $x, y \in \langle 0,1 \rangle$ gilt

1. $seq_{\mathrm{KD}}(x,y) = vel_{\mathrm{m}}(1-x,y)$
2. $seq_{\mathrm{L}}(x,y) = vel_{\mathrm{b}}(1-x,y)$
3. $seq_{\mathrm{R}}(x,y) = vel_{\mathrm{a}}(1-x,y)$
4. $seq_{\mathrm{sd}}(x,y) = vel_{\mathrm{sd}}(1-x,y)$
5. $seq_{\mathrm{d}}(x,y) = vel_{\mathrm{d}}(1-x,y)$

Beweis Elimination der Definitionen. **Aufgabe 2.4.4**.

Bemerkungen

1. Die Definitionen der oben betrachteten Implikationen und Alternativen sind gerade **so** formuliert, daß die aus der zweiwertigen Logik bekannte Beziehung

   $$seq(x,y) = vel(non(x),y)$$

   oder in „Kalkül-Form“

   $$A \to B \equiv \neg A \vee B$$

   auch in der Fuzzy-Logik gilt.
2. Die in **Folgerung 2.4.5** ausgedrückte Beziehung wird im folgenden Kapitel 4 auch so formuliert, daß die betrachteten Implikationen als

   S-Implikationen

   der betreffenden *S-Normen* mit Hilfe der Negationsfunktion $1-x$ erzeugt worden sind.

Folgerung 2.4.6
Für jedes $x, y \in \langle 0,1 \rangle$ gilt:

$$\boxed{seq_{\mathrm{KD}}(x,y) \leqq seq_{\mathrm{R}}(x,y) \leqq seq_{\mathrm{L}}(x,y) \leqq seq_{\mathrm{sd}}(x,y) \leqq seq_{\mathrm{d}}(x,y)}$$

Beweis Anwendung von **Folgerung 2.4.2**.

Wir beenden Abschnitt 2.4 mit der folgenden Definition, die durch die betrachteten Beispiele nahegelegt wird. Gegeben sei eine n-stellige Łukasiewiczsche Funktion λ, d. h.

$$\lambda : \langle 0,1 \rangle^n \to \langle 0,1 \rangle \qquad (n \geqq 1)$$

Definition 2.4.4

1. λ *heiße* ***drastisch***
   $=_{def}$ *Für jedes $x_1, \ldots, x_n \in \langle 0,1 \rangle$ gilt: $\lambda(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}$*
2. λ *heiße* ***schwach-drastisch***
   $=_{def}$ *Für jedes $x_1, \ldots, x_n \in \langle 0,1 \rangle$ gilt:*

   $$\lambda(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1, x_1, \ldots, x_n, 1-x_1, \ldots, 1-x_n\}$$

2.5 Standard-Operationen mit Fuzzy-Mengen

Erinnerung Gegeben ein Universum U. Die Grundoperationen $\cap$ (Durchschnitt), $\cup$ (Vereinigung) und $^-$ (Komplement bezüglich U) hatten wir „naiv“ durch Rückgriff auf die „naive“ Logik wie folgt definiert (siehe **Definition 2.3.1**):

1. $M \cap N =_{def} \{x | x \in U \wedge x \in M \wedge x \in N\}$
2. $M \cup N =_{def} \{x | x \in U \wedge (x \in M \vee x \in N)\}$
3. $\overline{M} =_{def} \{x | x \in U \wedge x \notin M\}$

Theorem 2.3.2 hatte dann den korrekten Zusammenhang zwischen den betreffenden *charakteristischen* Funktionen konstatiert, nämlich

1'. $\chi_{M \cap N}(x) = and\left(\chi_M(x), \chi_N(x)\right)$

2'. $\chi_{M \cup N}(x) = or\left(\chi_M(x), \chi_N(x)\right)$

3'. $\chi_{\overline{M}}(x) = non\left(\chi_M(x)\right)$

Wir nehmen nun die durch 1', 2', 3' beschriebenen Gleichungen zum Anlaß, um für Fuzzy-Mengen

$$F : U \to \langle 0, 1\rangle$$

und

$$G : U \to \langle 0, 1\rangle$$

mengenalgebraische Operationen zu definieren.

Der Anlaß ist, daß offenbar Fuzzy-Mengen, deren Zugehörigkeitswerte in $\{0, 1\}$ liegen, mit den charakteristischen Funktionen bestimmter scharfer Mengen übereinstimmen.

Merke. Die Definition von Durchschnitt, Vereinigung und Komplement von Fuzzy-Mengen ist **nicht** eindeutig festgelegt wie für scharfe Mengen durch *and*, *or* und *non*. Diese Definition hängt **wesentlich** von den **gewählten Łukasiewiczschen Erweiterungen** der Funktionen *and*, *or* und *non* ab.

Als „*Standard*“-Erweiterungen von *and*, *or* und *non* wählen (fixieren!) wir die Funktionen

$$et_{\mathrm{m}},\ vel_{\mathrm{m}} \text{ und } non_{\mathrm{L}},$$

wobei für $x, y \in \langle 0, 1\rangle$:

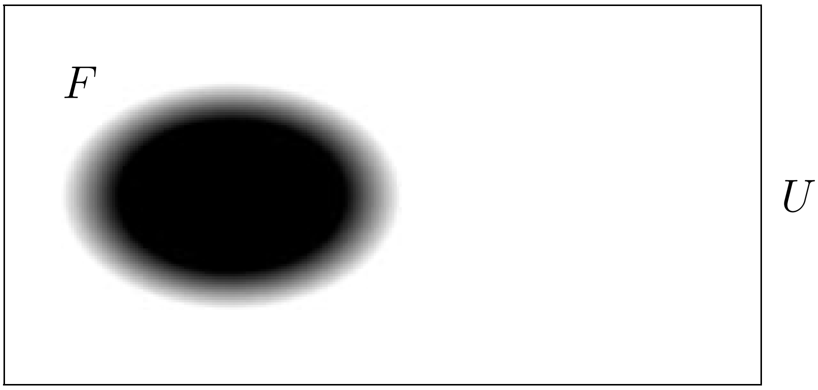
$$et_{\mathrm{m}}(x, y) =_{def} min(x, y)$$
$$vel_{\mathrm{m}}(x, y) =_{def} max(x, y)$$
$$non_{\mathrm{L}}(x) =_{def} 1 - x$$

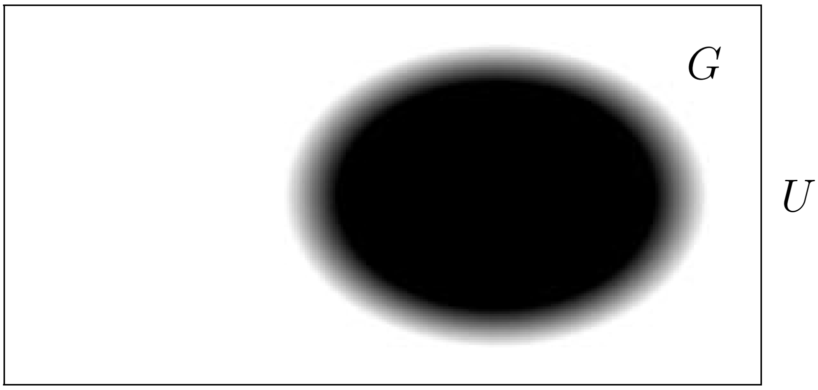
Definition 2.5.1

1. $(F \cap G)(x) =_{def} min(F(x), G(x))$ *(Durchschnitt)*
2. $(F \cup G)(x) =_{def} max(F(x), G(x))$ *(Vereinigung)*
3. $\left(\overline{F}\right)(x) =_{def} 1 - F(x)$ *(Komplement)*

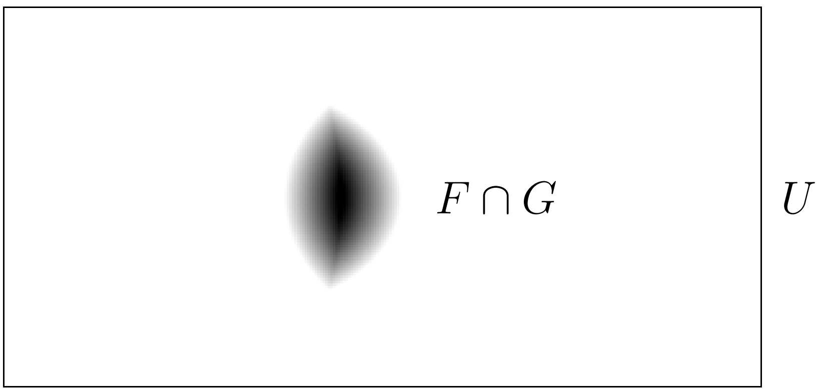
Veranschaulichung Veranschaulichung dieser Operationen ist nicht so korrekt möglich wie im „scharfen“ Fall. Eine „gute“ Veranschaulichung kann durch Grauwertbilder oder Kurvendarstellung erfolgen.

Veranschaulichung durch Grauwertbilder Fuzzy-Mengen können nicht so leicht wie die scharfen Mengen auf den Bildern in Abschnitt 2.3 durch „Umrandungen“ dargestellt werden. Stattdessen wird die Zugehörigkeit zu einer Fuzzy-Menge in einem Grauwertbild durch die Dichte des Graurasters dargestellt, wobei „Weiß“ einem Zugehörigkeitswert von 0 und „Schwarz“ einem Zugehörigkeitswert von 1 entspricht. Zur einfacheren Orientierung werden die verwendeten Fuzzy-Mengen und ihre Verknüpfungen jeweils in separaten Diagrammen dargestellt.

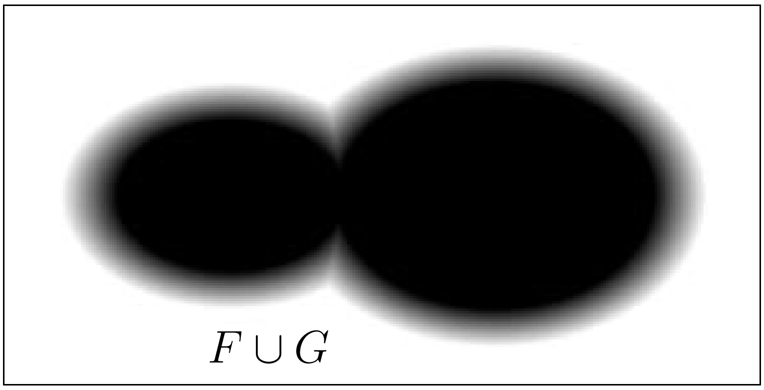




1. **Durchschnitt**

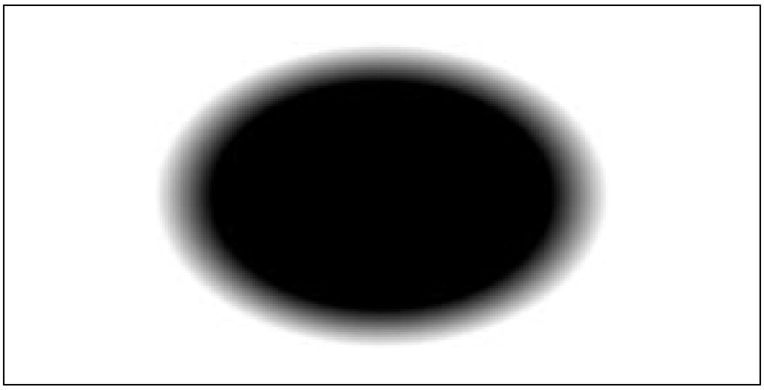


2. **Vereinigung**



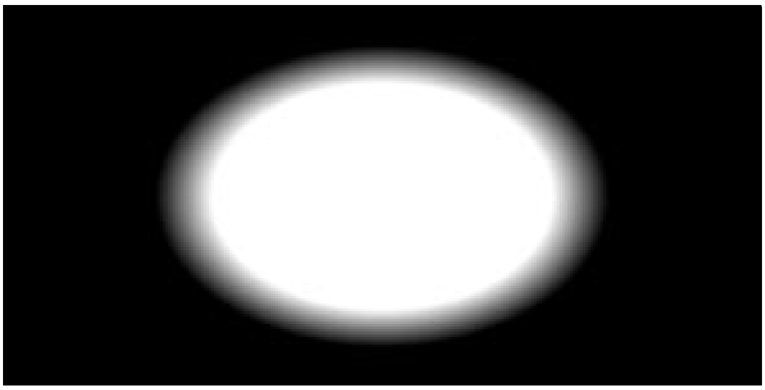
U

3. **Komplement** bezüglich U



U

F



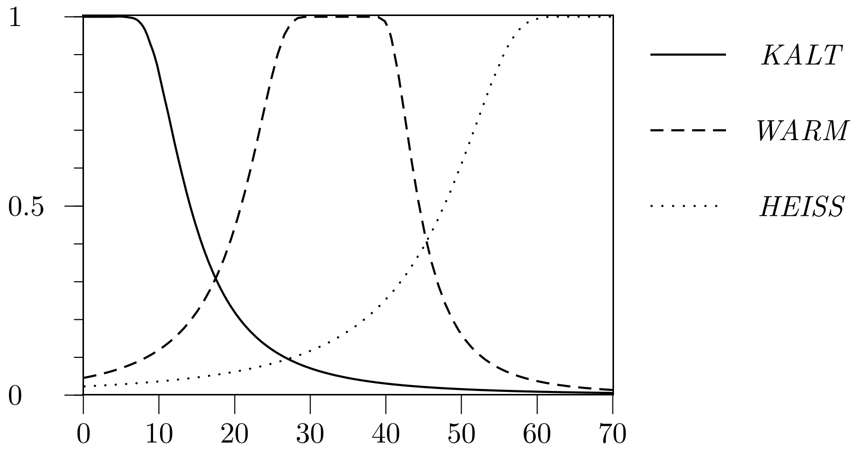
U

$\overline{F}$

Man beachte:

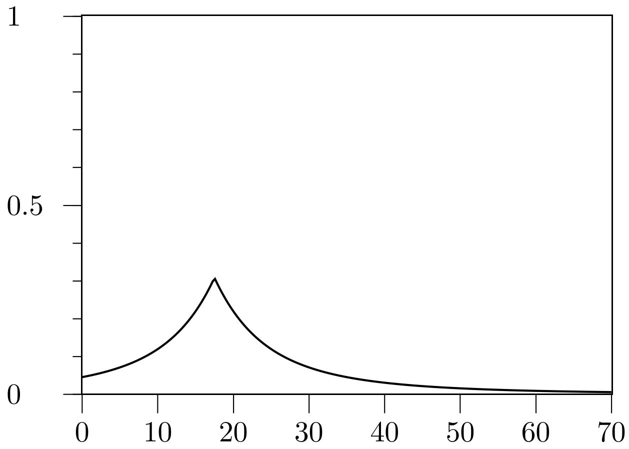
$$\begin{aligned} FR\left(\overline{F}\right) &= FR(F) \\ KER\left(\overline{F}\right) &= COKER(F) \\ &= U \setminus SUPP(F) \end{aligned}$$

Veranschaulichung durch Kurvendarstellung



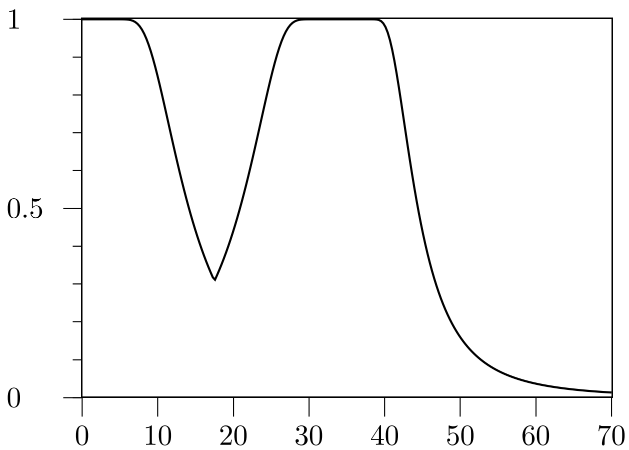
1. **Durchschnitt**

$KALT \cap WARM$

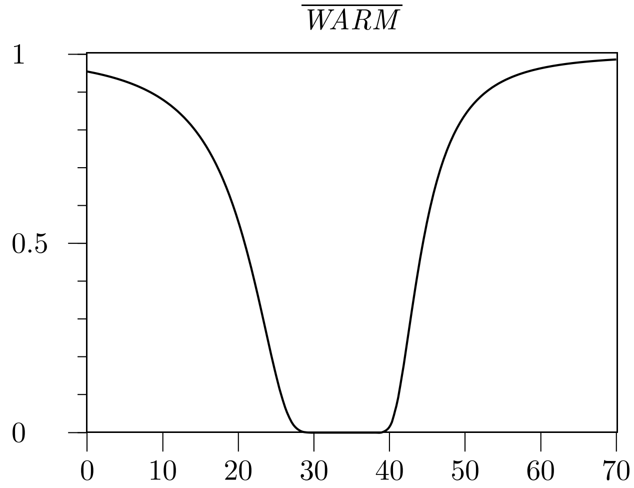


2. **Vereinigung**

$KALT \cup WARM$



3. **Komplement**



Das „algebraische“ Rechnen mit Fuzzy-Mengen bezüglich der definierten Operationen $\cap$, $\cup$ und $^-$ wird durch das folgende Theorem geregelt.

Dazu erinnern wir an die Festlegungen und Notationen. Gegeben sei ein Universum U. Die All-Fuzzy-Menge $\not{U}$ über U und die leere Fuzzy-Menge $\not{O}$ über U werden wie folgt definiert:

$$\not{U}(x) =_{def} 1 \qquad \text{für alle } x \in U$$
$$\not{O}(x) =_{def} 0 \qquad \text{für alle } x \in U$$

Schließlich ist die *scharfe* Potenzmenge $\mathfrak{P}U$ aller *scharfen* Teilmengen von U definiert durch

$$\mathfrak{P}U =_{def} \{X \,|\, X \subseteqq U\}$$

sowie die *scharfe* Potenzmenge $\mathfrak{F}(U)$ aller *unscharfen* Teilmengen von U (besser: aller *Fuzzy*-Mengen über U) definiert als

$$\mathfrak{F}(U) =_{def} \{F \,|\, F : U \rightarrow \langle 0, 1\rangle\}$$

Theorem 2.5.1

1. *$[\mathfrak{F}(U), \cap, \cup]$ ist ein distributiver Verband.*
2. *Von den weiteren Bedingungen, die eine* Boole*sche Algebra definieren, gelten (für alle $F \in \mathfrak{F}(U)$):*

   1. $$F \cap \not{O} = \not{O}$$
      $$F \cup \not{O} = F$$
   2. $$F \cap \not{U} = F$$
      $$F \cup \not{U} = \not{U}$$
   3. $$\overline{\overline{F}} = F$$

Beweis Rückgang auf die Definitionen und Anwendung der entsprechenden „Rechenregeln“ für $min(x, y)$, $max(x, y)$ und $1 - x$.

Aufgabe 2.5.1!

Bemerkungen

1. Die beiden folgenden Bedingungen

   4.
   $$F \cap \overline{F} = \not{\emptyset}$$
   $$F \cup \overline{F} = \not{U},$$

   die aus der Definition einer BOOLEschen Algebra noch fehlen, gelten im vorliegenden Fall im allgemeinen nicht, jedoch gilt (schwächer) für alle $F \in \mathfrak{F}(U)$ und $x \in U$:

   2.4′.
   $$\left(F \cap \overline{F}\right)(x) \leqq \tfrac{1}{2}$$
   $$\left(F \cup \overline{F}\right)(x) \geqq \tfrac{1}{2}$$

2. Die unter 2.4 stehenden Bedingungen werden auch als „Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch“ bzw. „Satz vom ausgeschlossenen Dritten“ bezeichnet. Somit kann man sagen, daß in der Struktur

   $$[\mathfrak{F}(U), \cap, \cup, {}^{-}, \not{\emptyset}, \not{U}]$$

   der Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch und der Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht gelten.

3. Erfüllen $\not{\emptyset}$ bzw. $\not{U}$ bezüglich der Operationen $\cap$ und $\cup$ die Bedingungen 2.1 und 2.2, so nennt man sie *Nullelement* bzw. *Einselement* bezüglich dieser Operationen.

4. In BOOLEschen Algebren kann man allgemein die DE MORGANschen Regeln beweisen. Obwohl die Struktur
   $$[\mathfrak{F}(U), \cap, \cup, {}^{-}, \not{\emptyset}, \not{U}]$$
   wegen des Fehlens von 2.4 keine BOOLEsche Algebra ist, gelten in dieser Struktur die DE MORGANschen Regeln, d. h. es gilt

   Theorem 2.5.2
   Für jedes $F, G \in \mathfrak{F}(U)$ gilt:

   5.
   $$\overline{F \cap G} = \overline{F} \cup \overline{G}$$
   $$\overline{F \cup G} = \overline{F} \cap \overline{G}$$

   Beweis
   Elimination der Definitionen von $\cap$, $\cup$ und ${}^{-}$ und Verwendung der Gleichungen

   $$1 - min(x, y) = max(1 - x, 1 - y)$$
   $$\text{und} \qquad\qquad (x, y \in \langle 0, 1\rangle)$$
   $$1 - max(x, y) = min(1 - x, 1 - y)$$

   ■

3. Theorie der T- und S-Normen. Theorie der Negationen. Nicht-Standard-Mengenoperationen

3.1 T-Normen

Die in Abschnitt 2.4 betrachteten „Konjunktionen“ et_{m}, et_{b}, et_{a}, et_{sd}, et_{d} führen auf den Begriff einer *T-Norm* als **allgemeine Fassung** des Begriffs „Konjunktion“ in der Fuzzy-Logik, genauer, in der mehrwertigen Logik, die auf der Menge $\langle 0,1 \rangle$ als Menge der verwendeten Wahrheitswerte beruht.

Gegeben sei eine Abbildung τ mit

$$\tau : \langle 0,1 \rangle^2 \to \langle 0,1 \rangle$$

Definition 3.1.1
τ heiße ***T-Norm***
$=_{def}$ *Die folgenden Bedingungen T_1, T_2, T_3 und T_4 sind erfüllt.*

$\mathbf{T_1}$: *Für jedes $x \in \langle 0,1 \rangle$ gilt*

$$\tau(x,0) = 0 \text{ und } \tau(x,1) = x.$$

$\mathbf{T_2}$: *τ ist* ***monoton****, d. h. für jedes $x, x', y, y' \in \langle 0,1 \rangle$ gilt:*

$$\text{Wenn } x \leqq x' \text{ und } y \leqq y'\text{, so } \tau(x,y) \leqq \tau(x',y').$$

$\mathbf{T_3}$: *τ ist* ***kommutativ****, d. h. für jedes $x, y \in \langle 0,1 \rangle$ gilt:*

$$\tau(x,y) = \tau(y,x).$$

$\mathbf{T_4}$: *τ ist* ***assoziativ****, d. h. für jedes $x, y, z \in \langle 0,1 \rangle$ gilt:*

$$\tau(x,\tau(y,z)) = \tau(\tau(x,y),z).$$

Bemerkung Die Bedingung T_2 ist äquivalent mit den folgenden zwei Bedingungen T_2' und T_2''.

$\mathbf{T_2'}$: Für jedes $x, x', y \in \langle 0,1 \rangle$ gilt:

$$\text{Wenn } x \leqq x'\text{, so } \tau(x,y) \leqq \tau(x',y).$$

T_2'': Für jedes $x, y, y' \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$\text{Wenn } y \leqq y', \text{ so } \tau(x, y) \leqq \tau(x, y').$$

Die im folgenden zu formulierenden Bedingungen T_0, T_5, T_6 sind Hilfsmittel zur „feineren" Beschreibung von T-Normen.

T_0: $\tau(0, 1) = \tau(1, 0) = \tau(0, 0) = 0$ und $\tau(1, 1) = 1$.

T_5: τ ist stetig, und zwar als zweistellige Funktion.

T_6: τ ist *idempotent*, d. h. für jedes $x \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$\tau(x, x) = x.$$

T_7: τ ist archimedisch, d. h. τ ist stetig und für jedes $x \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$\text{Wenn } 0 < x < 1\,, \text{ so } \tau(x, x) < x.$$

Definition 3.1.2
*τ heiße **Konjunktionsskelett***
$=_{def}$ τ erfüllt die Bedingungen T_0, T_2, T_3 und T_4.

Wir werden nun im folgenden die in Abschnitt 2.4 eingeführten Konjunktionen im Hinblick auf die Eigenschaften T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6 und T_7 prüfen.

Zunächst stellen wir fest, daß T_1 die Bedingung T_0 impliziert. Ferner gilt, daß jede Funktion τ, die T_0 erfüllt, eine ŁUKASIEWICZsche Erweiterung von *and* ist.

Folgerung 3.1.1
Die Minimum-Konjunktion et_{m} mit

$$et_{\mathrm{m}}(x, y) =_{def} min(x, y) \qquad (x, y \in \langle 0, 1\rangle)$$

ist eine stetige, idempotente T-Norm.

Beweis Nachprüfen der betreffenden Bedingungen T_1 bis T_6.
Aufgabe 3.1.1.

Folgerung 3.1.2
Die Bold-Konjunktion et_{b} und die algebraische Konjunktion et_{a} mit

$$\begin{aligned} et_{\mathrm{b}}(x, y) &=_{def} max(0, x + y - 1) \qquad (x, y \in \langle 0, 1\rangle) \\ et_{\mathrm{a}}(x, y) &=_{def} x \cdot y \end{aligned}$$

sind stetige T-Normen, die (beide!) archimedisch, also nicht idempotent sind.

Beweis **Aufgabe 3.1.2**.

Folgerung 3.1.3
Die schwach-drastische Konjunktion et_{sd} mit

$$\begin{aligned} et_{\mathrm{sd}}(1, y) &=_{def} y \\ et_{\mathrm{sd}}(x, 1) &=_{def} x \qquad (x, y \in \langle 0, 1\rangle) \\ et_{\mathrm{sd}}(x, y) &=_{def} 0 \quad \text{für } 0 \leqq x < 1 \text{ und } 0 \leqq y < 1 \end{aligned}$$

ist eine T-Norm, die jedoch weder stetig noch idempotent ist.

Beweis Aufgabe 3.1.3.

Folgerung 3.1.4
Die drastische Konjunktion et_d mit

$$et_\mathrm{d}(x,y) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 1 \text{ und } y = 1 \\ 0, & \text{falls } \begin{array}{r} 0 \leqq x < 1 \\ \text{oder } 0 \leqq y < 1 \end{array} \end{cases} \qquad (x, y \in \langle 0, 1 \rangle)$$

ist ein Konjunktionsskelett, d. h. es gelten T_0, T_2, T_3, T_4;

*et_d erfüllt jedoch nicht T_1, d. h. et_d ist keine T-Norm; et_d ist ferner **nicht** stetig und auch **nicht** idempotent.*

Bemerkung Mit **Folgerung 3.1.4** sind die Sätze 2.10 und 2.11 aus dem Buch von Klir und Folger [24, Seite 53] einschließlich der angegebenen Beweise als *falsch* nachgewiesen. (Siehe auch Abschnitt 3.3, wo sich eine korrigierte Fassung der genannten Sätze findet.)

Für viele Anwendungen reichen aber die fünf eingeführten Konjunktionen **nicht** aus. Demgemäß wurden in den letzten Jahrzehnten weitere Konjunktionen, meistens unter dem Stichwort „T-Normen“ eingeführt, studiert und angewendet. Dabei ist zu erwähnen, daß es sich in der Regel nicht um **eine** Funktion, sondern im allgemeinen um **unendliche Mengen** (**Klassen**) von T-Normen handelt, die durch eine Parameterabhängigkeit gegeben sind. Als erstes Beispiel betrachten wir die „Yager-*Klasse*“, die in [45] beschrieben wird.

Definition 3.1.3 (Die Yager-Klasse von T-Normen.)
Als Parameter sei eine reelle Zahl w mit $0 < w < +\infty$ gegeben.

Mit Yager *definieren wir für $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$*

$$et_\mathrm{Y}(w; x, y) =_{def} 1 - min\left(1, ((1-x)^w + (1-y)^w)^{\frac{1}{w}}\right)$$

Bemerkung Die Bezeichnung et_Y erscheint uns deshalb gerechtfertigt, weil jede Funktion der definierten Klasse eine T-Norm ist und außerdem enge Beziehungen zu den Konjunktionen et_m und et_b bestehen (siehe das folgende **Theorem 3.1.5**).

Theorem 3.1.5

1. *Für jeden fixierten Parameterwert w mit $0 < w < +\infty$ ist $et_\mathrm{Y}(w; ., .)$ eine archimedische T-Norm, die jedoch **nicht** idempotent ist.*

2. *Für jedes $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$ existiert $\lim\limits_{w \to +\infty} et_\mathrm{Y}(w; x, y)$ und es gilt*

$$\lim_{w \to +\infty} et_\mathrm{Y}(w; x, y) = et_\mathrm{m}(x, y) = min(x, y)$$

3. $et_\mathrm{Y}(1; x, y) = et_\mathrm{b}(x, y) = max(0, x + y - 1)$

4. $et_\mathrm{Y}(2; x, y) = 1 - min\left(1, \sqrt[2]{(1-x)^2 + (1-y)^2}\right)$

Beweis Aufgabe 3.1.4.

Anleitung:

ad 1. Nachprüfen der Bedingungen T_1, T_2, T_3, T_4 und T_7. Zur Widerlegung der Idempotenz (T_6) „Ausrechnen“ des Ausdrucks $et_Y(w; x, x)$ für spezielle Werte von w mit $0 < w < +\infty$ und x mit $0 \leqq x \leqq 1$.

ad 2. Anwendung der Regel von L'HOSPITAL aus der Differentialrechnung.

ad 3. Offenbar genügt es, die Identität

$$max(0, x + y - 1) = 1 - min(1, (1 - x) + (1 - y))$$

zu beweisen.

ad 4. Klar.

In der folgenden Tabelle werden weitere wichtige Klassen von T-Normen angegeben.

Quelle	Definition der Klasse	Gültigkeit des Parameters
SCHWEIZER & SKLAR [37]	$max\,(0, x^{-p} + y^{-p} - 1)^{-\frac{1}{p}}$	$p \in (-\infty, +\infty)$
HAMACHER [22]	$\dfrac{x \cdot y}{\gamma + (1-\gamma) \cdot (x + y - x \cdot y)}$	$\gamma \in (0, +\infty)$
FRANK [16]	$log_s \left(1 + \dfrac{(s^x - 1) \cdot (s^y - 1)}{s - 1}\right)$	$s \in (0, +\infty)$
YAGER [45]	$1 - min\left(1, ((1-x)^w + (1-y)^w)^{\frac{1}{w}}\right)$	$w \in (0, +\infty)$
DUBOIS & PRADE [13]	$\dfrac{x \cdot y}{max(x, y, \alpha)}$	$\alpha \in (0, 1)$
DOMBI [12]	$\dfrac{1}{1 + \left(\left(\frac{1}{x} - 1\right)^{\lambda} + (\frac{1}{y} - 1)^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}$	$\lambda \in (0, +\infty)$

Theorem 3.1.6
Sämtliche in der obigen Tabelle beschriebenen Funktionen sind (für jeden fixierten Parameterwert) stetige T-Normen.

Beweis
Als **Aufgabe 3.1.5**. ■

Aufgabe 3.1.6 *Man untersuche, welche der in der obigen Tabelle angegebenen Funktionen archimedisch sind.*

Wir schließen Abschnitt 3.1 mit dem folgenden, von C. H. LING [26] stammenden Darstellungssatz für archimedische T-Normen, der sowohl in theoretischen Untersuchungen als auch in den Anwendungen nützlich ist. Zur Formulierung dieses Satzes benötigen wir jedoch die folgende Definition.

Wir ergänzen die Menge der reellen Zahlen durch die „unendlichen“ Punkte $-\infty$ und $+\infty$ und dehnen die Begriffe der Abbildung, der Ordnung, des Intervalls und der Stetigkeit auf die Menge $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ wie üblich aus.

Gegeben sei eine Abbildung $f : \langle 0, 1 \rangle \to \langle 0, +\infty \rangle$.

Definition 3.1.4

1. *f heiße streng comonoton*
   $=_{def}$ Für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:

$$\text{Wenn } x < y\,,\ \text{so } f(y) < f(x)$$

2. *Es sei f streng comonoton mit $f(1) = 0$. Wir definieren dann*

$$f^{(-1)}(x) =_{def} \begin{cases} y, & \text{falls } x \in \langle 0, f(0)\rangle \text{ und } f(y) = x \\ 0, & \text{falls } x \in (f(0), +\infty\rangle. \end{cases}$$

   Offenbar gilt

$$f^{(-1)} : \langle 0, +\infty\rangle \to \langle 0, 1\rangle$$

   sowie

$$f^{(-1)}(f(x)) = x$$

   für alle $x \in \langle 0,1\rangle$; die Funktion $f^{(-1)}$ wird deshalb auch „Pseudoinverse“ von f genannt.

Theorem 3.1.7

Ist τ eine archimedische T-Norm, so existiert eine Funktion $f : \langle 0,1\rangle \to \langle 0, +\infty\rangle$ mit

1. *f ist streng comonoton*
2. *$f(1) = 0$*
3. *f ist stetig*
4. *$\tau(x,y) = f^{(-1)}(f(x) + f(y))$ für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$.*

Das angegebene Theorem ist eine sehr „tiefliegende“ und „starke“ Aussage, demgemäß ist ein Beweis schwierig und langwierig. Wir verzichten deshalb auf die Wiedergabe eines Beweises und verweisen auf die Originalliteratur [26].

Es sei ergänzend noch betont, daß die in dem oben formulierten Theorem auftretende Funktion f bis auf eine Multiplikation mit einer positiven konstanten reellen Zahl eindeutig bestimmt ist; jede derartige Funktion wird additiver Generator von τ genannt. Eine archimedische T-Norm heiße nilpotent, falls es einen additiven Generator f mit

$$f(0) < +\infty$$

gibt. Ist τ streng monoton (steigend), d. h. folgt $\tau(x,y) < \tau(x',y')$ aus $x < x'$ oder $y < y'$ für $x, x', y, y' \in \langle 0,1\rangle$, so gilt $f(0) = +\infty$.

Literatur zu Abschnitt 3.1.

- In einem allgemeinen Rahmen werden T-Normen in den einführenden Werken von George J. Klir und Tina A. Folger [24], von Siegfried Gottwald [19, 20] sowie von Hans Bandemer und Siegfried Gottwald [5] behandelt.
- Ursprünglich sind T-Normen entstanden in Untersuchungen zu verallgemeinerten Geometrien (triangular norms). Siehe B. Schweizer und A. Sklar [36, 37].
- Eine ausführliche Behandlung additiver Generatoren findet sich in [26] von C. H. Ling.

3.2 S-Normen

Analog zu den in Abschnitt 3.1 betrachteten T-Normen sind bei S-Normen die in Abschnitt 2.4 eingeführten „Alternativen“ vel_{m}, vel_{b}, vel_{a}, vel_{sd}, vel_{d} der Ausgangspunkt. S-Normen können dann analog verstanden werden als **allgemeine und axiomatische Fassung** des Begriffs „Alternative“ (oder auch „Disjunktion“) in der Fuzzy-Logik, oder (wie in 3.1) **genauer** als axiomatische Fassung des Begriffs „Alternative“ in der ŁUKASIEWICZschen Logik.

Gegeben sei eine Abbildung σ mit

$$\sigma : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle .$$

Definition 3.2.1
*σ heiße **S-Norm***
$=_{def}$ *Die folgenden Bedingungen S_1, S_2, S_3 und S_4 sind erfüllt:*

S_1: *Für jedes $x \in \langle 0,1\rangle$ gilt*

$$\sigma(x,0) = x \text{ und } \sigma(x,1) = 1.$$

S_2: *σ ist **monoton**, d. h. S_2 stimmt mit Bedingung T_2 überein.*

S_3: *σ ist **kommutativ**, d. h. S_3 stimmt mit Bedingung T_3 überein.*

S_4: *σ ist **assoziativ**, d. h. S_4 stimmt mit Bedingung T_4 überein.*

Analog zu T-Normen führen wir ein

S_0: $\sigma(0,0) = 0$ und $\sigma(0,1) = \sigma(1,0) = \sigma(1,1) = 1$.

S_5: σ ist (in beiden Argumenten x, y) stetig (also wie T_5).

S_6: σ ist idempotent (also wie T_6).

S_7: σ ist archimedisch, d. h. σ ist stetig und für jedes $x \in \langle 0,1\rangle$ gilt:

$$\text{Wenn } 0 < x < 1\,, \text{ so } \sigma(x,x) > x.$$

Definition 3.2.2
*σ heiße **Disjunktionsskelett***
$=_{def}$ *σ erfüllt die Bedingungen S_0, S_2, S_3 und S_4.*

Das folgende Theorem bringt die *grundlegende* Tatsache zum Ausdruck, daß durch *Dualisierung* (also Anwendung des Operators $DUAL$) die angegebenen Bedingungen ineinander übergehen.

Gegeben sei eine beliebige Abbildung λ mit

$$\lambda : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle .$$

Theorem 3.2.1

1. *Für jedes $i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ gilt:*

   λ erfüllt die Bedingung T_i genau dann, wenn $DUAL(\lambda)$ die Bedingung S_i erfüllt.

2. *Für jedes $i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ gilt:*

   λ erfüllt die Bedingung S_i genau dann, wenn $DUAL(\lambda)$ die Bedingung T_i erfüllt.

Beweis
Anwendung der Definition

$$DUAL(\lambda)(x,y) =_{def} 1 - \lambda(1-x, 1-y) \qquad (x,y \in \langle 0,1 \rangle)$$

und Nachprüfen der einzelnen Bedingungen. ■

Folgerung 3.2.2

1. *λ ist T-Norm genau dann, wenn $DUAL(\lambda)$ eine S-Norm ist.*
2. *λ ist S-Norm genau dann, wenn $DUAL(\lambda)$ eine T-Norm ist.*
3. *λ ist Konjunktionsskelett genau dann, wenn $DUAL(\lambda)$ ein Disjunktionsskelett ist.*
4. *λ ist Disjunktionsskelett genau dann, wenn $DUAL(\lambda)$ ein Konjunktionsskelett ist.*

Beweis Unmittelbar durch Anwendung von **Theorem 3.2.1**.

Durch Anwendung von **Theorem 3.2.1** auf die **Folgerungen 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3 und 3.1.4** erhält man unmittelbar

Folgerung 3.2.3
Die Maximum-Alternative vel_{m} mit

$$vel_{\mathrm{m}}(x,y) =_{def} max(x,y) \qquad (x,y \in \langle 0,1 \rangle)$$

ist eine stetige, idempotente S-Norm.

Folgerung 3.2.4
Die Bold-Alternative vel_{b} und die algebraische Alternative vel_{a} mit

$$\begin{aligned} vel_{\mathrm{b}}(x,y) &=_{def} min(1, x+y) \qquad (x,y \in \langle 0,1 \rangle) \\ vel_{\mathrm{a}}(x,y) &=_{def} x + y - x \cdot y \end{aligned}$$

*sind archimedische S-Normen, die jedoch **nicht** idempotent sind.*

Folgerung 3.2.5
Die schwach-drastische Alternative vel_{sd} mit

$$\left.\begin{aligned} vel_{\mathrm{sd}}(0,y) &=_{def} y \\ vel_{\mathrm{sd}}(x,0) &=_{def} x \\ vel_{\mathrm{sd}}(x,y) &=_{def} 1 \quad \text{falls } 0 < x \leqq 1 \text{ und } 0 < y \leqq 1 \end{aligned}\right. \qquad (x,y \in \langle 0,1 \rangle)$$

ist eine S-Norm, die jedoch weder stetig noch idempotent ist.

Folgerung 3.2.6
Die drastische Alternative vel_{d} *mit*

$$vel_{\mathrm{d}}(x,y) =_{def} \begin{cases} 1 & \text{, falls } \begin{array}{r} 0 < x \leqq 1 \\ \text{oder} \quad 0 < y \leqq 1 \end{array} \\ 0 & \text{, falls } x = 0 \text{ und } y = 0 \end{cases} \qquad (x, y \in \langle 0, 1 \rangle)$$

ist ein Alternativskelett, d. h. es gelten S_0, S_2, S_3, S_4;

vel_{d} *erfüllt jedoch nicht* S_1, *ist also keine S-Norm; ferner ist* vel_{d} ***nicht*** *stetig und auch* ***nicht*** *idempotent.*

Analog zu den T-Normen hat man, da die bisher betrachteten Alternativen für viele Anwendungen ungeeignet sind, weitere S-Normen, meistens als parameterabhängige Klassen, definiert, untersucht und angewendet.

Wir betrachten als erstes die „YAGER-Klasse“ von S-Normen.

Definition 3.2.3
Als Parameter sei wieder (wie in **Definition 3.1.3***) eine reelle Zahl* w *mit* $0 < w < +\infty$ *gegeben.*

Mit YAGER *definieren wir für* $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$

$$vel_{\mathrm{Y}}(w; x, y) =_{def} min\left(1, (x^w + y^w)^{\frac{1}{w}}\right)$$

Folgerung 3.2.7
Für jedes fixierte w *mit* $0 < w < +\infty$ *sind die Funktionen* $vel_{\mathrm{Y}}(w; ., .)$ *und* $et_{\mathrm{Y}}(w; ., .)$ *dual zueinander.*

Theorem 3.2.8

1. *Für jeden fixierten Parameterwert* w *mit* $0 < w < +\infty$ *ist* $vel_{\mathrm{Y}}(w; ., .)$ *eine archimedische S-Norm, die somit* ***nicht*** *idempotent ist.*

2. *Für jedes* $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$ *existiert* $\lim\limits_{w \to +\infty} vel_{\mathrm{Y}}(w; x, y)$ *und es gilt*

$$\lim_{w \to +\infty} vel_{\mathrm{Y}}(w; x, y) = vel_{\mathrm{m}}(x, y) = max(x, y).$$

3. $vel_{\mathrm{Y}}(1; x, y) = vel_{\mathrm{b}}(x, y) = min(1, x + y)$

4. $vel_{\mathrm{Y}}(2; x, y) = min\left(1, \sqrt[2]{x^2 + y^2}\right)$

Beweis
Analog zu **Theorem 3.1.5**. Hat man eines der **Theoreme 3.1.5** oder **3.2.8** bereits bewiesen, kann man das andere durch Dualisieren unmittelbar mit **Folgerung 3.2.7** herleiten. ■

Analog zu Abschnitt 3.1 werden durch die folgende Tabelle weitere wichtige Klassen von S-Normen angegeben, wobei zu beachten ist, daß alle Funktionen aus dieser Tabelle zu den entsprechenden Funktionen aus der Tabelle der T-Normen **dual** sind.

Quelle	Definition der Klasse	Gültigkeit des Parameters
Schweizer & Sklar [37]	$1 - max\left(0, (1-x)^{-p} + (1-y)^{-p} - 1\right)^{-\frac{1}{p}}$	$p \in (-\infty, +\infty)$
Hamacher [22]	$\dfrac{x + y - (2-\gamma) \cdot x \cdot y}{1 - (1-\gamma) \cdot x \cdot y}$	$\gamma \in (0, +\infty)$
Frank [16]	$1 - log_s\left(1 + \dfrac{(s^{1-x} - 1) \cdot (s^{1-y} - 1)}{s - 1}\right)$	$s \in (0, +\infty)$
Yager [45]	$min\left(1, (x^w + y^w)^{\frac{1}{w}}\right)$	$w \in (0, +\infty)$
Dubois & Prade [13]	$\dfrac{x + y - x \cdot y - min(x, y, 1-\alpha)}{max(1-x, 1-y, \alpha)}$	$\alpha \in (0, 1)$
Dombi [12]	$\dfrac{1}{1 + \left(\left(\frac{1}{x} - 1\right)^{-\lambda} + \left(\frac{1}{y} - 1\right)^{-\lambda}\right)^{-\frac{1}{\lambda}}}$	$\lambda \in (0, +\infty)$

Theorem 3.2.9
Sämtliche in der obigen Tabelle beschriebenen Funktionen sind (für jeden fixierten Parameterwert) stetige S-Normen.

Beweis
Direkter Beweis oder Ableitung aus **Theorem 3.1.6** mittels Dualisierung. ■

Wir stellen zum Schluß die dualen Klassen gegenüber:

Quelle	Definition der Klassen		Gültigkeit des Parameters
Schweizer & Sklar [37]	T-Norm:	$max\left(0, x^{-p} + y^{-p} - 1\right)^{-\frac{1}{p}}$	$p \in (-\infty, +\infty)$
	S-Norm:	$1 - max\left(0, (1-x)^{-p} + (1-y)^{-p} - 1\right)^{-\frac{1}{p}}$	
Hamacher [22]	T-Norm:	$\dfrac{x \cdot y}{\gamma + (1-\gamma) \cdot (x + y - x \cdot y)}$	$\gamma \in (0, +\infty)$
	S-Norm:	$\dfrac{x + y - (2-\gamma) \cdot x \cdot y}{1 - (1-\gamma) \cdot x \cdot y}$	
Frank [16]	T-Norm:	$log_s\left(1 + \dfrac{(s^x - 1) \cdot (s^y - 1)}{s - 1}\right)$	$s \in (0, +\infty)$
	S-Norm:	$1 - log_s\left(1 + \dfrac{(s^{1-x} - 1) \cdot (s^{1-y} - 1)}{s - 1}\right)$	
Yager [45]	T-Norm:	$1 - min\left(1, ((1-x)^w + (1-y)^w)^{\frac{1}{w}}\right)$	$w \in (0, +\infty)$
	S-Norm:	$min\left(1, (x^w + y^w)^{\frac{1}{w}}\right)$	
Dubois & Prade [13]	T-Norm:	$\dfrac{x \cdot y}{max(x, y, \alpha)}$	$\alpha \in (0, 1)$
	S-Norm:	$\dfrac{x + y - x \cdot y - min(x, y, 1-\alpha)}{max(1-x, 1-y, \alpha)}$	
Dombi [12]	T-Norm:	$\dfrac{1}{1 + \left(\left(\frac{1}{x} - 1\right)^{\lambda} + \left(\frac{1}{y} - 1\right)^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}$	$\lambda \in (0, +\infty)$
	S-Norm:	$\dfrac{1}{1 + \left(\left(\frac{1}{x} - 1\right)^{-\lambda} + \left(\frac{1}{y} - 1\right)^{-\lambda}\right)^{-\frac{1}{\lambda}}}$	

Im folgenden formulieren wir für S-Normen das Analogon des Darstellungssatzes, den wir in Abschnitt 3.1 für T-Normen angegeben haben.

Gegeben sei eine Abbildung

$$g : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,+\infty\rangle \,.$$

Definition 3.2.4

1. *g heiße streng monoton*
   $=_{def}$ *Für jedes $x,y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:*

$$\textit{Wenn } x < y \,,\ \textit{so } g(x) < g(y)$$

2. *Es sei nun g streng monoton mit $g(0) = 0$. Dann definiert man die „Pseudoinverse“ $g^{(-1)}$ von g wie folgt:*

$$g^{(-1)}(x) =_{def} \begin{cases} y & \text{, falls } x \in \langle 0, g(1)\rangle \text{ und } g(y) = x \\ 1 & \text{, falls } x \in (g(1), +\infty\rangle. \end{cases}$$

   Dann gilt offenbar

$$g^{(-1)} : \langle 0,+\infty\rangle \to \langle 0,1\rangle$$

   und

$$g^{(-1)}(g(x)) = x \qquad \text{für alle } x \in \langle 0,1\rangle.$$

Theorem 3.2.10
Ist σ eine archimedische T-Norm, so existiert eine Funktion $g : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,+\infty\rangle$ mit

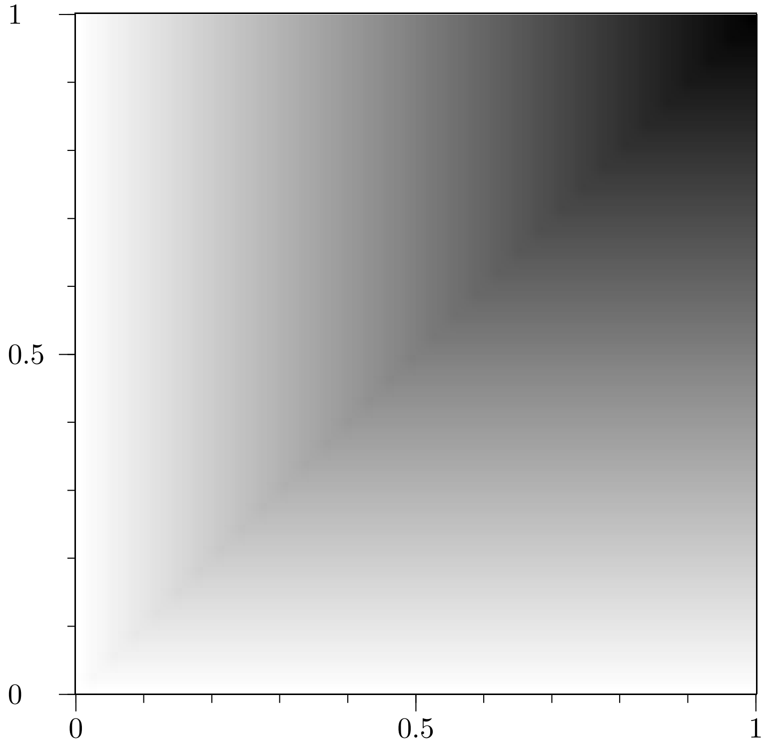
1. *g ist streng monoton*
2. *$g(0) = 0$*
3. *g ist stetig*
4. *$\sigma(x,y) = g^{(-1)}(g(x) + g(y))$ für jedes $x,y \in \langle 0,1\rangle$.*

Beweis
Siehe [26]. ■

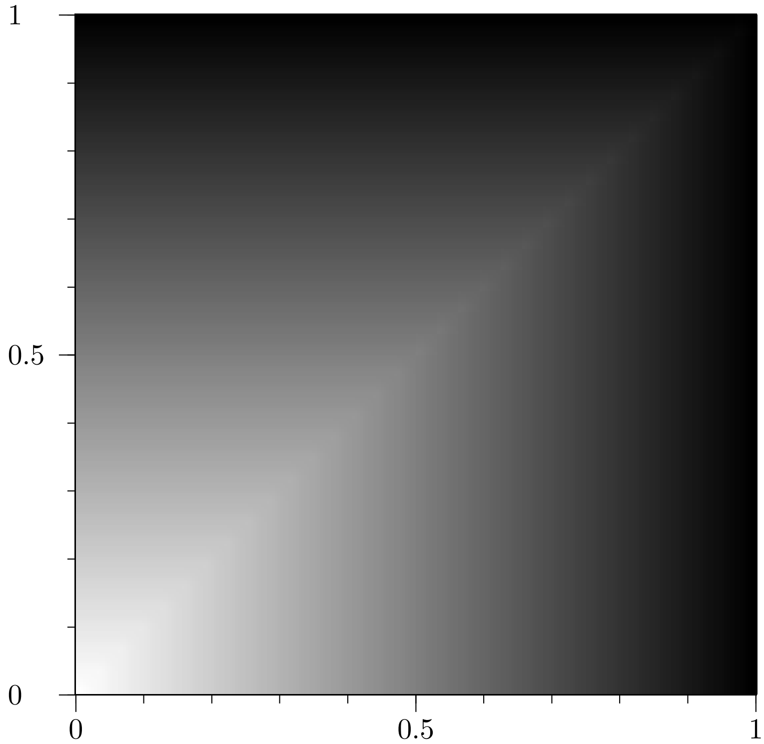
Eine archimedische S-Norm σ heißt nilpotent, falls $g(1) < +\infty$ gilt. Ist σ streng monoton (steigend), d. h. folgt $\sigma(x,y) < \sigma(x',y')$ aus $x < x'$ oder $y < y'$ für $x,x',y,y' \in \langle 0,1\rangle$, so gilt $g(1) = +\infty$.

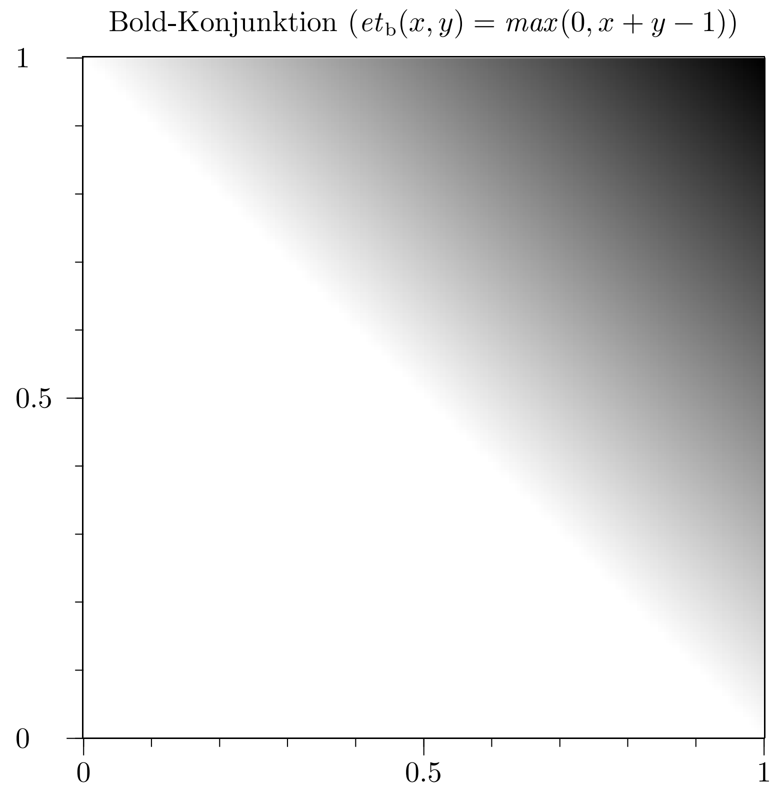
Zum Schluß des Abschnitts 3.2 veranschaulichen wir eine Reihe von T- und S-Normen durch „Grauwertbilder“, die dem Buch von Tilli [42] entnommen sind:

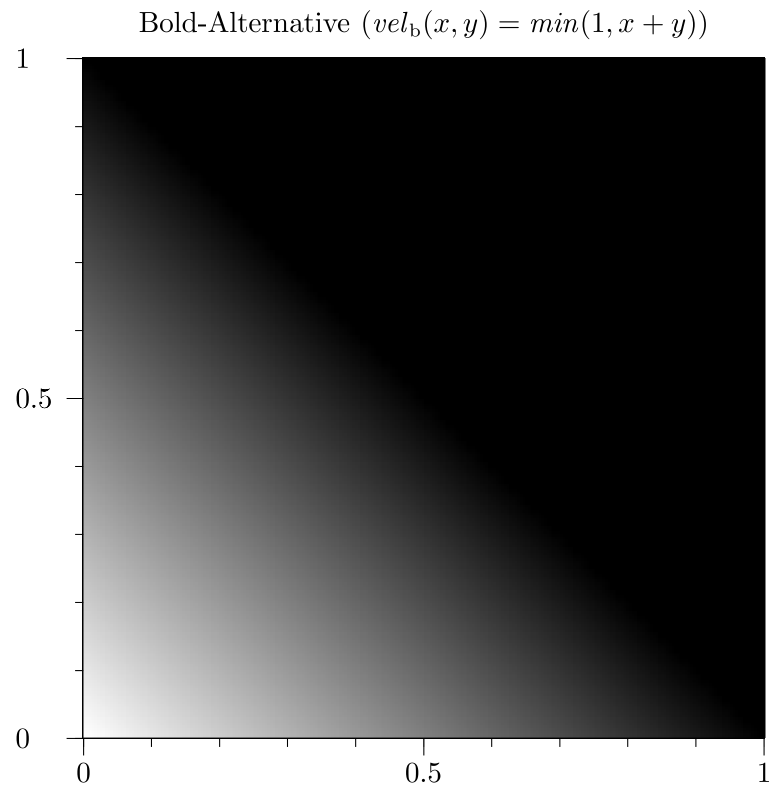
Minimum-Konjunktion ($et_{\mathrm{m}}(x, y) = min(x, y)$)



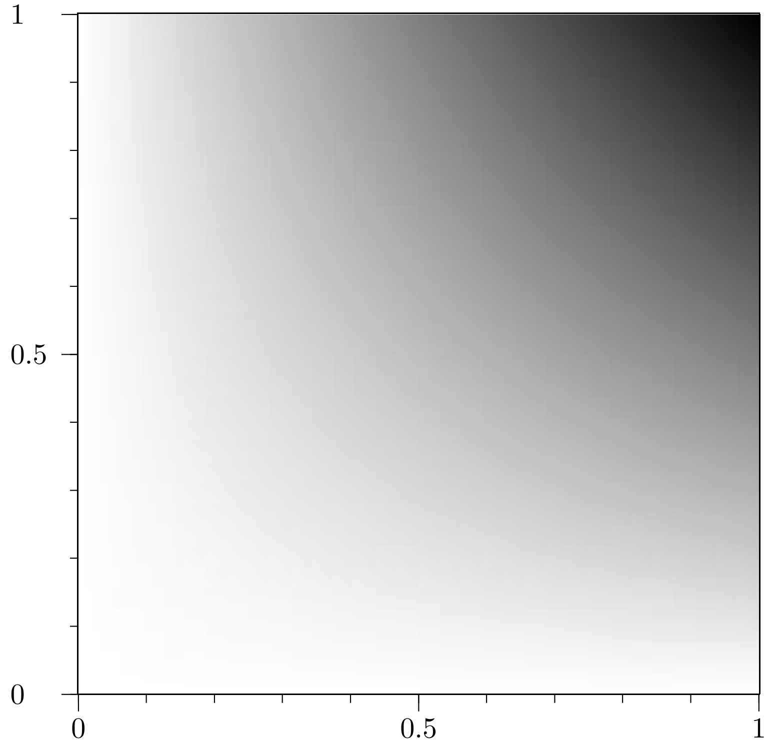
Maximum-Alternative ($vel_{\mathrm{m}}(x, y) = max(x, y)$)



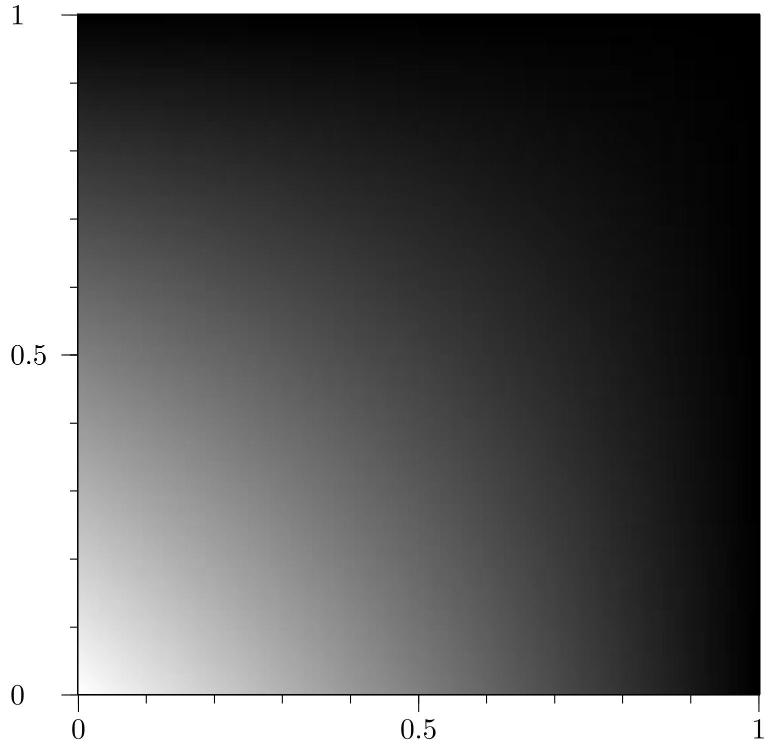

Bold-Konjunktion ($et_{\mathrm{b}}(x,y) = max(0, x+y-1)$)
1
0.5
0
0
0.5
1

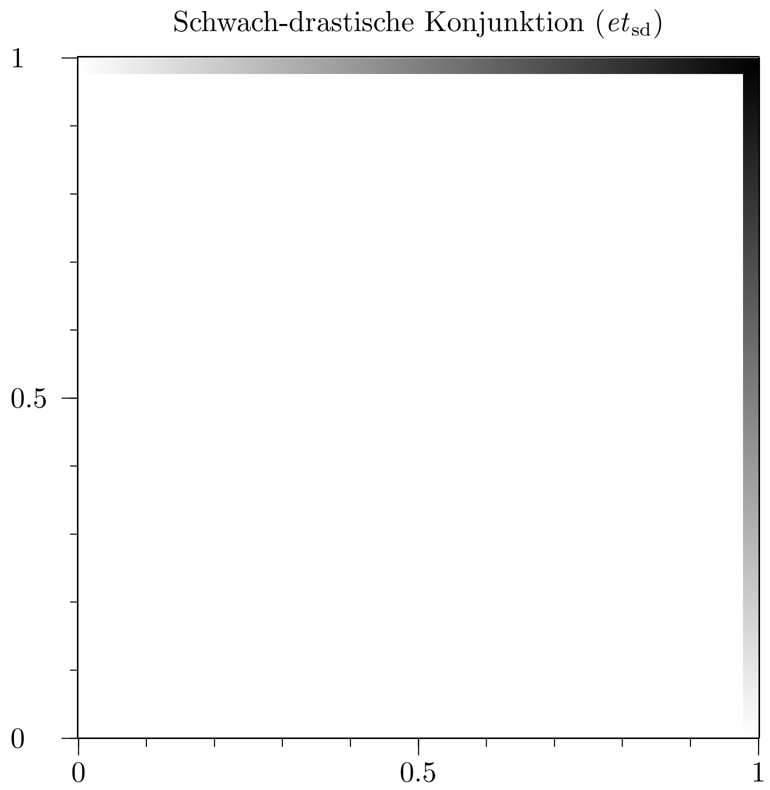

Bold-Alternative ($vel_{\mathrm{b}}(x,y) = min(1, x+y)$)
1
0.5
0
0
0.5
1

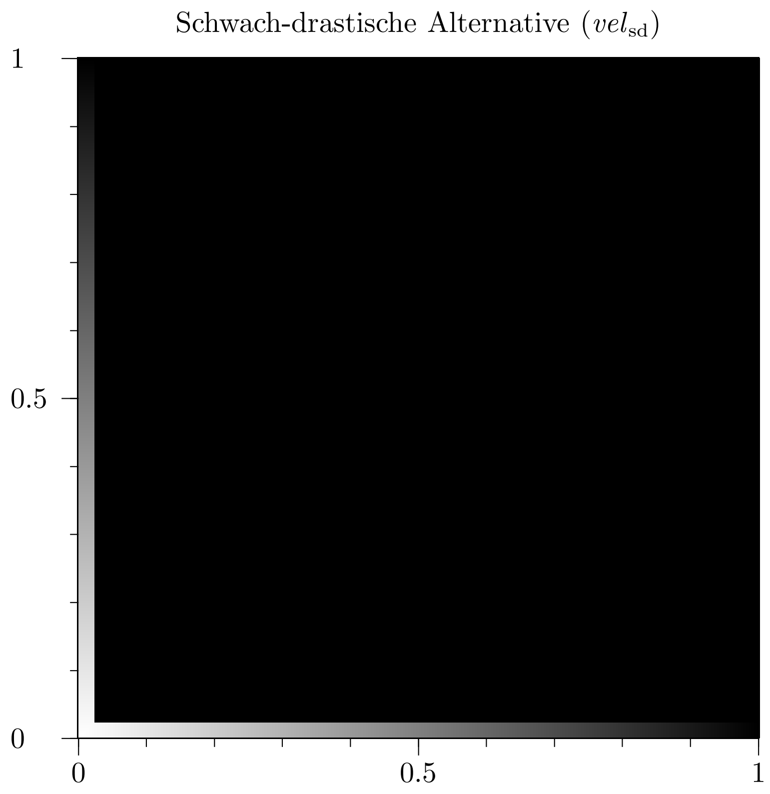
Algebraische Konjunktion ($et_{\mathrm{a}}(x, y) = x \cdot y$)



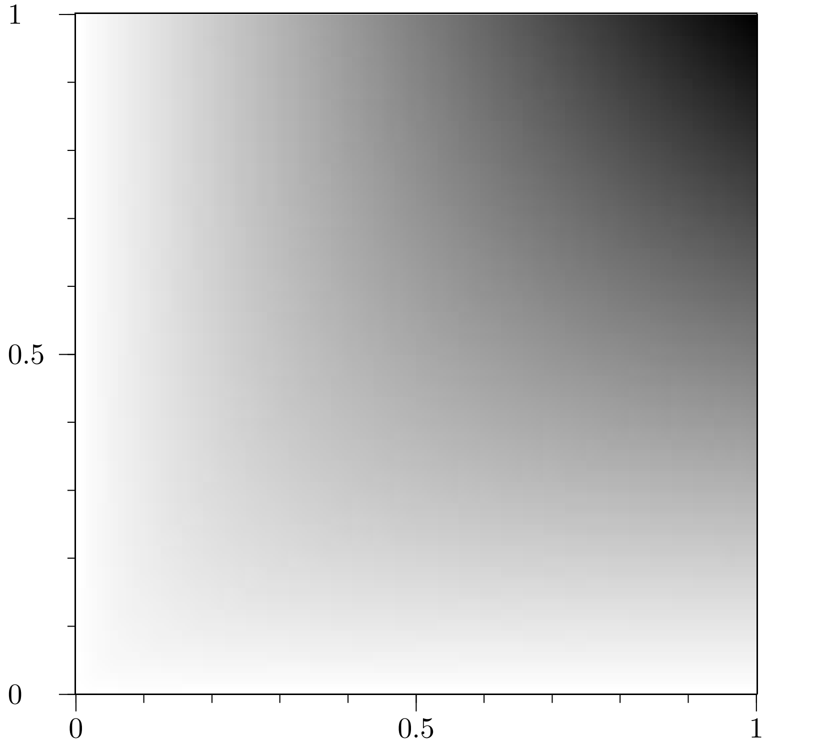
Algebraische Alternative ($vel_{\mathrm{a}}(x, y) = x + y - x \cdot y$)



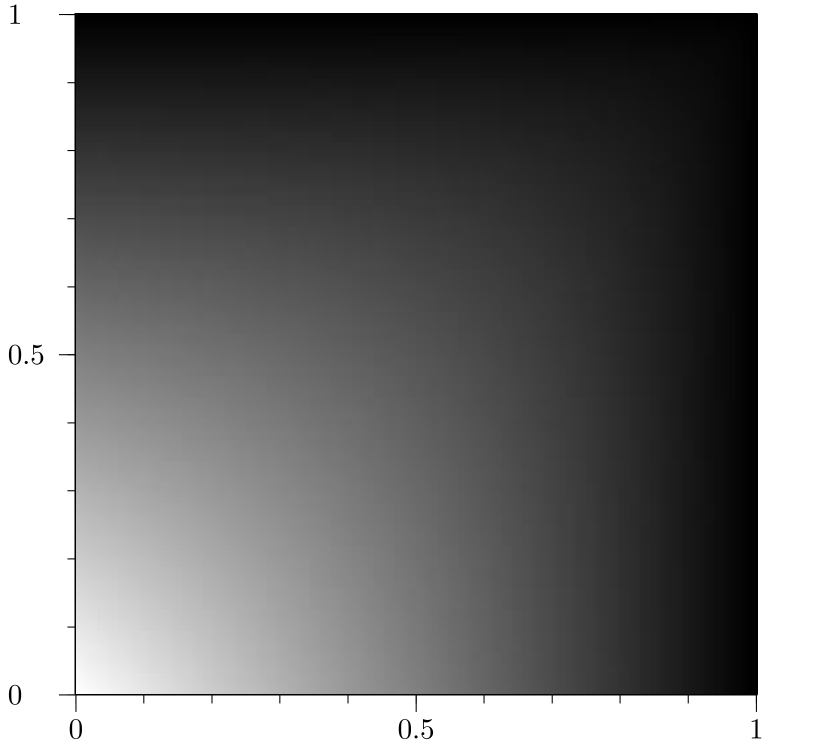

Schwach-drastische Konjunktion (et_{sd})
1
0.5
0
0
0.5
1


Schwach-drastische Alternative (vel_{sd})
1
0.5
0
0
0.5
1

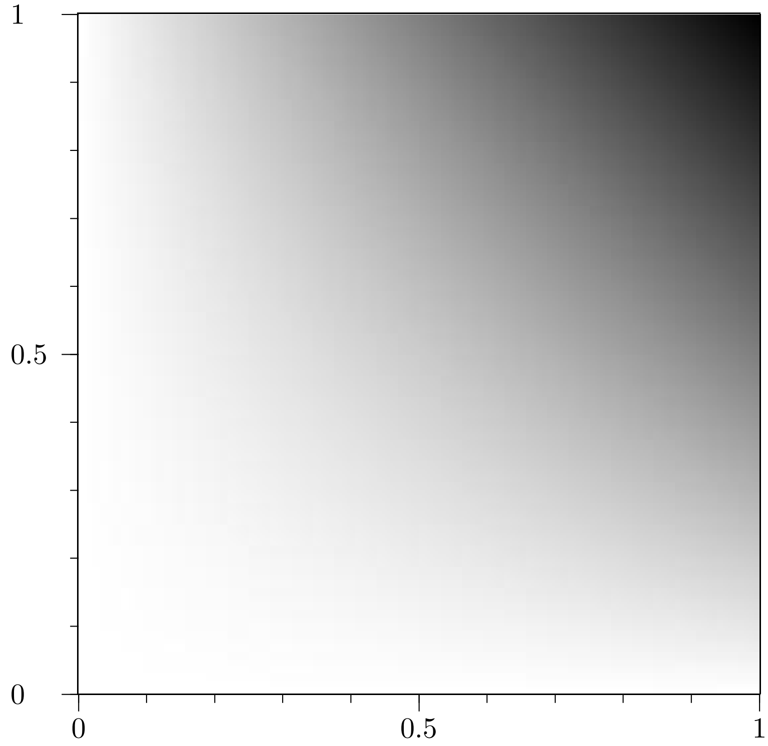
Hamacher-Konjunktion mit Parameter 0 ($et_{\mathrm{H}}(0; x, y) = \frac{xy}{x+y-xy}$)



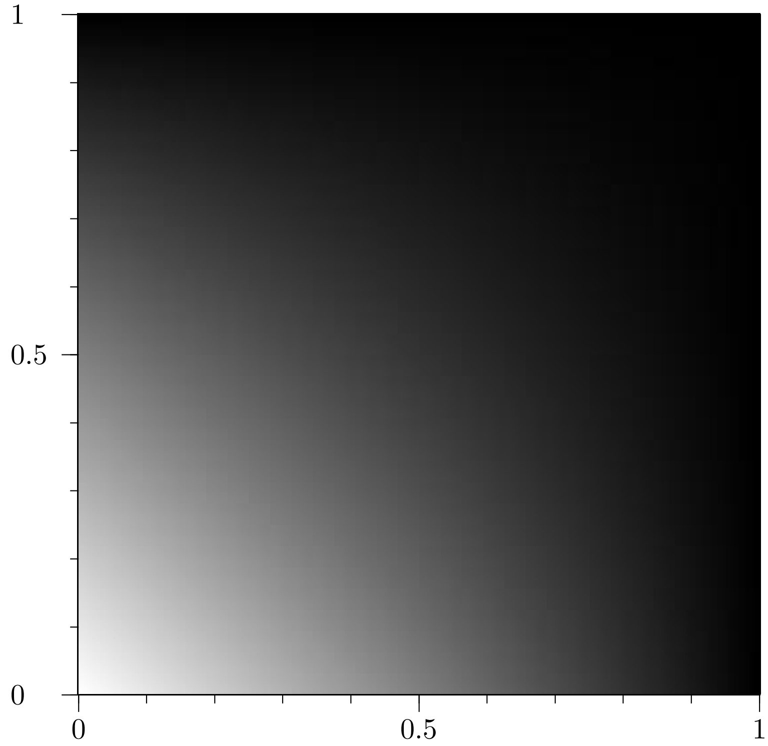
Hamacher-Alternative mit Parameter 0 ($vel_{\mathrm{H}}(0; x, y) = \frac{x+y-2xy}{1-xy}$)



Hamacher-Konjunktion mit Parameter 2 ($et_{\mathrm{H}}(2; x, y) = \frac{xy}{2-(x+y-xy)}$)



Hamacher-Alternative mit Parameter 2 ($vel_{\mathrm{H}}(2; x, y) = \frac{x+y}{1+xy}$)



3.3 Die Funktion *min* bzw. *max* als ausgezeichnete T-Norm bzw. S-Norm

Zur Einstimmung erinnern wir an **Folgerung 2.4.1**, die besagt, daß für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ die folgende Kette von Ungleichungen gilt:

$$et_{\mathrm{d}}(x,y) \leqq et_{\mathrm{sd}}(x,y) \leqq et_{\mathrm{b}}(x,y) \leqq et_{\mathrm{a}}(x,y) \leqq et_{\mathrm{m}}(x,y)$$

sowie an **Folgerung 2.4.2**, die besagt, daß für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$vel_{\mathrm{m}}(x,y) \leqq vel_{\mathrm{a}}(x,y) \leqq vel_{\mathrm{b}}(x,y) \leqq vel_{\mathrm{sd}}(x,y) \leqq vel_{\mathrm{d}}(x,y).$$

Das folgende Theorem **verallgemeinert** die oben formulierten Abschätzungen.

Theorem 3.3.1

1. *Ist τ eine T-Norm, so gilt für jedes $x, y \in \langle 0, 1\rangle$:*

$$et_{\mathrm{sd}}(x,y) \leqq \tau(x,y) \leqq min(x,y).$$

2. *Ist σ eine S-Norm, so gilt für jedes $x, y \in \langle 0, 1\rangle$:*

$$max(x,y) \leqq \sigma(x,y) \leqq vel_{\mathrm{sd}}(x,y).$$

Beweis
ad 1

1.1 Wir zeigen als erstes

$$et_{\mathrm{sd}}(x,y) \leqq \tau(x,y).$$

Fall 1.1.1 $0 \leqq x < 1$ und $0 \leqq y < 1$.
Dann gilt nach Definition von et_{sd}

$$et_{\mathrm{sd}}(x,y) = 0,$$

also ist wegen

$$0 \leqq \tau(x,y)$$

die Behauptung 1.1 in diesem Fall richtig.

Fall 1.1.2 $x = 1$.
Nach Definition von et_{sd} gilt dann

$$et_{\mathrm{sd}}(1,y) = y.$$

Ferner folgt in diesem Fall für τ

$$\begin{aligned} \tau(1,y) &= \tau(y,1) && \text{mit } \mathrm{T}_3 \\ &= y && \text{mit } \mathrm{T}_1, \end{aligned}$$

also gilt auch in Fall 1.1.2 die Behauptung 1.1.

Fall 1.1.3 $y = 1$.
Nach Definition von et_{sd} gilt dann analog

$$et_{\mathrm{sd}}(x,1) = x.$$

Ferner folgt in diesem Fall für τ mit T_1, daß

$$\tau(x,1) = x,$$

also gilt auch in Fall 1.1.3 die Behauptung 1.1.

1.2 Wir zeigen als zweites, daß

$$\tau(x,y) \leqq min(x,y).$$

Mit T_2 (Monotonie) für τ erhalten wir

$$\tau(x,y) \leqq \tau(x,1). \tag{3.1}$$

Ferner gilt wegen T_1 für τ die Gleichung

$$\tau(x,1) = x, \tag{3.2}$$

also folgt aus (3.1) und (3.2)

$$\tau(x,y) \leqq x. \tag{3.3}$$

Nun wollen wir noch

$$\tau(x,y) \leqq y \tag{3.4}$$

zeigen; denn aus (3.3) und (3.4) folgt

$$\tau(x,y) \leqq min(x,y), \tag{3.5}$$

und (3.5) ist gerade unsere Behauptung 1.2.
Um (3.4) zu zeigen, beginnen wir mit

$$\tau(x,y) = \tau(y,x), \tag{3.6}$$

was wegen der Kommutativität von τ (T_3) gilt. Analog zu (3.1) und (3.2) haben wir

$$\tau(y,x) \leqq \tau(y,1) \tag{3.7}$$

und

$$\tau(y,1) = y, \tag{3.8}$$

also mit (3.7) und (3.8) folgt

$$\tau(y,x) \leqq y, \tag{3.9}$$

also mit (3.6) und (3.9) ergibt sich (3.4).

ad 2

$$max(x,y) \leqq \sigma(x,y) \leqq vel_{\mathrm{sd}}(x,y)$$

Diese Behauptung wird analog zu Behauptung 1 bewiesen, indem man die Definition der schwach drastischen Alternative vel_{sd} und die Eigenschaften einer S-Norm verwendet.

■

Bemerkungen

1. Beim Beweis der Behauptung 1.1

$$et_{\mathrm{sd}}(x,y) \leqq \tau(x,y)$$

haben wir allein die Kommutativität, also T_3, und die Eigenschaft

$$\tau(x,1) = x,$$

als Teil von T_1, verwendet. Die Bedingung

$$\tau(x,0) = 0$$

als „zweiter Teil" von T_1, ferner die Monotonie (T_2) und die Assoziativität (T_4) wurden nicht benutzt; also gilt die Abschätzung für eine wesentlich größere Klasse von Funktionen.

2. Im Buch [24] von Klir und Folger wird auf Seite 53 die Abschätzung

$$et_{\mathrm{sd}}(x,y) \leqq \tau(x,y)$$

nicht wie hier für T-Normen, sondern sogar für Konjunktionsskelette, d. h. wenn Bedingung T_1 durch T_0 ersetzt wird, „bewiesen" (siehe „Theorem 2.11").

Dieses Theorem ist falsch, wie man mit Hilfe der **drastischen** Konjunktion et_{d} zeigt; denn et_{d} ist ein Konjunktionsskelett, also müßte

$$et_{\mathrm{sd}}(x,y) \leqq et_{\mathrm{d}}(x,y)$$

für beliebige $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gelten, was aber für z. B. $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$ falsch ist, denn

$$et_{\mathrm{sd}}\left(\tfrac{1}{2},1\right) = \tfrac{1}{2}$$
$$et_{\mathrm{d}}\left(\tfrac{1}{2},1\right) = 0.$$

Die Ursache für diesen Fehlschluß ist, daß im „Beweis" von „Theorem 2.11" für Konjunktionsskelette die Gleichung

$$\tau(x,1) = x$$

für beliebige $x \in \langle 0,1\rangle$ benutzt wird, die allgemein **nicht** gilt, wie et_{d} zeigt.

3. Im Buch [24] von Klir und Folger wird auf Seite 53 (siehe „Theorem 2.10") die Abschätzung

$$\tau(x,y) \leqq min(x,y)$$

nicht wie hier für T-Normen, sondern sogar für Konjunktionsskelette bewiesen.

Dieser „Beweis" ist ebenfalls falsch, da darin für Konjunktionsskelette Bedingung T_1 benutzt und „bewiesen" wird; wogegen wir wissen, daß für beliebige Konjunktionsskelette T_1 nicht gilt, wie et_{d} zeigt (siehe Bemerkung 2).

Aufgabe 3.3.1 *Man prüfe nach, ob „Theorem 2.10" aus [24] (d. h. Bedingung 1.2 des obigen Beweises), d. h.*

$$\tau(x,y) \leqq min(x,y) \qquad (x,y \in \langle 0,1\rangle)$$

für beliebige Konjunktionsskelette τ gilt.

Hinweis: *Man finde ein Konjunktionsskelett τ, für das die obige Abschätzung **nicht** gilt.*

4. Analog zu den Bemerkungen zu „Theorem 2.11“ aus [24] ist auch „Theorem 2.9“ (ebenfalls Seite 53 dieses Buches) falsch. Er ist zwar für S-Normen richtig (siehe Aussage 2 von unserem **Theorem 3.3.1**), jedoch nicht für beliebige Alternativskelette, wie in [24] behauptet wird. Ein Gegenbeispiel ist die drastische Alternative vel_d, die ein Alternativskelett ist, für die jedoch **nicht** allgemein (d. h. für alle $x, y \in \langle 0,1 \rangle$) die Abschätzung
$$vel_\mathrm{d}(x,y) \leqq vel_\mathrm{sd}(x,y)$$
gilt. So gilt z. B.
$$vel_\mathrm{d}\left(\tfrac{1}{2}, 0\right) = 1,$$
jedoch
$$vel_\mathrm{sd}\left(\tfrac{1}{2}, 0\right) = \tfrac{1}{2}.$$

5. Analog zu den Bemerkungen zu „Theorem 2.10“ aus [24] (siehe Bemerkung 3) ist auch der Beweis von „Theorem 2.8“ aus diesem Buch (Seite 52) falsch, weil dort für Alternativskelette σ die Bedingung

   Für alle $x, y \in \langle 0,1 \rangle$ gilt:
$$\sigma(x,0) = x$$
   (als Teil von S_1) „bewiesen“ und benutzt wird, was falsch ist, wie die drastische Alternative vel_d zeigt; denn vel_d ist ein Alternativskelett, das jedoch die obige Bedingung verletzt.

Aufgabe 3.3.2 *Man prüfe — analog zu Aufgabe 3.3.1 — nach, ob „Theorem 2.8“ aus [24], d. h.*
$$max(x,y) \leqq \sigma(x,y) \qquad (x, y \in \langle 0,1 \rangle)$$
für beliebige Alternativskelette σ gilt.

Hinweis: *Man finde ein Alternativskelett σ, für das die obige Abschätzung **nicht** gilt.*

Das folgende Theorem gibt eine Charakterisierung der Funktionen *min* und *max* in der Klasse aller T- bzw. S-Normen.

Theorem 3.3.2

1. *Ist τ eine **idempotente** T-Norm, so gilt für jedes $x, y \in \langle 0,1 \rangle$:*
$$\tau(x,y) = min(x,y).$$
2. *Ist σ eine **idempotente** S-Norm, so gilt für jedes $x, y \in \langle 0,1 \rangle$:*
$$\sigma(x,y) = max(x,y).$$

Beweis

ad 1 Nach Behauptung 1 von **Theorem 3.3.1** gilt für jedes $x, y \in \langle 0,1 \rangle$:
$$\tau(x,y) \leqq min(x,y),$$
also genügt es, noch
$$min(x,y) \leqq \tau(x,y)$$
zu beweisen.

Fall 1. $x = y$.

Dann gilt trivial

$$min(x, y) = x = y,$$

ferner gilt nach T_6 (d. h. Idempotenz für τ)

$$\tau(x, y) = x = y,$$

also ist

$$min(x, y) \leqq \tau(x, y)$$

in diesem Fall trivial erfüllt.

Fall 2 $x < y$.

Wir haben zunächst

$$min(x, y) = x. \tag{3.10}$$

Um also die Ungleichung

$$min(x, y) \leqq \tau(x, y)$$

zu beweisen, genügt es nach (3.10), in diesem Fall

$$x \leqq \tau(x, y) \tag{3.11}$$

zu zeigen.

Nun gilt nach T_6 (Idempotenz für τ), daß

$$x = \tau(x, x), \tag{3.12}$$

ferner folgt aus $x < y$ mit T_2 (Monotonie) für τ

$$\tau(x, x) \leqq \tau(x, y), \tag{3.13}$$

also folgt (3.11) aus (3.12) und (3.13).

Fall 3 $y < x$. Man schließt analog zum vorhergehenden Fall.

ad 2 Diese Behauptung wird durch dieselbe Fallunterscheidung wie für Behauptung 1 bewiesen. Im Beweis wird die Idempotenz von σ benutzt. Ferner ist zu beachten, daß für $x \leqq y$

$$max(x, y) = y$$

gilt.

■

Probleme

In der neueren Literatur sind die Auswirkungen des Stetigkeitsaxioms T_5 für T-Normen (bzw. Konjunktionsskelette) sowie S_5 für S-Normen (bzw. Alternativskelette) untersucht worden.

Wir stellen demgemäß die folgenden Fragen:

1. Folgt T_1 aus T_0, T_2, T_3, T_4 und T_5?

2. Folgt S_1 aus S_0, S_2, S_3, S_4 und S_5?

3. Gilt **Theorem 3.3.1**, wenn man darin T_1 bzw. S_1 durch T_0 **und** T_5 bzw. S_0 **und** S_5 ersetzt?

4. Folgt T_3 bzw. S_3 (Kommutativität) aus T_1, T_2, T_4 und T_5 bzw. S_1, S_2, S_4 und S_5?

Zum Abschluß der Betrachtungen in Abschnitt 3.3 zitieren wir aus der betreffenden Literatur noch den folgenden Satz, der eine „gleichzeitige“ („parallele“) Charakterisierung der Funktionen *min* und *max* mit Hilfe von Funktionenpaaren τ und σ, die „Normen-ähnlich“ sind, liefert.

Gegeben seien Funktionen τ und σ mit

$$\tau, \sigma : \langle 0, 1\rangle^2 \to \langle 0, 1\rangle \,.$$

Theorem 3.3.3
Voraussetzungen:

1. *$\tau(1,1) = 1$ und $\sigma(0,0) = 0$.*

2. *τ und σ sind monoton (T_2 bzw. S_2).*

3. *τ und σ sind kommutativ (T_3 bzw. S_3).*

4. *τ und σ sind assoziativ (T_4 bzw. S_4).*

5. *τ und σ sind stetig (T_5 bzw. S_5).*

6. *Für jedes $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:*

$$\tau(x,y) \leqq min(x,y) \;\text{ und }\; max(x,y) \leqq \sigma(x,y).$$

7. *τ und σ sind gegenseitig distributiv, d. h. es gilt für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$:*

$$\begin{aligned} \tau(x, \sigma(y,z)) &= \sigma(\tau(x,y), \tau(x,z)) \qquad \text{und} \\ \sigma(x, \tau(y,z)) &= \tau(\sigma(x,y), \sigma(x,z)). \end{aligned}$$

8. *Für jedes $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt: Wenn $x < y$, so*

$$\begin{aligned} \tau(x,x) &< \tau(y,y) \qquad \text{und} \\ \sigma(x,x) &< \sigma(y,y). \end{aligned}$$

Behauptung:
Für jedes $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$\begin{aligned} \tau(x,y) &= min(x,y), \\ \sigma(x,y) &= max(x,y). \end{aligned}$$

Beweis
Wir führen den Beweis nicht aus, sondern verweisen auf die Arbeit [7] von Bellman und Giertz, wo dieser Satz erstmals formuliert und bewiesen wurde. ∎

Inzwischen ist dieser Satz (einschließlich Beweis) in die betreffende Lehrbuchliteratur aufgenommen worden.

3.4 Theorie der Negationen

Negationen werden grundsätzlich als *einstellige* Funktionen (Verknüpfungen) definiert.

In der zweiwertigen Logik gibt es genau vier einstellige Funktionen, die durch die folgende Tabelle charakterisiert sind:

	β_0	β_1	β_2	β_3
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1

Offenbar ist $\beta_1 \approx 01 \approx 1$ die übliche Negation, während die übrigen nicht als Negationen angesehen werden können.

β_0 : „*Falsum*"-Funktion

β_2 : „Identität"

β_3 : „*Verum*"-Funktion

In der dreiwertigen Logik (mit der Menge $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ ihrer Wahrheitswerte) gibt es offenbar 27 einstellige Funktionen. Wir wollen diese Funktionen nicht sämtlich hier auflisten, sondern durch ein einfaches Verfahren diejenigen herausfiltern, die als (dreiwertige) Negationen in Frage kommen.

Gegeben seien eine n-stellige **zwei**wertige Funktion β,

$$\beta : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

sowie eine n-stellige **drei**wertige Funktion δ, d. h.

$$\delta : \left\{0, \tfrac{1}{2}, 1\right\}^n \to \left\{0, \tfrac{1}{2}, 1\right\}.$$

In Analogie zum Begriff der ŁUKASIEWICZschen Erweiterung definieren wir

Definition 3.4.1

*δ ist eine **dreiwertige** Erweiterung von β*

$=_{def}$ *Für jedes $x_1, \ldots, x_n \in \{0,1\}$ gilt:*

$$\delta(x_1, \ldots, x_n) = \beta(x_1, \ldots, x_n).$$

Offenbar gibt es genau drei dreiwertige Erweiterungen der zweiwertigen Negation β_1, die wir durch die folgende Tabelle charakterisieren:

	δ	δ'	δ''
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
1	0	0	0

Die Funktion δ' ist offenbar eine Einschränkung der ŁUKASIEWICZschen Negation $non_{\text{Ł}}$ auf den dreiwertigen Bereich $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ (siehe Abschnitt 2.4), während wir δ als Einschränkung der drastischen Negation non_{d} mit

$$non_{\text{d}}(x) =_{def} \begin{cases} 1 & \text{, falls } x = 0 \\ 0 & \text{, falls } 0 < x \leqq 1 \end{cases} \qquad (x \in \langle 0,1 \rangle)$$

und δ'' als Einschränkung der schwach-drastischen Negation non_{sd} mit

$$non_{\text{sd}}(x) =_{def} \begin{cases} 1 & \text{, falls } 0 \leqq x < 1 \\ 0 & \text{, falls } x = 1 \end{cases} \qquad (x \in \langle 0,1 \rangle)$$

auf den dreiwertigen Bereich $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ interpretieren können.

Erinnerung
Aus Abschnitt 2.4 kennen wir für alle $x \in \langle 0, 1\rangle$ die Abschätzung

$$non_{\mathrm{d}}(x) \leqq non_{\mathrm{L}}(x) \leqq non_{\mathrm{sd}}(x).$$

Entsprechend gilt für alle $x \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$:

$$\delta(x) \leqq \delta'(x) \leqq \delta''(x).$$

Bemerkungen zu den Anwendungen der dreiwertigen Logik in der Logischen Programmierung.

Siehe dazu das Buch von Schmidt [35].

Man weiß, daß die „operationale Behandlung" negierter Anfragen unter dem Aspekt „Negation $\approx$ Fehlschlag" (negation-by-failure) steht.

Die Verwendung dreiwertiger Logik hilft hier weiter. Neben der „**starken**" Negation δ' (formal $\neg A$) wird eine „schwache" Negation (formal $\sim A$) verwendet, deren Wertverlauf durch δ'' bzw. die schwach-drastische Negation non_{sd} gegeben ist.

Ist $VAL(B)$ der Wahrheitswert einer Aussage B in der dreiwertigen Logik, so interpretiert man

1.	$VAL(A) = 1$	: A ist wahr
2.	$VAL(\neg A) = 1$	: A ist falsch
3.	$VAL(\sim A) = 1$	: A ist nicht wahr
4.	$VAL(\sim\neg A) = 1$	: A ist nicht falsch

Wir streben jetzt an, nach dem Vorbild der Theorie der T- und S-Normen Negationen durch Axiome zu charakterisieren.

Wir führen als erstes 5 Bedingungen (Axiome) N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 ein. Dabei folgen wir zum Teil dem Buch [24] von Klir und Folger (siehe die Seiten 38 und 39). Gegeben sei eine Funktion ν mit

$$\nu : \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle\,.$$

Definition 3.4.2
ν heiße ***Negation***
$=_{def}$ *Die folgenden Bedingungen N_1 und N_2 sind erfüllt*

N_1: $\nu(0) = 1$ *und* $\nu(1) = 0$.

N_2: *ν ist eine* ***comonotone*** *Funktion, d. h. für jedes $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:*

$$\textit{Wenn } x \leqq y\,, \textit{ so } \nu(x) \geqq \nu(y).$$

Die im folgenden formulierten Bedingungen N_3, N_4 und N_5 sind Hilfsmittel zur „feineren" Beschreibung von Negationen

N_3: ν ist *stetig*.

N_4: ν ist *involutorisch*, d. h. für jedes $x \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$\nu(\nu(x)) = x.$$

N_5: ν ist *unschärfe-invariant*, d. h. für jedes $x \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$\text{Wenn } 0 < x < 1\,, \text{ so } 0 < \nu(x) < 1.$$

Bemerkung
In dem Buch [24] werden Negationen *Negationsskelette* genannt. Wir finden diese Bezeichnung überflüssig.

Für die ŁUKASIEWICZsche Negation $non_{\text{Ł}}(x) =_{def} 1 - x$ ist der Wahrheitswert $\frac{1}{2}$ als (einziger) Fixpunkt ausgezeichnet, d. h. als einzige reelle Zahl $x \in \langle 0, 1 \rangle$, für die

$$non_{\text{Ł}}(x) = x$$

gilt.

Ferner stellen wir für den Fixpunkt $\frac{1}{2}$ von $non_{\text{Ł}}$ die folgenden Beziehungen fest, wobei $x \in \langle 0, 1 \rangle$ beliebig ist:

1. $x \leqq non_{\text{Ł}}(x)$ genau dann, wenn $x \leqq \frac{1}{2}$.

2. $x \geqq non_{\text{Ł}}(x)$ genau dann, wenn $x \geqq \frac{1}{2}$.

Die folgenden zwei Theoreme stellen diese Beobachtungen in den Zusammenhang beliebiger Negationen.

Theorem 3.4.1
Ist ν eine Negation, so hat ν höchstens einen Fixpunkt.

Beweis
Indirekt, d. h. wir nehmen an, ν habe zwei Fixpunkte x, y mit $x \neq y$ und führen diese Annahme zum Widerspruch. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $x < y$ an. Dann folgt mit der *Comonotonie*, also N_2, für ν, daß $\nu(y) \leqq \nu(x)$. Weil x, y Fixpunkte von ν sind, ergibt sich aus dem letzteren, daß $y \leqq x$, und das ist ein Widerspruch zur Annahme $x < y$. ■

Theorem 3.4.2
Ist ν eine Negation und ist x_0 (der) Fixpunkt von ν, so gilt für jedes $x \in \langle 0, 1 \rangle$:

1. $x \leqq \nu(x)$ genau dann, wenn $x \leqq x_0$.

2. $x \geqq \nu(x)$ genau dann, wenn $x \geqq x_0$.

Beweis
ad 1.

1.1 Wenn $x \leqq \nu(x)$, so $x \leqq x_0$.
Wir schließen indirekt, indem wir annehmen, daß

$$x > x_0. \tag{3.14}$$

Aus (3.14) folgt mit der *Comonotonie* für ν, daß

$$\nu(x) \leqq \nu(x_0). \tag{3.15}$$

Nun ist x_0 nach Voraussetzung Fixpunkt von ν, d. h. es gilt

$$\nu(x_0) = x_0, \tag{3.16}$$

somit folgt aus (3.15) und (3.16), daß

(3.17) $$\nu(x) \leqq x_0.$$

Aus (3.17) folgt mit der Voraussetzung $x \leqq \nu(x)$, daß

(3.18) $$x \leqq x_0,$$

also wegen (3.14) ein Widerspruch.

1.2 Wenn $x \leqq x_0$, so $x \leqq \nu(x)$.
Wir schließen indirekt, indem wir annehmen, daß

(3.19) $$\nu(x) < x.$$

Aus der Voraussetzung $x \leqq x_0$ folgt mit der *Comonotonie* für ν, daß

(3.20) $$\nu(x_0) \leqq \nu(x).$$

Da x_0 ein Fixpunkt für ν ist, haben wir

(3.21) $$x_0 = \nu(x_0),$$

also folgt aus (3.20) und (3.21), daß

(3.22) $$x_0 \leqq \nu(x),$$

also aus (3.19) und (3.22), daß

(3.23) $$x_0 < x.$$

Somit ist (3.23) ein Widerspruch zur Voraussetzung $x \leqq x_0$.

ad 2. Diese Aussage wird analog zu 1 bewiesen.

■

Folgerung 3.4.3
Ist ν eine Negation und x_0 (der) Fixpunkt von ν, so gilt für jedes $x \in \langle 0, 1 \rangle$:

1. *$x < \nu(x)$ genau dann, wenn $x < x_0$.*
2. *$x > \nu(x)$ genau dann, wenn $x > x_0$.*

Beweis
Unmittelbare Folgerung aus **Theorem 3.4.2**, indem man die Aussagen 1 und 2 dieses Theorems kontraponiert. ■

Theorem 3.4.4
Ist ν eine ***stetige*** *Negation, so hat ν mindestens einen Fixpunkt.*

Beweis
Ein Beweis dieses Theorems ergibt sich sehr einfach aus dem *Zwischenwertsatz* aus der Analysis für stetige reelle Funktionen.

Zwischenwertsatz Gegeben sei eine reelle Funktion φ, die in dem abgeschlossenen Intervall $\langle a, b\rangle$ reeller Zahlen (wobei $a < b$) stetig ist. Es sei ferner $\varphi(a) < \varphi(b)$. Dann wird jeder Wert $y \in \langle \varphi(a), \varphi(b)\rangle$ von φ mindestens einmal mit einem Argument $x \in \langle a, b\rangle$ angenommen.

Zum Beweis von **Theorem 3.4.4** betrachten wir die Funktion φ mit

$$\varphi(x) = x - \nu(x) \qquad x \in \langle 0, 1\rangle.$$

Weil $\nu(x)$ in $\langle 0, 1\rangle$ stetig ist, ist auch $\varphi(x)$ in $\langle 0, 1\rangle$ stetig. Ferner gilt

$$\varphi(0) = -1 < \varphi(1) = 1.$$

Wir betrachten somit das Intervall $\langle -1, 1\rangle$ und darin den Punkt 0. Also gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in \langle 0, 1\rangle$, so daß $\varphi(x_0) = 0$, d. h. aber, daß

$$x_0 = \nu(x_0)$$

gilt. Nach Definition ist x_0 aber ein Fixpunkt von ν im Intervall $\langle 0, 1\rangle$. ∎

Folgerung 3.4.5
Ist ν eine stetige Negation, so hat ν genau einen Fixpunkt (in $\langle 0, 1\rangle$).

Wir betrachten nun eine Reihe von Beispielen für Negationen.

Beispiel (Schwellenwert-Funktion) Gegeben sei eine fixierte reelle Zahl s mit $0 \leqq s < 1$. Wir definieren dann für $x \in \langle 0, 1\rangle$:

$$sw_s(x) =_{def} \begin{cases} 0 & \text{, falls } 0 \leqq x \leqq s \\ 1 & \text{, falls } s < x \leqq 1. \end{cases}$$

Für jedes fixierte s mit $0 \leqq s < 1$ ist sw_s eine „typische“ Schwellenwertfunktion, d. h. sie „feuert“ (gibt den Wert 1 aus), falls das Argument x die „Schwelle“ s übersteigt bzw. sie feuert nicht, falls das Argument x die Bedingung $0 \leqq x \leqq s$ erfüllt.

Somit gilt für sw_s:

1. $sw_s(0) = 0$ und $sw_s(1) = 1$
2. sw_s ist monoton, d. h. für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$:
$$\text{Wenn } x \leqq y \text{, so } sw_s(x) \leqq sw_s(y)$$
3. sw_s ist nicht stetig (in $\langle 0, 1\rangle$)
4. Von Spezialfällen, z. B.
$$\begin{aligned} sw_s(sw_s(0)) &= 0 \\ sw_s(sw_s(1)) &= 1 \end{aligned}$$
abgesehen, gilt $sw_s(sw_s(x)) \neq x$, d. h. sw_s ist nicht involutorisch.

Wir definieren nun

$$\nu_s(x) =_{def} 1 - sw_s(x).$$

Folgerung 3.4.6
ν_s ist eine Negation, die jedoch weder stetig noch involutorisch ist.

Beweis
Unmittelbar auf Grund der Feststellungen 1, 2, 3 und 4 über die Funktionen sw_s. ■

Die Funktionen ν_s lassen sich auch wie folgt definieren:

$$\nu_s(x) =_{def} \begin{cases} 0, & \text{falls } s < x \leqq 1 \\ 1, & \text{falls } 0 \leqq x \leqq s. \end{cases}$$

Offenbar ist in dieser Definition die „Feuerbedingung" $s < x \leqq 1$ mit der „Nicht-Feuerbedingung" vertauscht, und demgemäß könnte man ν_s als *Co-Schwellenwert*-Funktion bezeichnen.

Beispiel (Modifizierte Schwellenwert-Funktion) Gegeben sei eine fixierte reelle Zahl s mit $0 < s \leqq 1$. Wir definieren dann für $x \in \langle 0, 1\rangle$:

$$sw'_s(x) =_{def} \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leqq x < s \\ 1, & \text{falls } s \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

Die Modifikation gegenüber Beispiel besteht darin, daß das „Feuern" schon dann ausgelöst wird, falls der Wert x nur die Schwelle erreicht (und nicht überschreitet wie im vorhergehenden Beispiel).

Für sw'_s gelten dieselben Bedingungen wie für sw_s.

Definiert man für $x \in \langle 0, 1\rangle$:

$$\nu'_s(x) =_{def} 1 - sw'_s(x)$$

so erhält man für ν'_s die analoge

Folgerung 3.4.7
ν'_s ist eine Negation, die jedoch weder stetig noch involutorisch ist.

Die Funktionen ν'_s lassen sich analog zu ν_s auch mittles der folgenden „*Co*-Feuerungsbedingungen" definieren:

$$\nu'_s(x) =_{def} \begin{cases} 0, & \text{falls } s \leqq x \leqq 1 \\ 1, & \text{falls } 0 \leqq x < s. \end{cases}$$

Beispiel (Eine „Cosinus-gestützte" Negation) Wir definieren für $x \in \langle 0, 1\rangle$:

$$\nu_{cos}(x) =_{def} \tfrac{1}{2}(1 + cos\,\pi \cdot x)$$

Folgerung 3.4.8
*ν_{cos} ist eine **stetige** Negation, die jedoch nicht involutorisch ist.*

Beweis

1. $\nu_{cos}(0) = 1$ und $\nu_{cos}(1) = 0$.

   Diese Behauptung folgt aus

$$cos\,0 = 1 \qquad \text{und} \qquad cos\,\pi = -1.$$

2. ν_{cos} ist comonoton.

   Dies folgt aus der Tatsache, daß *cos* eine comonotone Funktion ist.

3. Weil *cos* stetig ist, ist auch ν_{cos} stetig.

4. ν_{cos} ist nicht involutorisch, z. B.

$$\nu_{cos}\left(\nu_{cos}\left(\tfrac{1}{4}\right)\right) \neq \tfrac{1}{4}$$

■

Wie für T- und S-Normen hat man auch für Negationen Klassen betrachtet, die durch eine Parameterabhängigkeit definiert sind.

Beispiel (Die Sugeno-Klasse) Siehe hierzu M. Sugeno [40]. Gegeben sei eine fixierte reelle Zahl λ mit $-1 < \lambda < +\infty$. Wir definieren für jedes $x \in \langle 0, 1 \rangle$:

$$\nu_{\mathrm{S}}(\lambda; x) =_{def} \frac{1 - x}{1 + \lambda \cdot x}$$

Folgerung 3.4.9

1. *$\nu_{\mathrm{S}}(\lambda; .)$ ist für jedes λ mit $-1 < \lambda < +\infty$ eine stetige, involutorische Negation.*

2. *$\nu_{\mathrm{S}}(0; x) = 1 - x = non_{\mathrm{Ł}}(x)$, d. h. für den Parameterwert $\lambda = 0$ erhalten wir die Łukasiewiczsche Negation.*

Beweis
Aufgabe 3.4.1. ■

Beispiel (Die Yager-Klasse) Siehe hierzu R. R. Yager [45]. Gegeben sei eine fixierte reelle Zahl λ mit $0 < \lambda < +\infty$. Wir definieren für jedes $x \in \langle 0, 1 \rangle$:

$$\nu_{\mathrm{Y}}(\lambda; x) =_{def} \left(1 - x^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

Folgerung 3.4.10

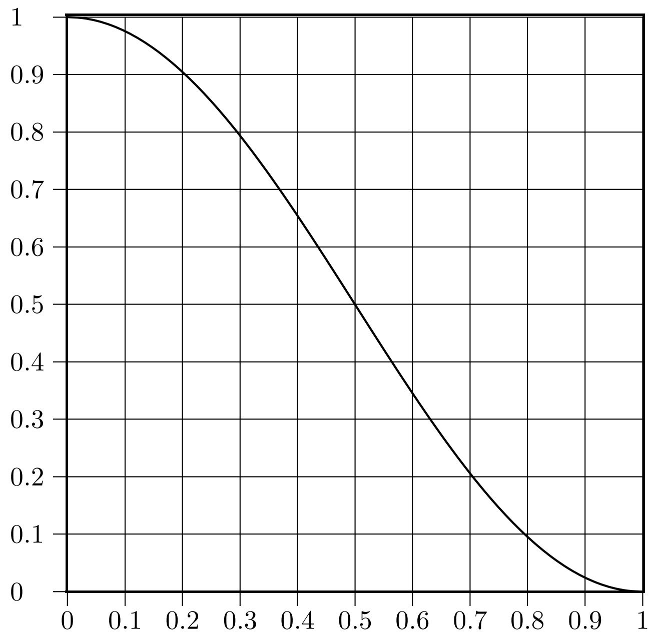
1. *$\nu_{\mathrm{Y}}(\lambda; .)$ ist für jedes fixierte λ mit $0 < \lambda < +\infty$ eine stetige, involutorische Negation.*

2. *Für $\lambda = 1$ erhält man die Łukasiewiczsche Negation $non_{\mathrm{Ł}}(x) = 1 - x$.*

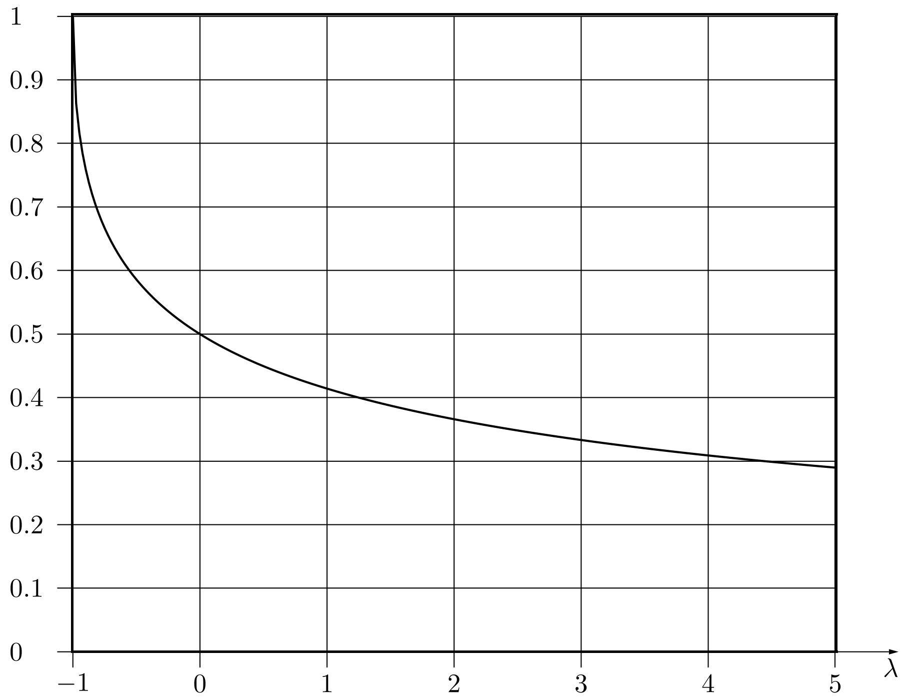
Beweis
Aufgabe 3.4.2. ■

Veranschaulichung des Verlaufs der *Cosinus*-gestützten Negation $\nu_{cos}(x)$ mit

$$\nu_{cos}(x) =_{def} \tfrac{1}{2}(1 + cos\,\pi \cdot x)$$

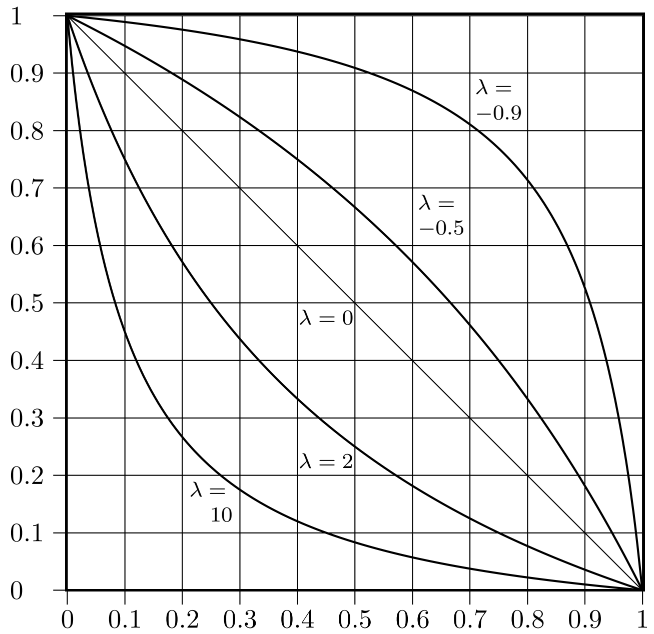


Veranschaulichung des Verlaufs der Fixpunkte der Negationen der SUGENO-Klasse in Abhängigkeit vom Parameter $\lambda \in (-1, +\infty)$.



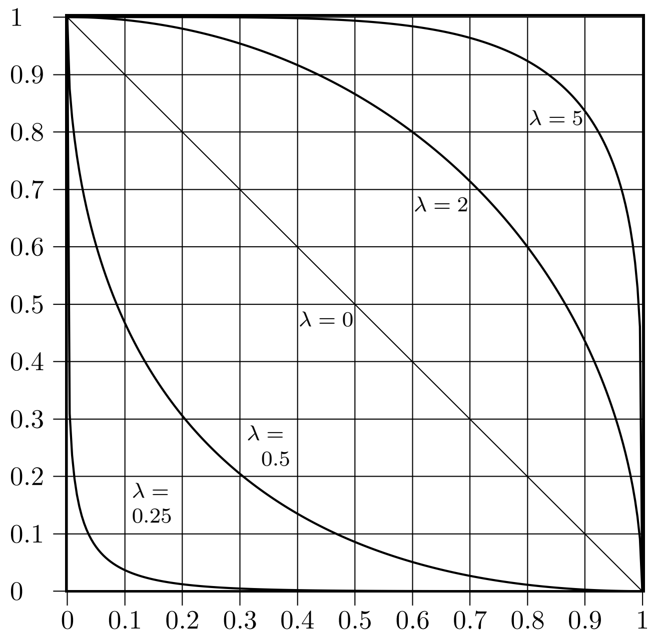
Veranschaulichung des Verlaufs einiger Negationen der SUGENO-Klasse

$$\nu_{\mathrm{S}}(\lambda; x) =_{def} \frac{1-x}{1+\lambda \cdot x} \qquad \begin{array}{l} -1 < \lambda < \infty \\ 0 \leqq x \leqq 1 \\ \lambda, x \text{ reelle Zahlen} \end{array}$$



Veranschaulichung des Verlaufs einiger Negationen der YAGER-Klasse

$$\nu_{\mathrm{Y}}(\lambda; x) =_{def} \left(1 - x^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \qquad \begin{array}{l} 0 < \lambda < +\infty \\ 0 \leqq x \leqq 1 \\ \lambda \text{ und } x \text{ reelle Zahlen} \end{array}$$



3.5 Nicht-Standard-Operationen mit Fuzzy-Mengen

Wir erinnern an **Definition 2.5.1**, wo wir auf der Grundlage der Funktionen $min(x, y)$, $max(x, y)$, $1 - x$ für Fuzzy-Mengen $F, G : U \to \langle 0, 1\rangle$ eine Durchschnitts-, eine Vereinigungs- und eine Komplementoperation wie folgt definiert hatten. Sei dazu $x \in U$.

1. $(F \cap G)(x) =_{def} min(F(x), G(x))$
2. $(F \cup G)(x) =_{def} max(F(x), G(x))$
3. $\left(\overline{F}\right)(x) =_{def} 1 - F(x)$.

Wir wollen diesen Ansatz nun wie folgt verallgemeinern: Gegeben seien zweistellige Abbildungen σ, τ mit

$$\tau, \sigma : \langle 0, 1\rangle^2 \to \langle 0, 1\rangle$$

sowie eine einstellige Abbildung ν mit

$$\nu : \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle .$$

Zunächst (für die folgende Definition) werden an die genannten Abbildungen keine Forderungen gestellt. Später werden wir für τ, σ, ν geeignete Voraussetzungen formulieren, so daß τ als Konjunktion, σ als Alternative und ν als Negation gedeutet werden können sowie die darauf beruhenden Operationen mit Fuzzy-Mengen als Durchschnitt, Vereinigung und als Komplement interpretierbar sind. Sei $x \in U$.

Definition 3.5.1

1. $(F \cap_\tau G)(x) =_{def} \tau(F(x), G(x))$

2. $(F \cup_\sigma G)(x) =_{def} \sigma(F(x), G(x))$

3. $\left(\overline{F}^{\nu}\right)(x) =_{def} \nu(F(x))$.

In einer Reihe von (folgenden) Theoremen wollen wir konstatieren, wie sich bestimmte Eigenschaften der Funktionen τ, σ, ν auf Eigenschaften der definierten Operationen $\cap_\tau$, $\cup_\sigma$, $\overline{}^{\nu}$ für Fuzzy-Mengen übertragen.

Als erstes werden wir untersuchen, welche Folgerungen sich ergeben, wenn τ und σ als T-Norm bzw. S-Norm und ν als (involutorische) Negation vorausgesetzt werden. Um diese Folgerungen sämtlich formulieren zu können, müssen wir die (scharfe) Teilmengenbeziehung $F \subseteqq G$ für Fuzzy-Mengen verwenden, die wie folgt definiert war:

$$F \subseteqq G =_{def} \text{Für jedes } x \in U \text{ gilt: } F(x) \leqq G(x).$$

Theorem 3.5.1

Ist τ eine T-Norm, so gelten für alle $F, G, H : U \to \langle 0, 1\rangle$ die folgenden ***Rechenregeln****:*

1. $F \cap_\tau \not\phi = \not\phi$ *und*
$F \cap_\tau \not U = F$

2. *Wenn* $F \subseteqq G$, *so* $F \cap_\tau H \subseteqq G \cap_\tau H$ *und*
$H \cap_\tau F \subseteqq H \cap_\tau G$

3. $F \cap_\tau G = G \cap_\tau F$

4. $(F \cap_\tau G) \cap_\tau H = F \cap_\tau (G \cap_\tau H)$

Beweis

ad 1. $\not{0}$ ist *Nullelement*, $\not{1}$ ist *Einselement*.

Man eliminiert die Definition von $\Cap$, $\not{0}$ und $\not{1}$ und wendet die Eigenschaft T_1 von T-Normen an, die besagt, daß für jedes $x \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$\tau(x, 0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \tau(x, 1) = x.$$

ad 2. *Monotonie* von $\Cap$ bezüglich $\subseteqq$.

Wiederum Elimination der betreffenden Definitionen $\subseteqq$ und $\Cap$ sowie Anwendung von T_2, was besagt, daß für alle $x, y, z \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$\begin{aligned}\text{Wenn } x \leqq y\,,\ \text{so } \tau(x, z) &\leqq \tau(y, z) \ \text{ und}\\ \tau(z, x) &\leqq \tau(z, y).\end{aligned}$$

ad 3. *Kommutativität* von $\Cap$.

Elimination von $\Cap$ und Anwendung von T_3, d. h., daß für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$\tau(x, y) = \tau(y, x).$$

ad 4. *Assoziativität* von $\Cap$.

Elimination von $\Cap$ und Anwendung von T_4, d. h., daß für alle $x, y, z \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$\tau(x, \tau(y, z)) = \tau(\tau(x, y), z).$$

■

Entsprechend gilt für eine Abbildung σ:

Theorem 3.5.2

*Ist σ eine S-Norm, so gelten für alle $F, G, H : U \to \langle 0, 1\rangle$ die folgenden **Rechenregeln**:*

1. $F \Cup \not{0} = F$
   $F \Cup \not{1} = \not{1}$
2. *Wenn* $F \subseteqq G$, *so* $F \Cup H \subseteqq G \Cup H$ *und*
   $H \Cup F \subseteqq H \Cup G$
3. $F \Cup G = G \Cup F$
4. $F \Cup (G \Cup H) = (F \Cup G) \Cup H.$

Beweis

Analog zum Beweis von **Theorem 3.5.1**. ■

Das nächste Theorem betrifft Rechenregeln für eine Komplement-Operation $\overline{}^{\nu}$, wenn diese durch eine (involutorische) Negation ν erzeugt wird.

Zum Beweis der Aussage 5 des folgenden Theorems benötigen wir das Axiom N_5, das die „Invarianz der Unschärfe“ einer Funktion ν beschreibt.

Theorem 3.5.3
Ist ν eine Negation, so gelten für $\overline{}^{\nu}$ die folgenden Rechenregeln:

1. $\overline{\not{\phi}}^{\nu} = \not{U}$ und $\overline{\not{U}}^{\nu} = \not{\phi}$
2. Wenn $F \subseteqq G$, so $\overline{G}^{\nu} \subseteqq \overline{F}^{\nu}$.
3. $KER\left(\overline{F}^{\nu}\right) \supseteqq CKER(F)$
4. $CKER\left(\overline{F}^{\nu}\right) \supseteqq KER(F)$
5. Ist ν unschärfe-invariant (N_5), so gilt:
$$FR\left(\overline{F}^{\nu}\right) = FR(F)$$
6. Ist ν involutorisch, so gilt:
$$\overline{\overline{F}^{\nu}}^{\nu} = F.$$

Beweis
ad 1. Diese Behauptungen folgen aus N_1 für ν, d. h. $\nu(0) = 1$ und $\nu(1) = 0$.

ad 2. Die Behauptung folgt aus N_2 für ν, d. h. aus der *Comonotonie*, also daß für alle $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt: Wenn $x \leqq y$, so $\nu(y) \leqq \nu(x)$.

ad 3 und 4. Beide Behauptungen folgen aus N_1.

ad 5. Diese Behauptung folgt aus N_5.

ad 6. Folgerung aus N_4.

■

In der folgenden Definition formulieren wir einige weitere Eigenschaften beliebig gewählter Funktionen
$$\tau, \sigma : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$$
und ν, die das gegenseitige Verhältnis betreffen.

Definition 3.5.2

1. *τ erfüllt das **Absorbtionsgesetz***
$=_{def}$ *Für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt*
$$\tau(x, \sigma(x, y)) = x$$
2. *τ ist **distributiv***
$=_{def}$ *Für jedes $x, y, z \in \langle 0,1\rangle$ gilt*
$$\tau(x, \sigma(y, z)) = \sigma(\tau(x, y), \tau(x, z))$$
3. *τ erfüllt bezüglich σ und ν die* de Morgan*sche Regel*
$=_{def}$ *Für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt*
$$\nu(\tau(x, y)) = \sigma(\nu(x), \nu(y))$$
4. *τ ist das **Dual** von σ bezüglich ν*
$=_{def}$ *Für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt*
$$\tau(x, y) = \nu(\sigma(\nu(x), \nu(y)))$$

5. *τ erfüllt bezüglich ν das* ***Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs***
$=_{def}$ *Für jedes $x \in \langle 0, 1 \rangle$ gilt*
$$\tau(x, \nu(x)) = 0$$

6. *σ erfüllt bezüglich ν das* ***Gesetz des ausgeschlossenen Dritten***
$=_{def}$ *Für jedes $x \in \langle 0, 1 \rangle$ gilt*
$$\sigma(x, \nu(x)) = 1.$$

In den folgenden zwei Theoremen wird festgestellt, wie sich die in **Definition 3.5.2** formulierten Eigenschaften der Funktionen σ, τ und ν auf die in **Definition 3.5.1** für Fuzzy-Mengen eingeführten Operationen $\Cap$, $\Cup$ und $\overline{}^{\nu}$ auswirken.

Theorem 3.5.4
Sind τ eine T-Norm und σ eine S-Norm und gelten für τ und σ ***beide*** *(gegenseitige) Absorbtionsgesetze, so ist die Struktur*

$$[\mathfrak{F}(U), \Cap, \Cup, \not{\phi}, \not{U}]$$

ein Verband mit Null- und Einselement.

Beweis

1. Auf Grund der **Theoreme 3.5.1** und **3.5.2** sind die Kommutativität und die Assoziativität der Operationen $\Cap, \Cup$ sowie die Regeln des Rechnens mit $\not{\phi}$ und $\not{U}$ bezüglich $\Cap$ und $\Cup$ bewiesen.

2. Es bleibt noch zu zeigen, daß die Absorbtionsgesetze, also für alle $F, G \in \mathfrak{F}(U)$:

$$F \Cap (F \Cup G) = F$$
$$F \Cup (F \Cap G) = F$$

gelten. Das folgt aber aus der Voraussetzung, daß für τ und σ beide Absorptionsgesetze (siehe **Definition 3.5.2**) gelten.

■

Theorem 3.5.5

1. *Ist τ distributiv bezüglich σ, so gilt für alle Fuzzy-Mengen $F, G, H \in \mathfrak{F}(U)$:*

$$F \Cap (G \Cup H) = (F \Cap G) \Cup (F \Cap H)$$

2. *Erfüllt τ bezüglich σ und ν die* DE MORGAN*sche Regel, so gilt für alle Fuzzy-Mengen $F, G \in \mathfrak{F}(U)$:*
$$\overline{F \Cap G}^{\nu} = \overline{F}^{\nu} \Cup \overline{G}^{\nu}$$

3. *Ist τ das Dual von σ bezüglich ν, so gilt für alle Fuzzy-Mengen $F, G \in \mathfrak{F}(U)$*

$$F \Cap G = \overline{\overline{F}^{\nu} \Cup \overline{G}^{\nu}}^{\nu}$$

4. *Erfüllt τ bezüglich ν das Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs, so gilt für alle Fuzzy-Mengen $F \in \mathfrak{F}(U)$:*
$$F \Cap \overline{F}^{\nu} = \not{\phi}$$

5. *Erfüllt σ bezüglich ν das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten, so gilt für alle Fuzzy-Mengen $F \in \mathfrak{F}(U)$:*
$$F \uplus \overline{F}^{\nu} = \not{U}.$$

Beweis
Alle Behauptungen dieses Theorems sind (nach Elimination der getreffenden Definitionen) sehr einfache Folgerungen aus den in **Definition 3.5.2** formulierten Eigenschaften der Funktionen τ, σ und ν. ■

Das Besondere von **Theorem 3.5.5** besteht allerdings darin, daß die einzelnen Aussagen **ohne** jede weitere Voraussetzung an die Funktionen τ, σ, ν delten, also jede dieser Aussagen problemlos mit **Theorem 3.5.4** kombinierbar ist.

Wenn allerdings τ eine T-Norm, σ eine S-Norm und ν eine Negation ist, dann sind die in **Definition 3.5.2** beschriebenen Eigenschaften zum Teil untereinander unverträglich, wie die nachfolgenden zwei Theoreme zeigen werden. Auf die definierten Operationen mit Fuzzy-Mengen $\Cap$, $\uplus$ und $\overline{}^{\nu}$ übertragen, bedeutet dies, daß man nicht die Gültigkeit beliebiger Kombinationen weiterer Rechenregeln für $\Cap$, $\uplus$ und $\overline{}^{\nu}$ (z. B. daß eine BOOLEsche Algebra vorliegt) „erzwingen“ kann, indem man entsprechende Eigenschaften für τ, σ und ν fordert.

In den folgenden zwei „Unverträglichkeitstheoremen“ werden die betreffenden Sachverhalte genau präzisiert; sie sind *fundamental* beim Aufbau des *„nicht-Standard-Rechnens“* mit Fuzzy-Mengen.

Theorem 3.5.6 („Erstes Unverträglichkeitstheorem“)
Voraussetzungen

1. *τ ist eine T-Norm*
2. *σ ist eine S-Norm*
3. *ν ist eine **stetige** Negation*
4. *τ erfüllt bezüglich ν das Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs*
5. *σ erfüllt bezüglich ν das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten*

Behauptungen

1. *τ ist bezüglich σ **nicht** distributiv*
2. *σ ist bezüglich τ **nicht** distributiv*
3. *τ ist **nicht** idempotent*
4. *σ ist **nicht** idempotent*

Beweis
Weil ν eine **stetige** Negation ist, hat ν nach **Theorem 3.4.4** mindestens (also genau) einen Fixpunkt, etwa e. Aus $\nu(0) = 1$, $\nu(1) = 0$ und $\nu(e) = e$ folgt

(3.24) $$0 < e < 1.$$

ad 1. Wir beweisen diese Behauptung indirekt, nehmen also an, daß

$$\text{(3.25)} \qquad \text{für alle } x, y, z \in \langle 0, 1 \rangle : \quad \tau(x, \sigma(y, z)) = \sigma(\tau(x, y), \tau(x, z)),$$

also τ bezüglich σ distributiv ist.

Mit Voraussetzung 5 (Gesetz des ausgeschlossenen Dritten für σ bezüglich ν) erhalten wir für e:

$$\text{(3.26)} \qquad \sigma(e, \nu(e)) = 1,$$

ferner gilt wegen T_1

$$\text{(3.27)} \qquad \sigma(e, 1) = e,$$

also folgt aus (3.26) und (3.27)

$$\text{(3.28)} \qquad \tau(e, \sigma(e, \nu(e))) = e.$$

Andererseits folgt aus Voraussetzung 4 (Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs für τ bezüglich ν), daß

$$\text{(3.29)} \qquad \tau(e, \nu(e)) = 0.$$

Wir starten nun mit der linken Seite von (3.28) und erhalten die folgende Kette von Gleichungen

$$\text{(3.30)} \qquad \tau(e, \sigma(e, \nu(e))) = \sigma(\tau(e, e), \tau(e, \nu(e))),$$

nach Annahme (3.25), also

$$\text{(3.31)} \qquad = \sigma(\tau(e, e), 0),$$

nach (3.29), also

$$\text{(3.32)} \qquad = \tau(e, e),$$

nach Axiom S_1, also

$$\text{(3.33)} \qquad = \tau(e, \nu(e)),$$

weil e Fixpunkt von ν ist, also

$$\text{(3.34)} \qquad = 0,$$

nach Voraussetzung 4, d. h. τ erfüllt bezüglich ν das Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs, also gilt

$$\text{(3.35)} \qquad \tau(e, \sigma(e, \nu(e))) = 0.$$

Aus (3.28) und (3.35) folgt aber der Widerspruch $e = 0$, siehe (3.24).

ad 2. Analog zu 1. **Aufgabe 3.5.1**.

ad 3. Wir beweisen auch diese Behauptung indirekt, nehmen also an, daß

$$\text{für jedes } x \in \langle 0,1 \rangle \text{ gilt:} \quad \tau(x,x) = x, \tag{3.36}$$

d. h. daß τ eine idempotente Funktion ist.
Daraus folgt

$$\tau(e,e) = e. \tag{3.37}$$

Nun ist e Fixpunkt von ν, also gilt

$$\nu(e) = e, \tag{3.38}$$

somit ergibt sich aus (3.37) und (3.38), daß

$$\tau(e,\nu(e)) = e. \tag{3.39}$$

Andererseits gilt nach Voraussetzung 4 (Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs)

$$\tau(e,\nu(e)) = 0. \tag{3.40}$$

Aus (3.39) und (3.40) ergibt sich aber ein Widerspruch zu

$$0 < e < 1.$$

ad 4. Analog zu 3. **Aufgabe 3.5.2**.

■

Bemerkung
Von den über τ und σ vorausgesetzten Eigenschaften, nämlich T-Norm bzw. S-Norm zu sein, haben wir sehr wenig benutzt, nämlich allein die Axiome T_1 und S_1.

Somit gilt das „erste Unverträglichkeitstheorem“ unter wesentlich allgemeineren Voraussetzungen, d. h. Monotonie, Kommutativität und Assoziativität der Funktionen τ und σ sind nicht erforderlich. Man überlege, ob diese Verallgemeinerung für die Anwendungen von **Theorem 3.5.6** von Bedeutung sein könnte.

Um die gegenseitigen Beziehungen von Distributivität, Idempotenz, den Gesetzen vom ausgeschlossenen Widerspruch bzw. vom ausgeschlossenen Dritten noch etwas genauer zu analysieren, fragen wir, ob und in welcher Form **Theorem 3.5.6** umkehrbar ist. Entsprechend den obigen Bemerkungen verzichten wir darauf, daß τ eine T-Norm und σ eine S-Norm ist.

Theorem 3.5.7 („Zweites Unverträglichkeitstheorem“)
Gegeben seien beliebige Funktionen

$$\tau, \sigma : \langle 0,1 \rangle^2 \to \langle 0,1 \rangle$$

sowie eine ***stetige*** *Negation ν.*

Dann gilt:

1. *Ist τ idempotent, so gilt für τ bezüglich ν* ***nicht*** *das Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs.*

2. *Ist σ idempotent, so gilt für σ bezüglich ν nicht das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten.*

3. *Erfüllt τ das Axiom T_1 und σ das Axiom S_1, gilt ferner* ***eines*** *der* ***beiden*** *Distributivgesetze (d. h. für τ bezüglich σ oder σ bezüglich τ), dann*

   erfüllt τ bezüglich ν ***nicht*** *das Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs*

   oder

   erfüllt σ bezüglich ν ***nicht*** *das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten.*

Beweis
Weil ν eine stetige Negation ist, existiert ein (sogar genau ein) $e \in \langle 0, 1\rangle$, so daß

$$\nu(e) = e \tag{3.41}$$

und

$$0 < e < 1. \tag{3.42}$$

ad 1. Nach Idempotenz für τ gilt

$$\tau(e, e) = e. \tag{3.43}$$

Wir nehmen nun an, daß für τ bezüglich ν das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten gilt, d. h.

$$\tau(e, \nu(e)) = 0. \tag{3.44}$$

Aus (3.44) folgt mit (3.41), daß

$$\tau(e, e) = 0. \tag{3.45}$$

Aus (3.43) und (3.45) folgt aber ein Widerspruch zu (3.42).

ad 2. Analog zu 1. **Aufgabe 3.5.3**.

ad 3.

Fall 1. Wir nehmen an, daß τ bezüglich σ distributiv ist, d. h., daß

(3.46) für alle $x, y, z \in \langle 0, 1\rangle$ gilt : $\quad \tau(x, \sigma(y, z)) = \sigma(\tau(x, y), \tau(x, z))$.

Wir beweisen Behauptung 3 indirekt, indem wir annehmen, daß

(3.47) τ bezüglich ν das Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs

und

(3.48) σ bezüglich ν das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten erfüllt.

Aus (3.47) folgt, daß

$$\tau(e, \nu(e)) = 0. \tag{3.49}$$

Entsprechend folgt aus (3.48), daß

$$\sigma(e, \nu(e)) = 1. \tag{3.50}$$

Aus (3.46) ergibt sich

$$\tau(e, \sigma(e,e)) = \sigma(\tau(e,e), \tau(e,e)). \tag{3.51}$$

Wegen $\nu(e) = e$ erhält man

$$\begin{aligned} \tau(e, \sigma(e,e)) &= \tau(e, \sigma(e, \nu(e))) \\ &= \tau(e, 1) && \text{wegen (3.50), also} \\ &= e && \text{wegen } \mathrm{T}_1. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Ferner erhalten wir wegen $\nu(e) = e$

$$\begin{aligned} \sigma(\tau(e,e), \tau(e,e)) &= \sigma(\tau(e, \nu(e)), \tau(e, \nu(e))), && \text{also wegen (3.49)} \\ &= \sigma(0,0), && \text{also wegen } \mathrm{S}_1 \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Wendet man (3.52) und (3.53) auf (3.51) an, ergibt sich

$$e = 0,$$

im Widerspruch zu $0 < e < 1$.

Fall 2. Es gilt für alle $x, y, z \in \langle 0, 1 \rangle$:

$$\sigma(x, \tau(y,z)) = \tau(\sigma(x,y), \sigma(x,z)).$$

Dieser Fall wird analog bewiesen. **Aufgabe 3.5.4**.

■

Anwendungen der formulierten Definitionen und bewiesenen Theoreme.

In Abschnitt 2.5 hatten wir sogenannte *Standard*-Operationen $\cap, \cup, \overline{}$ mit Fuzzy-Mengen eingeführt und die „*Standard*-Mengenalgebra" für Fuzzy-Mengen dargestellt. Im Rahmen der Begriffsbildungen, die im vorliegenden Abschnitt 3.5 entwickelt wurden, können wir feststellen, daß wir im „Standard-Fall" als Funktionen τ, σ und ν zur Definition von $\cap$, $\cup$ und $\overline{}$ gewählt hatten ($x, y \in \langle 0, 1 \rangle$):

$$\begin{aligned} \tau(x,y) &= min(x,y) \\ \sigma(x,y) &= max(x,y) \\ \nu(x) &= 1 - x \end{aligned}$$

In den **Theoremen 2.5.1** und **2.5.2** waren die für Fuzzy-Mengen bezüglich $\cap$, $\cup$ und $\overline{}$ gültigen Rechenregeln zusammengefaßt worden. Dazu stellen wir nochmals ausdrücklich fest, daß diese Rechenregeln mit den für **scharfe** Mengen Gültigen übereinstimmen bis auf die folgenden zwei Ausnahmen.

Die Ausnahmen

Für Fuzzy-Mengen gilt allgemein **nicht** mehr

(3.54) das Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs $F \cap \overline{F} = \emptyset$

und auch **nicht** mehr allgemein

(3.55) das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten $F \cup \overline{F} = \not U$.

Wir entwickeln jetzt eine ***Nicht-Standard*-Mengenalgebra**, die unter den vielen möglichen Nicht-Standard-Mengenalgebren eine *besondere Rolle* spielt, und zwar sowohl aus theoretischen als auch aus praktischen Gründen.

Die Mengenalgebra beruht auf der Auswahl von τ, σ und ν als *bold*-Konjunktion, *bold*-Alternative und der Łukasiewiczschen Negation, d. h. wir setzen für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$

$$\begin{aligned} \tau(x,y) &= max(0, x+y-1) \\ \sigma(x,y) &= min(1, x+y) \\ \nu(x) &= 1-x \end{aligned}$$

Die auf dieser Grundlage definierten Mengenoperationen wollen wir anstelle von $\cap_\tau$, $\cup_\sigma$ und $\overline{}^{\nu}$ im folgenden durch $\cap_{\mathrm{b}}$, $\cup_{\mathrm{b}}$ und $\overline{}$ bezeichnen. Zur Verdeutlichung wiederholen wir die allgemeine **Definition 3.5.1** für den vorliegenden Spezialfall. Gegeben seien beliebige Fuzzy-Mengen $F, G : U \to \langle 0, 1\rangle$, ferner sei $x \in U$.

Definition 3.5.3

1. $(F \cap_{\mathrm{b}} G)(x) =_{def} max(0, F(x) + G(x) - 1)$
2. $(F \cup_{\mathrm{b}} G)(x) =_{def} min(1, F(x) + G(x))$
3. $\left(\overline{F}\right)(x) =_{def} 1 - F(x)$.

Auf Grund der Tatsache, daß die Funktion

$$et_{\mathrm{b}}(x,y) = max(0, x+y-1)$$

eine T-Norm und die Funktion

$$vel_{\mathrm{b}}(x,y) = min(1, x+y)$$

eine S-Norm ist, gelten für $\cap_{\mathrm{b}}$ und $\cup_{\mathrm{b}}$ die folgenden Rechenregeln:

Theorem 3.5.8

1. $F \cap_{\mathrm{b}} \emptyset = \emptyset$ und $F \cap_{\mathrm{b}} \not U = F$
2. Wenn $F \subseteqq G$, so $F \cap_{\mathrm{b}} H \subseteqq G \cap_{\mathrm{b}} H$ und
   $H \cap_{\mathrm{b}} F \subseteqq H \cap_{\mathrm{b}} G$
3. $F \cap_{\mathrm{b}} G = G \cap_{\mathrm{b}} F$
4. $F \cap_{\mathrm{b}} (G \cap_{\mathrm{b}} H) = (F \cap_{\mathrm{b}} G) \cap_{\mathrm{b}} H$
5. $F \cup_{\mathrm{b}} \emptyset = F$ und $F \cup_{\mathrm{b}} \not U = \not U$
6. Wenn $F \subseteqq G$, so $F \cup_{\mathrm{b}} H \subseteqq G \cup_{\mathrm{b}} H$ und
   $H \cup_{\mathrm{b}} F \subseteqq H \cup_{\mathrm{b}} G$
7. $F \cup_{\mathrm{b}} G = G \cup_{\mathrm{b}} F$
8. $F \cup_{\mathrm{b}} (G \cup_{\mathrm{b}} H) = (F \cup_{\mathrm{b}} G) \cup_{\mathrm{b}} H$

Beweis
Unmittelbare Folgerung aus den **Theoremen 3.5.1** und **3.5.2**. ■

Für die Komplement-Operation, die auf der Grundlage der ŁUKASIEWICZschen Negation $non_{Ł}$ mit

$$non_{Ł}(x) = 1 - x$$

definiert worden ist, gelten die folgenden Rechenregeln:

Theorem 3.5.9

9. $\overline{\emptyset} = \not{U}$ *und* $\overline{\not{U}} = \emptyset$
10. $\overline{\overline{F}} = F$
11. $\overline{F \cap_{b} G} = \overline{F} \cup_{b} \overline{G}$
12. $\overline{F \cup_{b} G} = \overline{F} \cap_{b} \overline{G}$
13. $F \cap_{b} \overline{F} = \emptyset$
14. $F \cup_{b} \overline{F} = \not{U}$

Beweis
ad 9. Folgt aus den Gleichungen

$$non_{Ł}(0) = 1 \quad \text{und} \quad non_{Ł}(1) = 0.$$

ad 10. Gilt, weil $non_{Ł}$ involutorisch ist.

ad 11. Gilt, weil et_{b} bezüglich vel_{b} und $non_{Ł}$ die DE MORGANsche Regel erfüllt. **Aufgabe 3.5.5**.

ad 12. Gilt, weil vel_{b} bezüglich et_{b} und $non_{Ł}$ die DE MORGANsche Regel erfüllt. **Aufgabe 3.5.6**.

ad 13. Gilt, weil et_{b} bezüglich $non_{Ł}$ das Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs erfüllt. **Aufgabe 3.5.7**.

ad 14. Gilt, weil vel_{b} bezüglich $non_{Ł}$ das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten erfüllt. **Aufgabe 3.5.8**.

■

Anmerkung
Man beachte, daß die Bedingungen 13 und 14 im Standardfall im allgemeinen nicht gelten.

Theorem 3.5.10

1. $\cap_{b}$ *ist bezüglich* $\cup_{b}$ ***nicht*** *distributiv.*
2. $\cup_{b}$ *ist bezüglich* $\cap_{b}$ ***nicht*** *distributiv.*
3. $\cap_{b}$ *ist* ***nicht*** *idempotent.*
4. $\cup_{b}$ *ist* ***nicht*** *idempotent.*

Beweis

1. Nachprüfen, daß für die Funktionen

$$\begin{aligned}\tau(x,y) &= max(0, x+y-1)\\ \sigma(x,y) &= min(1, x+y)\\ \nu(x) &= 1-x\end{aligned}$$

die Voraussetzungen des **ersten** Unverträglichkeitstheorems (**Theorem 3.5.6**) erfüllen.

2. Anwendung von **Theorem 3.5.6** und Übertragung der Behauptung dieses Theorems von den Funktionen τ, σ, ν auf die durch sie definierten Mengenoperationen $\cap_{\mathrm{b}}$, $\cup_{\mathrm{b}}$ und $\overline{}$.

Aufgabe 3.5.9. ■

Theorem 3.5.11

15. $F \cap G = \left(F \cup_{\mathrm{b}} \overline{G}\right) \cap_{\mathrm{b}} G$

16. $F \cup G = \left(F \cap_{\mathrm{b}} \overline{G}\right) \cup_{\mathrm{b}} G$

17. $F \cap_{\mathrm{b}} (G \cup H) = (F \cap_{\mathrm{b}} G) \cup (F \cap_{\mathrm{b}} H)$

18. $F \cup_{\mathrm{b}} (G \cap H) = (F \cup_{\mathrm{b}} G) \cap (F \cup_{\mathrm{b}} H)$

Beweis

Elimination der Definitionen von $\cap$, $\cup$, $\cap_{\mathrm{b}}$ und $\cup_{\mathrm{b}}$ und dann Beweis der entsprechenden Identitäten für die Funktionen *min*, *max*, et_{b}, vel_{b} und non_{L}. **Aufgabe 3.5.10**.

ad 15 (als Beispiel)

Hier ist zu zeigen, daß für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ die Gleichung

$$\begin{aligned}min(x,y) &= max(0, vel_{\mathrm{b}}(x, 1-y) + y - 1)\\ &= max(0, min(1, x+1-y) + y - 1)\end{aligned}$$

gilt.

■

Bemerkungen

1. **Theorem 3.5.10** beschreibt einige wesentliche Abweichungen des Rechnens in der *bold*-Mengenalgebra von den „gewohnten" Rechenregeln. Wichtig in Anwendungen!

2. Die Bedingungen 15 und 16 von **Theorem 3.5.11** besagen, daß $\cap$ und $\cup$ mit $\cap_{\mathrm{b}}$, $\cup_{\mathrm{b}}$ und $^{-}$ definierbar sind. Ferner geben 17 und 18 einen *„Ersatz"* für die für $\cap_{\mathrm{b}}$, $\cup_{\mathrm{b}}$ fehlende Distributivität.

Aufgabe 3.5.11 *Man untersuche, welche der Aussagen von* **Theorem 3.5.11** *erhalten bleiben (bzw. falsch werden), wenn man $\cap_{\mathrm{b}}$ bzw. $\cup_{\mathrm{b}}$ durch $\cap_{\tau}$ bzw. $\cup_{\sigma}$ ersetzt, wobei τ bzw. σ eine beliebige T-Norm bzw. S-Norm ist.*

3.6 Mischnormen (averaging operations) und Aggregationsfunktionen

In vielen Anwendungen spielen zweistellige Łukasiewiczsche Funktionen

$$\mu : \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$$

eine Rolle, die "zwischen" *min* und *max* liegen bzw. die zwischen einer T-Norm τ und einer S-Norm σ liegen.

Wir beginnen mit der folgenden allgemeinen Definition, bezogen auf *min* und *max*.

Definition 3.6.1
*μ heiße **min-max-Mischnorm***
$=_{def}$ *μ erfüllt die folgenden Axiome*

M_1: *Für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:*

$$min(x,y) \leqq \mu(x,y) \leqq max(x,y).$$

M_2: *μ ist monoton, d. h. für jedes $x, x', y, y' \in \langle 0,1\rangle$ gilt: Wenn $x \leqq x'$ und $y \leqq y'$, so $\mu(x,y) \leqq \mu(x',y')$.*

M_3: *μ ist **kommutativ**, d. h. für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:*

$$\mu(x,y) = \mu(y,x).$$

Bemerkungen

1. Die Assoziativität der Funktion μ, d. h., daß

$$\mu(x, \mu(y,z)) = \mu(\mu(x,y), z)$$

für alle $x, y, z \in \langle 0,1\rangle$ gilt, kann man allgemein nicht fordern, wie durch die folgenden Beispiele klar werden wird.

2. In vielen Fällen wird das Axiom

M_4. μ ist stetig

eine wichtige Rolle spielen.

3. Zur feineren Klassifikation von *min-max*-Mischnormen wird außerdem die Idempotenz von μ wichtig sein, d. h.

M_5. Für jedes $x \in \langle 0,1\rangle$ gilt:
$$\mu(x,x) = x.$$

Folgerung 3.6.1
*Ist μ eine **min-max**-Mischnorm, so gilt*

(3.55)	$\mu(0,0) = 0,$	$x \leqq \mu(x,1)$
(3.56)	$\mu(1,1) = 1,$	$\mu(x,0) \leqq x$

für jedes $x \in \langle 0,1\rangle$.

Beweis
Trivial auf Grund von M_1. ■

Definition 3.6.2 (Das gewichtete arithmetische Mittel von min und max)
Gegeben sei eine Konstante $c \in \langle 0,1 \rangle$. Dann definieren wir für beliebiges $x, y \in \langle 0,1 \rangle$:

$$\mu_{\mathrm{m}}^{c}(x,y) =_{def} c \cdot min(x,y) + (1-c) \cdot max(x,y)$$

Folgerung 3.6.2

1. *Die Funktion μ_{m}^{c} erfüllt die Axiome M_1 bis M_5 für jedes fixierte $c \in \langle 0,1 \rangle$.*
2. *$\mu_{\mathrm{m}}^{0}(x,y) = min(x,y)$ und $\mu_{\mathrm{m}}^{1}(x,y) = max(x,y)$ für alle $x, y \in \langle 0,1 \rangle$.*

Beweis
Aufgabe 3.6.1 ■

Definition 3.6.3 (Das „Fuzzy-und“ und das „Fuzzy-oder“)
Gegeben sei wieder eine Konstante $c \in \langle 0,1 \rangle$. Dann definiert man für beliebige $x, y \in \langle 0,1 \rangle$:

1. *„Fuzzy-und“*
   $\mu_{\mathrm{FU}}^{c}(x,y)$
   $=_{def} c \cdot min(x,y) + \frac{1}{2}(1-c)(x+y)$
2. *„Fuzzy-oder“*
   $\mu_{\mathrm{FO}}^{c}(x,y)$
   $=_{def} c \cdot max(x,y) + \frac{1}{2}(1-c)(x+y)$

Folgerung 3.6.3

1. *μ_{FU}^{c} und μ_{FO}^{c} erfüllen die Axiome M_1 bis M_5 für jedes fixierte $c \in \langle 0,1 \rangle$.*
2. *Für jedes $x, y \in \langle 0,1 \rangle$ gilt*

$$\begin{aligned}
\mu_{\mathrm{FU}}^{0}(x,y) &= \tfrac{1}{2}(x+y)\\
\mu_{\mathrm{FU}}^{1}(x,y) &= min(x,y)\\
\mu_{\mathrm{FO}}^{0}(x,y) &= \tfrac{1}{2}(x+y)\\
\mu_{\mathrm{FO}}^{1}(x,y) &= max(x,y)
\end{aligned}$$

Beweis
Aufgabe 3.6.2. ■

Problem
Charakterisierung der Klasse

1. aller min-max-Mischnormen
2. aller stetigen min-max-Mischnormen
3. aller idempotenten min-max-Mischnormen
4. aller stetigen und idempotenten min-max-Mischnormen.

Zu den oben formulierten Problemen kann man genauer fragen, unter welchen zusätzlichen Bedingungen für min-max-Mischnormen ein dem **Theorem 3.3.2** analoges Theorem gilt. Zum Beispiel könnte man fragen, ob alle idempotenten (evtl. stetigen) min-max-Mischnormen μ eine Darstellung als gewichtetes arithmetisches Mittel von min und max haben, d. h. ob es ein $c \in \langle 0, 1\rangle$ gibt, so daß für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$\mu(x, y) = c \cdot min(x, y) + (1 - c) \cdot max(x, y).$$

Definition 3.6.4 (Das geometrische Mittel von *min* und *max*)
Wir definieren für beliebiges $x, y \in \langle 0, 1\rangle$:

$$\mu_{\mathrm{g}}(x, y) =_{def} \sqrt{min(x, y) \cdot max(x, y)}$$

Folgerung 3.6.4
Die Funktion μ_{g} erfüllt die Axiome M_1 bis M_5.

Beweis
Aufgabe 3.6.3 ■

Wir übertragen nun die obigen Betrachtungen auf T- und S-Normen. Gegeben eine T-Norm τ und eine S-Norm σ, die bezüglich der Łukasiewiczschen Negation zueinander dual sind, d. h., daß für jedes $x \in \langle 0, 1\rangle$

$$\sigma(x, y) = 1 - \tau(1 - x, 1 - y)$$

gilt. Gegeben sei ferner ein μ mit

$$\mu : \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle .$$

Definition 3.6.5
*μ heiße **τ-σ-Mischnorm***
$=_{def}$ μ erfüllt die folgenden Axiome

$M_1^{\tau,\sigma}$: *Für jedes $x, y \in \langle 0, 1\rangle$:*

$$\tau(x, y) \leqq \mu(x, y) \leqq \sigma(x, y).$$

Die übrigen Axiome $M_2^{\tau,\sigma}$ bis $M_5^{\tau,\sigma}$ stimmen in dieser Reihenfolge mit den Axiomen M_2 bis M_5 überein.

Folgerung 3.6.5
Ist μ eine τ-σ-Mischnorm, so gilt:

1. $\mu(0, 0) = 0$ *und* $\mu(1, 1) = 1$
2. *Für jedes $x \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:*
$$\mu(x, 0) \leqq x \leqq \mu(x, 1).$$

Beweis
Aufgabe 3.6.4 ■

Definition 3.6.6
Gegeben seien

$$et_{\mathrm{a}}(x,y) =_{def} x \cdot y \qquad (x,y \in \langle 0,1\rangle)$$
$$vel_{\mathrm{a}}(x,y) =_{def} x + y - x \cdot y$$

Wir definieren dann

$$\mu_{\mathrm{a}}(x,y) =_{def} \sqrt{(x \cdot y) \cdot (x + y - x \cdot y)}$$

d. h. wir bilden das geometrische Mittel aus et_{a} und vel_{a}.

Folgerung 3.6.6
Die Funktion μ_{a} erfüllt die Axiome $M_1^{et_{\mathrm{a}},vel_{\mathrm{a}}}$ und M_2 bis M_4.

Beweis
Aufgabe 3.6.5 ■

Mit H.-J. ZIMMERMANN und P. ZYSNO (s. [64]) definieren wir

Definition 3.6.7 (γ-Operator)
Gegeben sei eine Konstante $\gamma \in \langle 0,1\rangle$. Dann definieren wir für beliebiges $x,y \in \langle 0,1\rangle$:

$$\mu_{\mathrm{Z}}^{\gamma}(x,y) =_{def} (x \cdot y)^{1-\gamma} \cdot (x + y - x \cdot y)^{\gamma}$$

Folgerung 3.6.7

1. *Für jedes fixierte $\gamma \in \langle 0,1\rangle$ ist die Funktion $\mu_{\mathrm{Z}}^{\gamma}$ eine et_{a}-vel_{a}-Mischnorm, die stetig, aber nicht idempotent ist.*
2. *Für den Wert $\gamma = \frac{1}{2}$ geht der γ-Operator in die in Definition 3.6.6 definierte et_{a}-vel_{a}-Mischnorm über, d. h. es gilt*

   $$\mu_{\mathrm{Z}}^{\frac{1}{2}}(x,y) = \mu_{\mathrm{a}}(x,y)$$

   für alle $x,y \in \langle 0,1\rangle$.

Beweis
Aufgabe 3.6.6 ■

Zum Abschluß der Betrachtungen über Mischnormen wollen wir eine Definition mit Hilfe sogenannter „Mischfunktionen“ angeben.

Definition 3.6.8

1. *φ heiße Mischfunktion*
   $=_{def}$ $\varphi : \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ und für jedes $x,y \in \langle 0,1\rangle$ mit $x \leqq y$ gilt:

   $$x \leqq \varphi(x,y) \leqq y.$$

2. $\mu_{\varphi}^{\tau,\sigma}(x,y) =_{def} \varphi(\tau(x,y), \sigma(x,y)) \qquad (x,y \in \langle 0,1\rangle),$
   wobei

   φ eine Mischfunktion,

   τ eine T-Norm und

   σ dual zu τ ist.

Problem
Unter welchen Voraussetzungen für τ, σ und φ sind Axiome aus $\{\mathrm{M}_1^{\sigma,\tau}, \mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{M}_5\}$ erfüllt?

Allgemeine Aggregationsfunktionen
Gegeben sei eine Abbildung α mit

$$\alpha : \langle 0,1\rangle^n \to \langle 0,1\rangle \,, \qquad n \geqq 1.$$

Definition 3.6.9
α heiße allgemeine Aggregationsfunktion
$=_{def}$ *α erfüllt die folgenden Axiome:*

A$_1$: $\alpha(0,\ldots,0) = 0$ *und* $\alpha(1,\ldots,1) = 1$.

A$_2$: *α ist monoton, d. h. für jedes $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n \in \langle 0,1\rangle$:*

$$\text{Wenn } x_1 \leqq y_1 \text{ und } \ldots \text{ und } x_n \leqq y_n \text{, so } \alpha(x_1,\ldots,x_n) \leqq \alpha(y_1,\ldots,y_n).$$

A$_3$: *α ist symmetrisch, d. h. für jedes $x_1,\ldots,x_n \in \langle 0,1\rangle$ und jede Permutation $i_1,\ldots,i_n$ von $1,\ldots,n$ gilt:*

$$\alpha\left(x_{i_1},\ldots,x_{i_n}\right) = \alpha(x_1,\ldots,x_n).$$

Folgerung 3.6.8
Alle T-Normen, S-Normen und Mischnormen sind allgemeine Aggregationsfunktionen (für $n = 2$).

4. Implikationen in der Fuzzy-Logik

4.1 Motivationen und Vorbemerkungen

Der Implikationsbegriff gehört zu den „schwierigen" Konzepten der Logik, und er wurde seit alters her (schon von den griechischen Philosophen in der Antike) auch als schwierig empfunden und demgemäß intensiv studiert.

Die „Schwierigkeit" dieses Konzepts ist in seiner Vielschichtigkeit und Vieldeutigkeit begründet. Primär muß eine Implikation als ein zweistelliger linguistischer Konnektor (kurz: Konnektor) angesehen werden, der in der

deutschen Umgangssprache durch „*Wenn . . . , so*"

und z. B. in der

englischen Umgangssprache durch "*If . . . , then*"

bezeichnet wird.

„Linguistischer Konnektor" bedeutet, daß er aus gegebenen Aussagen A und B ein neues „sprachliches Gebilde", z. B. in der deutschen Umgangssprache

„*Wenn A , so B*"

bzw. in der englischen Umgangssprache

"*If A , then B*"

konstruiert.

Wie kann nun eine *Semantik* dieses neuen sprachlichen Gebildes definiert werden? Hierzu gibt es eine Fülle (verwirrender) Möglichkeiten, und darin liegt die Schwierigkeit des Studiums und der Anwendung von Implikationen.

Erste Möglichkeit

Die zweiwertige extensionale Interpretation des Konnektors „*Wenn . . . , so*".
Ausgangspunkte

1. Die zweiwertige Logik.
2. Die zweiwertige extensionale Interpretation von „*und*", „*oder*" und „*nicht*" als linguistische Konnektoren.

Wir gehen davon aus, daß eine Aussage A einen Sachverhalt korrekt beschreibt. In der zweiwertigen Logik setzt man dann voraus, daß der beschriebene Sachverhalt entweder vorliegt oder nicht vorliegt; im ersten Fall wird A *WAHR* genannt, im zweiten Fall *FALSCH*. (Aristotelischer Wahrheitsbegriff; siehe Abschnitt 1.1)

Beispiel

$$\begin{aligned} A &=_{def} 1+1=2 \\ &\phantom{=_{def}} A \text{ ist wahr} \\ B &=_{def} 1+1=3 \\ &\phantom{=_{def}} B \text{ ist falsch} \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt erläutern, in welchem Sinne die Konnektoren „*und*", „*oder*" (als nicht-ausschließendes Oder) und „*nicht*" **zweiwertig** und **extensional** interpretiert werden, um daraus eine zweiwertige und extensionale Interpretation des Konnektors „*Wenn ..., so ...*" herzuleiten.

Gegeben seien zweiwertige Aussagen A und B. Wir verwenden eine logische Wertfunktion Val, wobei

$$Val(A),\ Val(B) \in \{0,1\}$$

gelten soll und

$$Val(A) = 1 \text{ bzw. } \ Val(B) = 0$$

bedeuten soll, daß A wahr bzw. B falsch ist.

Wir bilden die neue Aussage

„*A und B*"

Dann gilt

$$Val(A \textit{ und } B) = and(Val(A), Val(B)) \tag{4.1}$$

d. h. $Val(A \textit{ und } B)$ hängt **allein** von $Val(A)$, $Val(B)$ ab, nicht aber von A und B selbst.

Beispiel

$$\begin{aligned} A&: \ 1+1=2 \\ B&: \ 1+1=3 \\ C&: \ 1+1=4 \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} Val(A) &= 1 \\ Val(B) &= Val(C) = 0. \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} Val(A \textit{ und } B) &= and(Val(A), Val(B)) \\ &= and(Val(A), Val(C)) \\ &= Val(A \textit{ und } C). \end{aligned}$$

Wichtig

Die Formel (4.1) besagt, daß „*und*" als linguistischer Konnektor *extensional* ist. Diese Bedingung ist aus der Umgangssprache entnommen (abstrahiert), sie wird hier als *„Extensionalitätsbedingung"* für die logische Verwendung von „*und*" an die Spitze gestellt.

Die Tabelle

x	y	$and(x,y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

für die BOOLEsche Funktion *and* wird ebenfalls der Umgangssprache entnommen.

Ebenso werden die Konnektoren „*oder*“ und „*nicht*“ extensional charakterisiert, d. h. es wird gefordert, daß die Funktionalgleichungen

$$Val(A\ oder\ B) = or(Val(A), Val(B)) \tag{4.2}$$

und

$$Val(nicht\ A) = non(Val(A)) \tag{4.3}$$

gelten, wobei *or* und *non* bekanntlich durch die Tabellen

x	y	$or(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	$non(x)$
0	0
0	1

gegeben sind.

Das durch die Funktionalgleichungen (4.1), (4.2) und (4.3) für die Konnektoren „*und*“, „*oder*“ und „*nicht*“ präzisierte *Prinzip der zweiwertigen Extensionalität* wird nun auf den Konnektor „*Wenn ..., so*“ übertragen, d. h. es wird nach einer BOOLEschen Funktion β gefragt, so daß für beliebige zweiwertige Aussagen A und B die Funktionalgleichung

$$Val(Wenn\ A\ ,\ so\ B) = \beta(Val(A), Val(B))$$

gilt.

Nun benutzt man dazu bekanntlich die Funktion *seq*, die durch die folgende Tabelle charakterisiert ist:

x	y	$seq(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Problem

Wenn man die Funktion *seq* nicht „vom Himmel fallen“ lassen will, muß man rechtfertigen, daß sie und **nur** sie zur Interpretation von „*Wenn ..., so*“ gewählt wird.

Erste Rechtfertigung durch eine Diskussion möglicher Fälle. Wir nehmen an, daß „*Wenn A , so B*“ sicher wahr ist, falls A und B wahr sind. Also werden wir

$$seq(1,1) = 1$$

setzen, damit bleiben von den 16 zweistelligen BOOLEschen Funktionen nur noch die folgenden 8 übrig

		β_8	β_9	β_{10}	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}	β_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

In dieser Tabelle sondern wir die folgenden Funktionen als schon „verbraucht“ bzw. als „unbrauchbar“ aus, und zwar wie folgt:

β_8 ist als Konjunktion schon verbraucht.

β_9 ist als Negation des **ex**klusiven Oder schon verbraucht.

β_{10} hängt **nur** von der zweiten Stelle ab, ist also zur Interpretation von „*Wenn …, so*“ unbrauchbar.

β_{11} merken wir uns als *Kandidaten* vor.

β_{12} hängt **nur** von der ersten Stelle ab, ist also zur Interpretation von „*Wenn …, so*“ unbrauchbar.

β_{13} merken wir uns als *Kandidaten* vor.

β_{14} ist das **in**klusive Oder, also schon verbraucht.

β_{15} hängt von keiner Stelle ab, ist identisch 1, also unbrauchbar.

Somit haben wir für die Wahl von *seq* nur eine Entscheidung zwischen β_{11} und β_{13} zu treffen. Nun gilt aber für alle $x, y \in \{0, 1\}$.

$$\beta_{11}(x, y) = \beta_{13}(y, x),$$

d. h. β_{11} und β_{13} stehen in „inverser“ Beziehung, bezogen auf die **Reihenfolge** der Argumente.

Die Auswahl gelingt durch folgendes Prinzip:

> Der Wahrheitswert einer „*Wenn …, so*“-Aussage der Form
>
> $$\textit{Wenn } A \textit{, so } B$$
>
> stimmt mit dem Wahrheitswert der Konklusion B überein, falls die Prämisse A wahr ist, d. h. es gilt
>
> $$\mathit{Val}(\textit{Wenn } A \textit{, so } B) = \mathit{Val}(B),$$
>
> falls $\mathit{Val}(A) = 1$.

Daraus folgt, daß

$$\mathit{seq}(1, 0) = 0$$

gelten muß, also wird als interpretierende Funktion *seq* die Funktion β_{11}, wie bekannt und üblich, gewählt.

Zweite Rechtfertigung der Wahl von β_{11} zur Interpretation von „*Wenn …, so*“.

Quelle ist die Umgangssprache (d. h. die „common sense communication“), d. h. die Verwendung logischer Grundbegriffe und Grundtatsachen in der Umgangssprache.

Wir betrachten dazu das folgende

Beispiel

Gegeben seien die folgenden Aussagen A und B, wobei

$$A =_{def} \text{Die Sonne scheint}$$
$$B =_{def} \text{Wir gehen zusammen ins Freibad}$$

Zwei Freunde treffen nun die Verabredung

$$\textit{Wenn } A \textit{, so } B,$$

d. h.

Wenn die Sonne scheint *, so* gehen wir zusammen ins Freibad.

Hierbei haben wir die Präzisierung von Ort und Zeit zur Vereinfachung weggelassen, d. h. wir nehmen an, daß aus dem „Kontext" klar ist, auf welches Freibad und auf welchen Zeitpunkt sich diese Verabredung bezieht.

Wir erschließen nun den „Werteverlauf" des Konnektors „*Wenn ..., so*" durch die Diskussion der folgenden Frage:

Wann ist diese Verabredung

1. eingehalten, d. h. $Val(\textit{Wenn } A\textit{, so } B) = 1$
2. gebrochen, d. h. $Val(\textit{Wenn } A\textit{, so } B) = 0$?

Der „common sense", d. h. der „gesunde Menschenverstand", legt fest, daß die getroffene Verabredung

gebrochen ist genau dann, wenn die Sonne scheint und die Freunde nicht zusammen ins Freibad gehen, etwa deshalb, weil (mindestens) einer von ihnen nicht kommt, d. h. wenn $Val(A) = 1$ und $Val(B) = 0$ gilt.

Daraus folgt, daß die Verabredung

eingehalten (also nicht gebrochen) wird genau dann, wenn einer der folgenden drei Fälle vorliegt:

Fall 1. Die Sonne scheint und die Freunde gehen zusammen ins Freibad, d. h.

$$Val(A) = 1 \quad \text{und} \quad Val(B) = 1.$$

Fall 2. Die Sonne scheint nicht und die Freunde gehen (trotzdem) zusammen ins Freibad, d. h.

$$Val(A) = 0 \quad \text{und} \quad Val(B) = 1.$$

Fall 3. Die Sonne scheint nicht und die Freunde gehen nicht zusammen ins Freibad, d. h.

$$Val(A) = 0 \quad \text{und} \quad Val(B) = 0.$$

Somit führt die „common-sense"-Diskussion exakt auf die Tabelle

		$\beta_{11}(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Dritte Rechtfertigung

Die Aussage

„ *Wenn A , so B*"

ist gleichbedeutend mit

„ *Nicht A oder B*",

wobei „*oder*" das inklusive Oder bedeutet.

Diese „Rechtfertigung“ ist relativ uneinsichtig, sie führt aber trivial wiederum auf die Funktion β_{11}.

Wir wollen jedoch schon hier darauf hinweisen, daß sich hinter der beschriebenen dritten Rechtfertigung ein allgemeines Erzeugungsprinzip für Implikationen verbirgt, das in der Fuzzy-Logik als Prinzip der Erzeugung von Implikationen als S-Implikationen eine große Rolle spielt.

Die dritte Rechtfertigung besagt in anderer Form, daß die Funktion $\beta_{11} = seq$, die zur Interpretation von „*Wenn . . . , so*“ verwendet wurde, die Funktionalgleichung

$$seq(x, y) = or(non(x), y)$$

mit $x, y \in \{0, 1\}$ erfüllt. Diese Funktionalgleichung wird dann in der Fuzzy-Logik in die Form

$$imp(x, y) = \sigma(\nu(x), y)$$

mit $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ übersetzt, wobei σ bzw. ν eine gegebene S-Norm bzw. Negation ist. Man sagt dann, daß *imp* eine S-Implikation sei, die durch σ und ν erzeugt wird.

Zweite Möglichkeit

Eine mehrwertige, aber extensionale Interpretation des Konnektors „*Wenn . . . , so*“.

Im Gegensatz zur zweiwertigen (extensionalen) Interpretation des Konnektors „*Wenn . . . , so*“ sprechen wir im mehrwertigen Fall von „**einer** . . . Interpretation“, um anzudeuten, daß es hier sehr verschiedene Ansätze gibt. Dies läßt sich allgemein wie folgt beschreiben.

Gegeben sei eine nicht-leere, ansonsten beliebige Menge M von Wahrheitswerten. Wir nehmen an, daß der Wahrheitsgehalt der Aussagen A und B durch Wahrheitswerte aus M beschrieben wird, d. h., daß

$$Val(A) \in M \qquad \text{und} \qquad Val(B) \in M$$

gilt.

Eine extensionale, aber mehrwertige (genauer: auf die Menge M der gewählten Wahrheitswerte bezogene) Interpretation des Konnektors „*Wenn . . . , so . . .*“ ist dann gegeben durch eine Abbildung ω mit

$$\omega : M \times M \to M,$$

so daß gilt

$$Val(\mathit{Wenn}\ A\ ,\ \mathit{so}\ B) = \omega(Val(A), Val(B)).$$

Im folgenden werden wir allein die Menge $\langle 0, 1\rangle$ als Menge M aller verwendeten Wahrheitswerte betrachten. Demgemäß wird die Abbildung ω als Łukasiewiczsche Funktion λ mit

$$\lambda : \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$$

gewählt. Damit entsteht das folgende

Problem

Welche Eigenschaften muß die Abbildung λ erfüllen, damit man sinnvollerweise von einer Implikation in der *Fuzzy*-Logik sprechen kann?

Dieses Problem werden wir noch genauer studieren, insbesondere in dem Zusammenhang, daß Implikationen die Basis für die sehr wichtige Schlußregel der *Modus Ponens* sind.

Dritte Möglichkeit

Eine kausale Interpretation des Konnektors „*Wenn* . . . , *so*“.
Bei dieser dritten Möglichkeit liegt die Vorstellung zugrunde, daß eine Aussage der Form

$$Wenn\ A\ ,\ so\ B$$

auf die Weise interpretiert wird, daß sie einen kausalen Zusammenhang in dem Sinne beschreibt, daß das „Vorliegen“ von A das „Vorliegen“ von B nach sich zieht.

Wir erläutern dies durch die folgenden zwei Beispiele. Dabei setzen wir zur Vereinfachung voraus, daß für die betrachteten Aussagen A und B das Prinzip der Zweiwertigkeit gilt, d. h., daß $Val(A)$ und $Val(B)$ in $\{0, 1\}$ liegen. Ferner wollen wir zur Vereinfachung voraussetzen, daß die kausale Beziehung

$$Wenn\ A\ ,\ so\ B$$

entweder vorliegt oder nicht vorliegt, demgemäß nehmen wir an, daß

$$Val(\,Wenn\ A\ ,\ so\ B)$$

definiert ist und ebenfalls in $\{0, 1\}$ liegt.

Beispiel

$$A =_{def} \text{Es regnet}$$
$$B =_{def} \text{Die Straße wird naß.}$$

Wir bilden nun die „kausale“ Verknüpfung

$$Wenn\ A\ ,\ so\ B,$$

also

Wenn es regnet , *so* wird die Straße naß.

Dabei haben wir auf die Angabe gewisser „Kontextinformationen“ verzichtet, durch die die obige Aussage erst „vollständig“ wird, nämlich, daß sich A und B auf dieselbe Zeit und denselben Ort beziehen und daß die betrachtete Straße nicht überdacht ist.

Wenn wir nun annehmen, daß A und B wahr sind, d. h.

$$Val(A) = Val(B) = 1$$

gilt, dann ist auch

$$Wenn\ A\ ,\ so\ B,$$

wahr, somit kann man den Wahrheitswert

$$Val(\,Wenn\ A\ ,\ so\ B)$$

im vorliegenden Fall $Val(A) = Val(B) = 1$ mit der „klassischen“ zweiwertigen Implikationsfunktion *seq* „extensional“ wie folgt berechnen

(4.4) $$Val(\,Wenn\ A\ ,\ so\ B) = seq(\,Val(A), Val(B)).$$

Wenn wir nun B durch $\neg B$, d. h.

$$\neg B : \text{Die Straße wird nicht naß}$$

ersetzen, wird die „kausale" Aussage

$$\textit{Wenn } A\text{ , } \textit{so } \neg B,$$

falsch, d. h.

$$\textit{Val}(\textit{Wenn } A\text{ , } \textit{so } B) = 0.$$

Dieser Wert kann aber ebenfalls mit Hilfe der Formel (4.4) berechnet werden, denn es gilt

$$\textit{seq}(\textit{Val}(A), \textit{Val}(\neg B)) = \textit{seq}(1, 0) = 0.$$

Eine neue Situation bietet das Problem, welchen Wahrheitswert man den „kausalen" Aussagen

a) $$\textit{Wenn } \neg A\text{ , } \textit{so } B$$

und

b) $$\textit{Wenn } \neg A\text{ , } \textit{so } \neg B$$

zuordnen soll, wobei A und B wahr sind.

Im Fall a) könnte man in Übereinstimmung mit

$$\textit{seq}(0, 1) = 1$$

den Wert 1 (wahr) zuordnen und argumentieren, daß B dadurch wahr ist, daß ein Sprengwagen gefahren ist.

Im Fall b) müßte man analog in Übereinstimmung mit

$$\textit{seq}(0, 0) = 1$$

der „kausalen" Aussage

$$\textit{Wenn } \neg A\text{ , } \textit{so } \neg B$$

den Wert 1 (wahr) zuordnen, was vernünftig wäre, wenn es außer Regen **keine** andere Möglichkeit gibt, eine Straße „naßzumachen".

Lehnt man diese Festlegung ab, muß man, sofern man in der zweiwertigen Logik bleiben und „extensional rechnen" will, der obigen Aussage den Wert 0 zuordnen, also muß (4.4) ersetzt werden durch

(4.4′) $$\textit{Val}(\textit{Wenn } A\text{ , } \textit{so } B) = \varphi(\textit{Val}(A), \textit{Val}(B)),$$

wobei φ durch die Tabelle

		$\varphi(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

charakterisiert ist. Diese Funktion, es ist offenbar β_{10}, erfüllt offenbar die Funktionalgleichung

$$\varphi(x, y) = y$$

für alle $x, y \in \{0, 1\}$, hängt also vom ersten Argument nicht ab, demgemäß wäre

$$\textit{Val}(\textit{Wenn } A\text{ , } \textit{so } B)$$

von $Val(A)$ unabhängig, und das ist sicher keine „vernünftige“ kausale Interpretation des Konnektors „*Wenn ..., so ...*“.

Somit folgt, daß eine extensionale zweiwertige Interpretation des kausalen „*Wenn ..., so ...*“ problematisch ist. Ein gewisser Ausweg eröffnet sich durch die folgende Diskussion des Falls, daß A durch A' ersetzt wird, wobei

$A' =_{def}$ Keine Wolke ist am Himmel und kein Sprengwagen (und keine Gießkanne usw.) ist in Tätigkeit.

Wir nehmen an, daß A' wahr ist, also

$$Val(A') = 1$$

gilt. Dann ist

$$Wenn\ A'\ ,\ so\ B$$

falsch, d. h. es gilt

$$Val(Wenn\ A'\ ,\ so\ B) = 0.$$

Wäre nun das kausale „*Wenn ..., so ...*“ ein extensionaler Konnektor, dann würde aus

$$Val(A') = Val(A)$$

die Gleichung

$$\varphi(Val(A'), Val(B)) = \varphi(Val(A), Val(B))$$

folgen, also würde gelten

$$0 = Val(Wenn\ A'\ ,\ so\ B) = Val(Wenn\ A\ ,\ so\ B)$$

und das wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung

$$Val(Wenn\ A\ ,\ so\ B) = 1.$$

Dieser Widerspruch kann vermieden werden durch den folgenden allgemeinen Ansatz:

(4.5) $$Val(Wenn\ A\ ,\ so\ B) = Seq(Val(A), Val(B), A, B).$$

Dieser Ansatz bedeutet offenbar, daß der Wahrheitswert der kausalen Aussage „*Wenn A , so B*“ nicht allein von den logischen Werten $Val(A)$ und $Val(B)$ der Aussagen A und B abhängt, sondern von diesen Aussagen selbst, insbesondere von ihrer Bedeutung. Dieser Ansatz wird häufig auch „intensionale“ Interpretation (des Konnektors „*Wenn ..., so ...*“) genannt.

Zur vertiefenden Argumentation, daß der kausale Konnektor „*Wenn ..., so ...*“ nicht extensional interpretiert werden kann, brauchen wir das folgende zweite

Beispiel Gegeben seien die folgenden Aussagen:

A_1 : Man drückt in Hörsaal 1 den Knopf K_1.
A_2 : Man drückt in Hörsaal 2 den Knopf K_2.
B_1 : In Hörsaal 1 geht die Beleuchtung an.
B_2 : In Hörsaal 2 geht die Beleuchtung an.

Wir setzen voraus, daß die Beleuchtungsanlagen in Ordnung sind, d. h., daß die folgenden (kausalen) Aussagen wahr sind:

$$\textit{Wenn } A_1\text{ , } \textit{so } B_1$$

und

$$\textit{Wenn } A_2\text{ , } \textit{so } B_2,$$

sowie daß die folgenden (kausalen) Aussagen

$$\textit{Wenn } A_1\text{ , } \textit{so } B_2$$

und

$$\textit{Wenn } A_2\text{ , } \textit{so } B_1$$

falsch sind.

Wir setzen nun voraus, daß A_1, B_1, A_2 und B_2 wahr sind, d. h.

$$\mathit{Val}(A_1) = \mathit{Val}(B_1) = \mathit{Val}(A_2) = \mathit{Val}(B_2) = 1$$

gilt.

Ferner gilt nach Voraussetzung

$$\mathit{Val}(\textit{Wenn } A_1\text{ , } \textit{so } B_1) = \mathit{Val}(\textit{Wenn } A_2\text{ , } \textit{so } B_2) = 1$$

und

$$\mathit{Val}(\textit{Wenn } A_1\text{ , } \textit{so } B_2) = \mathit{Val}(\textit{Wenn } A_2\text{ , } \textit{so } B_1) = 0.$$

Wäre nun die Interpretation extensional, würden daraus die Widersprüche

$$1 = \mathit{Val}(\textit{Wenn } A_1\text{ , } \textit{so } B_1) = \mathit{Val}(\textit{Wenn } A_1\text{ , } \textit{so } B_2) = 0$$

und

$$1 = \mathit{Val}(\textit{Wenn } A_2\text{ , } \textit{so } B_2) = \mathit{Val}(\textit{Wenn } A_2\text{ , } \textit{so } B_1) = 0$$

folgen.

Es sei abschließend zu diesen Beispielen noch darauf hingewiesen, daß die bei einer extensionalen Interpretation auftretenden Schwierigkeiten **nicht** überwunden werden können, indem man von der zweiwertigen Logik zu einer mehrwertigen übergeht.

Im weiteren Verlauf dieser Vorlesung werden wir die „kausale“ Interpretation des Konnektors „*Wenn ..., so ...*“, die schließlich zur sogenannten „Kausalen Logik“ führt, nicht weiter untersuchen.

Vierte Möglichkeit

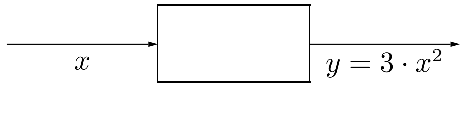
Eine funktionale Interpretation des Konnektors „*Wenn ..., so*“.

Gegeben sei eine „Blackbox“, die die reelle Funktion

$$f(x) = 3 \cdot x^2$$

realisiert.

Man kann dies graphisch durch das Diagramm



andeuten.

Sprachlich kann man diesen funktionalen Zusammenhang durch den „*Wenn …, so …*“-Konnektor beschreiben in der Form

$$\textit{Wenn}\ \text{Eingabe}\ x\,,\ \text{so}\quad \text{Ausgabe}\ 3 \cdot x^2.$$

Offenbar ist damit die „Funktionsweise“ der betrachteten Blackbox korrekt und vollständig beschrieben.

Eine andere Situation liegt vor, wenn die Funktionsweise der beschriebenen Blackbox nur partiell bekannt ist, etwa durch die Spezialkenntnisse eines Experten oder durch Experimente mit der Blackbox. Dieses „partielle“ Wissen wird dann durch mehrere (etwa $n \geqq 1$) „*Wenn …, so …*“ Angaben (Regeln) ausgedrückt, z. B. in der Form

$$\begin{aligned}
\textit{Wenn}\, x &= 1\,,\ \textit{so}\ y = 3\\
\textit{Wenn}\, x &= 3\,,\ \textit{so}\ y = 27\\
\textit{Wenn}\, x &= 10\,,\ \textit{so}\ y = 300\\
\textit{Wenn}\, x &= \tfrac{1}{2}\,,\ \textit{so}\ y = \tfrac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Die Aufgabe besteht nun darin, aus diesen endlich-vielen Angaben durch eine (unvollständige) Induktion eine reelle Funktion $\varphi(x)$ zu bestimmen, die

1. den angegebenen Zuordnungen nicht widerspricht, d. h. für die

   $$\begin{aligned}
   \varphi(1) &= 3\\
   \varphi(3) &= 27\\
   \varphi(10) &= 300\\
   \varphi\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \left(\tfrac{3}{4}\right)
   \end{aligned}$$

   gilt

2. der tatsächlichen Funktion $f(x)$ möglichst nahekommt, am besten, die mit $f(x)$ übereinstimmt.

Diese Grundgedanken werden beim Aufbau von Fuzzy-Reglern fundamental sein und deshalb in den betreffenden Kapiteln noch genauer studiert werden.

Fünfte Möglichkeit

Eine imperative Interpretation des Konnektors „*Wenn …, so*“.
Aus imperativen Programmiersprachen sind sprachliche Konstrukte der Form

$$\textit{Wenn}\, A\,,\ \text{so}\ \ \alpha$$

wohlbekannt. Auch die Interpretation ist geläufig: A ist eine logische Bedingung, α ist ein Programm. Das Gebilde „*Wenn* A, so α“ wird als bedingtes Programm interpretiert, nämlich: Wenn A wahr ist, so führe das Programm α aus; ist A falsch, so überspringe das Programm „*Wenn* A, so α“.

Diese Interpretationsmöglichkeit kann ebenfalls in der Fuzzy-Regelung von Nutzen sein; ferner in der „regelbasierten“ Klassifikationstheorie, wo die Ausführung des Programms α die Einordnung eines Elements x in eine bestimmte Klasse K bedeuten kann.

4.2 Ein Axiomensystem für Implikationen

Wir beginnen mit der Formulierung eines Axiomensystems für Implikationen. Dieses Axiomensystem wurde aus der Betrachtung vieler Beispiele abstrahiert. Wir stellen es an die Spitze unserer Betrachtungen, um von vornherein den Rahmen abzustecken, in dem wir uns bewegen wollen.

Wir gehen wieder nach dem Muster vor, nach welchem wir Axiomensysteme für T-Normen, S-Normen, Negationen und Misch-Normen aufgebaut haben, indem wir gewisse „Grundaxiome" formulieren, die von jeder Implikation erfüllt werden müssen. Hier sind dies die Axiome I_1, I_2, I_3 und I_4.

Die Grundaxiome werden durch Zusatzaxiome (I_5, I_6, I_7, I_8, I_9) ergänzt, die zur „feineren" Spezifizierung von Implikationen dienen und die demgemäß nicht für alle der betrachteten Implikationen gelten.

Gegeben sei eine Funktion *imp* mit

$$imp : \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle\,.$$

Definition 4.2.1
imp heiße Implikation
$=_{def}$ *Die folgenden Bedingungen I_1, I_2, I_3 und I_4 sind erfüllt*

I_1: *Für jedes $x \in \langle 0,1\rangle$ gilt:*

$$\begin{aligned} imp(0,x) &= 1\\ imp(1,x) &= x\\ imp(x,1) &= 1 \end{aligned}$$

I_2: *Die Funktion imp ist im ersten Argument comonoton und im zweiten Argument monoton, d. h. für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:*

$$\textit{Wenn } x \leqq y\,, \textit{ so } imp(x,z) \geqq imp(y,z) \textit{ und } imp(z,x) \leqq (z,y).$$

I_3: *Die Funktion imp erfüllt den Satz der Kontraposition, d. h. für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:*

$$imp(x,y) = imp(imp(y,0), imp(x,0)).$$

I_4: *Die Funktion imp erfüllt den Satz der Prämissenvertauschung, d. h. für jedes $x, y, z \in \langle 0,1\rangle$ gilt:*

$$imp(x, imp(y,z)) = imp(y, imp(x,z)).$$

Bemerkungen

1. Axiom I_1 gibt einige allgemeine Eigenschaften wieder, die man für eine „vernünftige" Implikationen immer haben möchte, nämlich:
   - $imp(x,1) = 1$, d. h. ist die Konklusion „wahr" im Sinne des „besten" Wahrheitswertes 1, so ist die Implikation ebenfalls wahr im Sinne des „besten" Wertes.
   - $imp(0,x) = 1$, d. h. nimmt die Prämisse den „schlechtesten" Wert 0 an, erhält die Implikation den „besten" Wert 1.
   - $imp(1,x) = x$, d. h. nimmt die Prämisse den „besten" Wert 1 an, erhält die Implikation den Wert der Konklusion.

Diese Bedingungen und ihre Interpretation kann man als „vernünftige“ Verallgemeinerungen der Eigenschaften der zweiwertigen Implikation ansehen.

2. Definiert man eine einstellige Funktion ν für $x \in \langle 0, 1\rangle$ durch

$$\nu(x) =_{def} imp(x, 0),$$

so folgt aus I_1 und I_2, daß ν eine Negation ist. Bezogen auf die Funktion *imp* bedeutet dies, daß der „schlechteste“ Wahrheitswert 0 als Konklusion die Negation der Prämisse nach sich zieht.

3. Mit Verwendung der definierten Negation ν kann man Axiom I_3 in der Form schreiben, daß für jedes $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$imp(x, y) = imp(\nu(y), \nu(x)).$$

4. Aus der zweiwertigen sowie aus der intuitionistischen Logik weiß man, daß man Axiom I_3 in die folgenden 4 Formen zerlegen kann, die im allgemeinen nicht paarweise gleichwertig sind

I_3^1: Für jedes $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$imp(\nu(x), \nu(y)) \leqq imp(y, x)$$

I_3^2: Für jedes $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$imp(\nu(x), y) \leqq imp(\nu(y), x)$$

I_3^3: Für jedes $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$imp(x, \nu(y)) \leqq imp(y, \nu(x))$$

I_3^4: Für jedes $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$imp(x, y) \leqq imp(\nu(y), \nu(x))$$

Aufgabe 4.2.1 *Man studiere die gegenseitige Abhängigkeit der Axiome I_3^1 bis I_3^4.*

5. Das Axiom I_4 kann als eine eingeschränkte linksseitige Kommutativität des „binären Operators“ *imp* verstanden werden. Diesem Axiom entspricht in der zweiwertigen Logik die folgende logische Äquivalenz

$$A \to (B \to C) \equiv B \to (A \to C),$$

dort ebenfalls Satz der Prämissenvertauschung genannt. Mit Hilfe der zweiwertigen Funktion *seq* ausgedrückt, bedeutet dies, daß für alle $x, y, z \in \{0, 1\}$ die Gleichung

$$seq(x, seq(y, z)) = seq(y, seq(x, z))$$

gilt.

Wir formulieren nun die angekündigten zusätzlichen Axiome.

I_5. Selbstimplikation

Für jedes $x \in \langle 0,1\rangle$ gilt:

$$imp(x,x) = 1$$

I_6. Prämissenbelastung

Für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:

$$imp(x, imp(y,x)) = 1.$$

I_7. Stetigkeit

Die Funktion *imp* ist in $\langle 0,1\rangle$ stetig.

Wir bezeichnen wie üblich durch $\leqq$ die natürliche Ordnung in der Menge der reellen Zahlen.

I_8. „Definierbarkeit" der Ordnungsrelation $\leqq$ durch *imp* in $\langle 0,1\rangle$.

Für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt: $x \leqq y$ genau dann, wenn $imp(x,y) = 1$.

I_9. Die Funktion *imp* heiße involutorisch
$=_{def}$ Für jedes $x \in \langle 0,1\rangle$ gilt:

$$imp(imp(x,0),0) = x.$$

Bemerkungen

1. Die Selbstimplikation (Axiom I_5) ist aus der zweiwertigen Logik bekannt, weil für die Funktion *seq* für alle $x \in \{0,1\}$ die Gleichung

$$seq(x,x) = 1$$

gilt.

2. Auch die Prämissenbelastung (Axiom I_6) ist aus der zweiwertigen Logik bekannt, weil für die Funktion *seq* für alle $x, y \in \{0,1\}$ die Gleichung

$$seq(x, seq(y,x)) = 1$$

gilt.

3. Zur Stetigkeit gibt es im „diskreten" Bereich $\{0,1\}$ für $seq(x,y)$ kein Analogon.

4. In vielen konkreten Fällen ist es günstig, das Axiom I_8 in die folgenden zwei Axiome I_8^1 und I_8^2 aufzulösen.

I_8^1. Die Ordnungsrelation $\leqq$ wird von *imp* akzeptiert, d. h. für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:

$$\text{Wenn } x \leqq y\text{, so } imp(x,y) = 1$$

I_8^2. Die Ordnungsrelation $\leqq$ wird von *imp* impliziert, d. h. für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:

$$\text{Wenn } imp(x,y) = 1\text{, so } x \leqq y.$$

5. Verwendet man die durch
$$\nu(x) =_{def} imp(x, 0)$$
für $x \in \langle 0, 1\rangle$ definierte Funktion, so kann man Axiom I_9 in der Form
$$\nu(\nu(x)) = x \qquad (x \in \langle 0, 1\rangle)$$
schreiben, was besagt, daß die Funktion ν involutorisch ist.

6. Axiom I_9 kann man zerlegen in I_9^1 und I_9^2, wobei

I_9^1. Für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:
$$imp(imp(x, 0), 0) \leqq x,$$
d. h. $\nu(\nu(x)) \leqq x$

I_9^2. Für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:
$$x \leqq imp(imp(x, 0), 0),$$
d. h. $x \leqq \nu(\nu(x))$.

Gilt Axiom I_9^1 bzw. I_9^2, so sagt man, daß *imp* und auch ν stark involutorisch bzw. schwach involutorisch sei.

4.3 S-Implikationen

Gegeben sei eine S-Norm σ und eine Negation ν. Ausgehend von der zweiwertigen Gleichung
$$seq(x, y) = vel(non(x), y)$$
für $x, y \in \{0, 1\}$ definieren wir.

Definition 4.3.1
Eine Abbildung imp mit heiße von σ und ν erzeugte S-Implikation
$=_{def}$ *Für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:*
$$imp(x, y) = \sigma(\nu(x), y).$$

Theorem 4.3.1
Ist $imp(x, y)$ die von σ und ν erzeugte S-Implikation, so erfüllt imp die Axiome I_1, I_2 und I_4 sowie, falls ν involutorisch ist, das Axiom I_3.

Beweis
Die angegebenen Eigenschaften I_1 bis I_4 sind so formuliert und numeriert, daß sie mit den entsprechenden Axiomen S_1 bis S_4 korrespondieren (wobei die Axiome N_1, N_2 und N_4 geeignet eingehen). Dies ist eine Abweichung gegenüber der Literatur, siehe dazu z. B. D. Dubois und H. Prade [15].

In der angegebenen Arbeit vergleiche man insbesondere Abschnitt 3.3 mit unseren Darlegungen.

ad 1.

1.1 $imp(x, 0) = \nu(x)$.
Es gilt $imp(x, 0) =_{def} \sigma(\nu(x), 0)$
$= \nu(x)$ nach S_1

1.2 $imp(x,1) = 1$

Es gilt
$$\begin{aligned} imp(x,1) &=_{def} \sigma(\nu(x),1) \\ &= 1 && \text{nach } S_1 \end{aligned}$$

1.3 $imp(0,x) = 1$

Es gilt
$$\begin{aligned} imp(0,x) &=_{def} \sigma(\nu(0),x) \\ &= \sigma(1,x) && \text{nach } N_1 \\ &= \sigma(x,1) && \text{nach } S_3 \\ &= 1 && \text{nach } S_1 \end{aligned}$$

1.4 $imp(1,x) = x$

Es gilt
$$\begin{aligned} imp(1,x) &=_{def} \sigma(\nu(1),x) \\ &= \sigma(0,x) && \text{nach } N_1 \\ &= \sigma(x,0) && \text{nach } S_3 \\ &= x && \text{nach } S_1 \end{aligned}$$

ad 2. Es sei $x \leqq y$. Wir haben zu zeigen

2.1 $imp(x,z) \geqq imp(y,z)$ und

2.2 $imp(z,x) \leqq imp(z,y)$.

ad 2.1 Aus $x \leqq y$ folgt mit N_2

$$\begin{aligned} \nu(y) &\leqq \nu(x), && \text{also mit } S_2 \\ \sigma(\nu(y),z) &\leqq \sigma(\nu(x),z), && \text{d. h.} \\ imp(y,z) &\leqq imp(x,z). \end{aligned}$$

ad 2.2 Aus $x \leqq y$ folgt mit S_2

$$\begin{aligned} \sigma(\nu(z),x) &\leqq \sigma(\nu(z),y), && \text{also nach Definition von } imp \\ imp(z,x) &\leqq imp(z,y). \end{aligned}$$

ad 3.
$$\begin{aligned} imp(x,y) &=_{def} \sigma(\nu(x),y) \\ &= \sigma(y,\nu(x)) && \text{nach } S_3 \\ &= \sigma(\nu(\nu(y)),\nu(x)) && \text{nach } N_4 \\ &= imp(\nu(y),\nu(x)) && \text{nach Definition von } imp. \end{aligned}$$

ad 4.
$$\begin{aligned} imp(x,imp(y,z)) &=_{def} \sigma(\nu(x),imp(y,z)) \\ &=_{def} \sigma(\nu(x),\sigma(\nu(y),z)) \\ &= \sigma(\sigma(\nu(x),\nu(y)),z) && \text{nach } S_4 \\ &= \sigma(\sigma(\nu(y),\nu(x)),z) && \text{nach } S_3 \\ &= \sigma(\nu(y),\sigma(\nu(x),z)) && \text{nach } S_4 \\ &= \sigma(\nu(y),imp(x,z)) && \text{nach Definition von } imp \\ &= imp(y,imp(x,z)) && \text{nach Definition von } imp. \end{aligned}$$

■

Einige weitere wünschenswerte Eigenschaften von Implikationen gelten für S-Implikationen im allgemeinen nur dann, wenn man an σ und ν zusätzliche Forderungen stellt.

Theorem 4.3.2

1. *Gilt für σ bezüglich ν das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten, so erfüllt imp zusätzlich die Axiome I_5, I_6 und I_8^1.*
2. *Sind σ und ν stetig, so erfüllt imp das Axiom I_7.*

Beweis

ad 1 $\mathbf{I_5}$. Es gilt

$$\begin{aligned} imp(x,x) &= \sigma(\nu(x),x) && \text{nach Definition von } imp, \\ &= 1 && \text{nach Voraussetzung.} \end{aligned}$$

$\mathbf{I_6}$. Es gilt

$$\begin{aligned} imp(x, imp(y,x)) &= imp(x, \sigma(\nu(y),x)) && \text{nach Definition von } imp, \\ &= \sigma(\nu x, \sigma(\nu(y),x)) && \text{nach Definition von } imp, \\ &= \sigma(\sigma(\nu x, \nu(y)),x) && \text{nach } S_4, \\ &= \sigma(\sigma(\nu y, \nu(x)),x) && \text{nach } S_3 \\ &= \sigma(\nu y, \sigma(\nu(x),x)) && \text{nach } S_4 \\ &= \sigma(\nu y, 1) && \text{nach Voraussetzung} \\ &= 1 && \text{nach } S_1 \end{aligned}$$

$\mathbf{I_8^1}$. Es sei

$$x \leqq y.$$

Da ν comonoton ist, folgt aus $x \leqq y$, daß

$$\nu(y) \leqq \nu(x),$$

also mit S_2 (Monotonie von σ), daß

$$\sigma(\nu(y),y) \leqq \sigma(\nu(x),y).$$

Nun erfüllt aber σ bezüglich ν das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten, d. h. es gilt

$$\sigma(\nu(y),y) = 1,$$

also folgt mit $\sigma(\nu(y),y) \leqq \sigma(\nu(x),y)$, daß

$$\sigma(\nu(x),y) = 1, \qquad \text{d. h.}$$
$$imp(x,y) = 1.$$

ad 2 $\mathbf{I_7}$. Eine Verkettung stetiger Funktionen ist wieder stetig.

■

Aufgabe 4.3.1 *Gibt es S-Implikationen, die **nicht** I_8^1 und/oder **nicht** I_8^2 erfüllen?*

Problem

Wann man eine zweistellige Abbildung

$$\varphi : \langle 0,1 \rangle^2 \to \langle 0,1 \rangle$$

eine *Implikation* (im allgemeinen Sinne) nennen sollte, ist in der Literatur bis heute nicht eindeutig festgelegt (wie etwa der Begriff der T-Norm durch die Axiome T_1, T_2, T_3, T_4 und der Begriff der S-Norm durch die Axiome S_1, S_2, S_3, S_4).

Wir möchten vorschlagen, daß mindestens die Axiome

$$\mathrm{I}_1,\ \mathrm{I}_2,\ \mathrm{I}_3 \text{ und } \mathrm{I}_4$$

gelten.

Inwiefern man die Axiome I_5, I_6, I_7, I_8 bzw. I_9 fordern kann oder muß, ist unklar; wir werden dies durch die Betrachtung der folgenden Beispiele erläutern.

Beispiel 1 Die KLEENE-DIENES-Implikation,

$$imp_{\mathrm{KD}}(x,y) =_{def} max(1-x,y) \qquad x,y \in \langle 0,1\rangle.$$

Offenbar ist imp_{KD} eine S-Implikation, erzeugt von der S-Norm $max(x,y)$ und der ŁUKASIEWICZschen Negation $\nu_{\mathrm{L}} = 1-x$.

Theorem 4.3.3
Die KLEENE-DIENES-*Implikation erfüllt die Axiome* I_1, I_2, I_3, I_4, I_7, I_8^2 *und* I_9*; jedoch* ***nicht*** I_5, I_6 *und* I_8^1.

Beweis
Die Gültigkeit von I_1, I_2, I_3, I_4 folgt aus **Theorem 4.3.1**; die übrigen Behauptungen muß man gesondert zeigen. **Aufgabe 4.3.2**! ■

Bemerkung
Die KLEENE-DIENES-Implikation erfüllt die als notwendig deklarierten Bedingungen I_1, I_2, I_3 und I_4; die Nichtgültigkeit der Selbstimplikation, d. h. von

$$imp(x,x) = 1 \quad \text{für alle } x \in \langle 0,1\rangle$$

ist ein großer Mangel; die Nichtgültigkeit der Prämissenbelastung, d. h. von

$$imp(x, imp(y,x)) = 1 \quad \text{für } x,y \in \langle 0,1\rangle$$

kann als ein gewisser „Nicht-Monotonieeffekt“ (die Hinzunahme neuer Bedingungen kann zur Folge haben, daß vorher ableitbare Sätze dann nicht mehr ableitbar sind) im Sinne der Nicht-Monotonen Logik gedeutet werden.

Die Bedingung I_8^1 wird durch $x = y = \frac{1}{2}$, also $x \leqq y$, aber

$$imp\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) = max\left(1-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}$$

widerlegt.

Beispiel 2 Die ŁUKASIEWICZsche Implikation

$$imp_{\mathrm{L}}(x,y) =_{def} min(1, 1-x+y)$$

Offenbar ist imp_{L} eine S-Implikation, erzeugt von der S-Norm $vel_{\mathrm{b}}(x,y) = min(1,x+y)$ (*bold*-Alternative) und der ŁUKASIEWICZschen Negation $\nu_{\mathrm{L}}(x) = 1-x$.

Theorem 4.3.4
Die ŁUKASIEWICZ*sche Implikation erfüllt sämtliche Axiome* I_1 *bis* I_9.

Beweis
Aufgabe 4.3.3. ∎

Bemerkung
Unter dem Gesichtspunkt, daß möglichst viele der Bedingungen I_1 bis I_9 erfüllt sein sollen, ist die Łukasiewiczsche Implikation unter den hier betrachteten die „beste" (alle Bedingungen erfüllt).

Problem
Welche weiteren zweistelligen Abbildungen

$$imp : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$$

erfüllen sämtliche Bedingungen I_1 bis I_9?

Beispiel 3 Die Reichenbachsche Implikation

$$imp_{\mathrm{R}}(x,y) =_{def} 1 - x + x \cdot y \qquad (x,y \in \langle 0,1\rangle)$$

Offenbar ist imp_{R} eine S-Implikation, erzeugt von der S-Norm $vel_{\mathrm{a}}(x,y) = x + y - x \cdot y$ (algebraische Alternative) und der Łukasiewiczschen Negation $\nu_{\mathrm{L}} = 1 - x$.

Theorem 4.3.5
Die Reichenbach*sche Implikation erfüllt die Axiome I_1, I_2, I_3, I_4, I_7 und I_8^2; jedoch* ***nicht*** *I_5, I_6 und I_8^1.*

Beweis
Die Gültigkeit von I_1, I_2, I_3, I_4 folgt aus **Theorem 4.3.1**; die übrigen muß man gesondert zeigen. **Aufgabe 4.3.4**! ∎

Bemerkungen
Man vergleiche Formulierung und Beweis der **Theoreme 4.3.3** und **4.3.5**.

Beispiel 4 Die *schwach-drastische* Implikation

$$imp_{\mathrm{sd}}(x,y) =_{def} \begin{cases} y, & \text{falls } x = 1 \\ 1-x, & \text{falls } y = 0 \\ 1, & \text{falls } 0 \leqq x < 1 \textbf{ und } 0 < y \leqq 1 \end{cases}$$

Offenbar ist imp_{sd} eine S-Implikation, erzeugt von der S-Norm vel_{sd} und non_{L}, wobei die schwach-drastische Alternative definiert ist als

$$vel_{\mathrm{sd}}(x,y) =_{def} \begin{cases} y, & \text{falls } x = 0 \\ x, & \text{falls } y = 0 \\ 1, & \text{falls } x > 0 \textbf{ und } y > 0. \end{cases}$$

Aufgabe 4.3.5 *Welche der Axiome I_i für $i \in \{1, \ldots, 9\}$ werden von imp_{sd} erfüllt bzw. nicht erfüllt?*

Beispiel 5 Die *drastische* Implikation

$$imp_{\mathrm{d}}(x,y) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \leqq x < 1 \text{ oder } 0 < y \leqq 1 \\ 0, & \text{falls } x = 1 \text{ und } y = 0 \end{cases}$$

Offenbar ist imp_{d} erzeugt von dem Alternativskelett vel_{d} und non_{L}, wobei die drastische Alternative definiert ist als

$$vel_{\mathrm{d}}(x,y) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 < x \leqq 1 \text{ oder } 0 < y \leqq 1 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \text{ und } y = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 4.3.6 *Welche der Axiome I_i für $i \in \{1,\ldots,9\}$ werden von imp_{d} erfüllt bzw. nicht erfüllt?*

4.4 R-Implikationen

Der **Ausgangspunkt** für die Definition der Klasse der **S-Implikation** war die Tatsache, daß für die *zweiwertige* Implikation *seq* die Identität

$$seq(x,y) = vel(non(x),y) \qquad x,y \in \{0,1\}$$

gilt. Diese Formel hatten wir für eine beliebige *S-Norm* σ und Negation ν in der Form

$$imp(x,y) = \sigma(\nu(x),y) \qquad x,y \in \langle 0,1\rangle$$

für beliebige reelle Werte x,y aus $\langle 0,1\rangle$ übertragen.

Der **Ausgangspunkt** für die Definition der Klasse der *R-Implikationen* ist die Tatsache, daß für die *zweiwertige* Implikation *seq* eine **andere** Identität (zusätzlich) gilt, nämlich, daß für alle $x,y \in \{0,1\}$:

$$seq(x,y) = Max\,\{z \mid et(x,z) \leqq y \;\text{ und }\; z \in \{0,1\}\}$$

Beweis
dieser Identität als **Aufgabe 4.4.1**! ■

Problem
Wie kann man motivieren, daß man eben **diese** Identität zum Ausgangspunkt für die Definition weiterer Implikationen in der Fuzzy-Logik nimmt?

1. Die obige Identität stellt einen Zusammenhang zwischen Implikation und **allein** der Konjunktion her, **ohne** Verwendung der Negation wie bei S-Implikationen. Eine „inhaltlich-logische“ Argumentation zur Begründung dieses Ansatzes ist schwierig (fast unmöglich); die Ursache dafür sind die in Abschnitt 4.1 beschriebenen Schwierigkeiten, die Konstruktion

   „ *Wenn A , so B*“,

   d. h. den „ *Wenn . . . , so . . .* “ Konnektor semantisch zu interpretieren.

2. Es gibt eine *algebraisch*-Mathematische Begründung dieses Ansatzes im Rahmen der Theorie der

   residualen Verbände.

Wir führen dies hier nicht aus, sondern verweisen dazu auf die Arbeit [18] von J. A. Goguen, wo dieser Zugang ausführlich diskutiert wird. Die Benennung „**R**-Implikation“ stammt von „***R**esiduated*“.

Die obigen Beziehungen aus der zweiwertigen Logik werden nun zum Anlaß der folgenden Definition genommen.

Gegeben seien beliebige zweistellige Łukasiewiczsche Funktionen *imp* und τ, d. h.

$$imp, \tau : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle \,.$$

Definition 4.4.1

1. *imp heiße durch τ erzeugte R-Implikation*
   $=_{def}$ *Für jedes $x, y \in \langle 0,1\rangle$ gilt:*

$$imp(x,y) = Sup\,\{x\,|\,\tau(x,z) \leqq y \;\text{ und }\; z \in \langle 0,1\rangle\}$$

2. *imp ist eine R-Implikation*
   $=_{def}$ *Es gibt eine zweistellige Funktion τ, die imp gemäß Bedingung 1 erzeugt.*

Bemerkung

In **Definition 4.4.1** haben wir gegenüber der Form

$$seq(x,y) = Max\,\{z\,|\; et(x,z) \leqq y \;\text{ und }\; z \in \{0,1\}\}$$

den Maximum-Operator durch den Supremum-Operator ersetzt, da in $\langle 0,1\rangle$ eine Teilmenge $M \subseteqq \langle 0,1\rangle$ kein Maximum haben muß, während für $M \subseteqq \{0,1\}$ stets der Fall ist.

Wir stellen nun die folgenden

Probleme

1. Es sei τ ein Konjunktionsskelett. Welche der Eigenschaften I_1 bis I_8 kann man folgern und welche nicht?

2. Es sei τ eine T-Norm. Die Aufgabenstellung entspricht 1.

3. Wir definieren eine einstellige Funktion

$$\begin{aligned} \nu(x) &=_{def} imp(x,0) \\ &=_{def} Sup\,\{z\,|\,\tau(x,z) \leqq 0 \;\text{ und }\; z \in \langle 0,1\rangle\} \end{aligned}$$

   3.1. Unter welchen Voraussetzungen für τ werden durch das definierte ν die Negationsaxiome N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 erfüllt?

   3.2. Unter welchen Voraussetzungen für τ werden durch das definierte ν erfüllt:

   I_3. Kontraposition

$$imp(x,y) = imp(\nu(y), \nu(x))$$

   I_3^1. Schwache einseitige Kontraposition

$$imp(x,y) \leqq imp(\nu(y), \nu(x))$$

I_3^2. Starke einseitige Kontraposition

$$imp(\nu(y), \nu(x)) \leqq imp(x, y)$$

N_4^1. Schwache einseitige Involution

$$x \leqq \nu(\nu(x))$$

N_4^2. Starke einseitige Involution

$$\nu(\nu(x)) \leqq x$$

Beispiel 1 Die Łukasiewiczsche Implikation

$$imp_{\text{Ł}}(x, y) =_{def} min(1, 1 - x + y)$$

wird als R-Implikation von der T-Norm

$$et_{\text{b}}(x, y) =_{def} max(0, x + y - 1)$$

erzeugt.

Beweis
Wir haben zu zeigen, daß für alle $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$ die Gleichung

$$imp_{\text{Ł}}(x, y) = Sup\,\{z \mid et_{\text{b}}(x, z) \leqq y \text{ und } z \in \langle 0, 1 \rangle\} \tag{4.6}$$

gilt. Nach Elimination der Definitionen haben wir zu zeigen, daß für $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$ gilt:

$$min(1, 1 - x + y) = Sup\,\{z \mid max(0, x + z - 1) \leqq y \text{ und } z \in \langle 0, 1 \rangle\} \tag{4.7}$$

Fall 1. $x \leqq y$.
Dann gilt

$$min(1, 1 - x + y) = 1. \tag{4.8}$$

Ferner ist für $z = 1$ die Bedingung

$$max(0, x + z - 1) \leqq y$$

erfüllt, also nimmt die „rechte Seite“ von Gleichung (4.7) den Wert 1 an.

Fall 2. $x > y$.
Dann gilt

$$min(1, 1 - x + y) = 1 - x + y. \tag{4.9}$$

Wir stellen ferner fest, daß für

$$z =_{def} 1 - x + y$$

die Bedingung

$$max(0, x + z - 1) \leqq y$$

erfüllt ist, also gilt

$$1 - x + y \leqq Sup\,\{z \mid max(0, x + z - 1) \leqq y \text{ und } z \in \langle 0, 1 \rangle\}\,. \tag{4.10}$$

Setzen wir nun

$$z =_{def} 1 - x + y$$

in die Bedingung

$$max(0, x + z - 1) \leqq y$$

ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} max(0, x + z - 1) &= max(0, x + (1 - x + y) - 1) \\ &= y \leqq y. \end{aligned}$$

Somit kann es kein $z' > z$ geben mit

$$max(0, x + z' - 1) \leqq y,$$

also geht (4.10) in eine Gleichung über.

■

Beispiel 2 Die GÖDELsche Implikation mit

$$imp_{\mathrm{G}}(x, y) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{falls } x \leqq y \\ y, & \text{falls } x > y \end{cases}$$

wird als R-Implikation von der T-Norm

$$et_{\mathrm{m}}(x, y) =_{def} min(x, y)$$

erzeugt.

Beweis
Wir haben zu zeigen, daß für alle $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$ die Gleichung

$$imp_{\mathrm{G}}(x, y) = Sup\,\{z \mid min(x, z) \leqq y \text{ und } z \in \langle 0, 1 \rangle\} \tag{4.11}$$

gilt.

Fall 1. $x \leqq y$.

Dann gilt nach Definition von imp_{G}

$$imp_{\mathrm{G}}(x, y) = 1. \tag{4.12}$$

Somit haben wir zu zeigen, daß gilt:

$$Sup\,\{z \mid min(x, z) \leqq y \text{ und } z \in \langle 0, 1 \rangle\} = 1. \tag{4.13}$$

Die Gleichung (4.13) gilt, weil für $z = 1$

$$min(x, 1) = x \leqq y$$

gilt.

Fall 2. $x > y$.

Dann gilt nach Definition von imp_{G}

$$imp_{\mathrm{G}}(x,y) = y. \tag{4.14}$$

Somit haben wir zu zeigen, daß gilt:

$$Sup\,\{z|\ min(x,z) \leqq y \ \text{ und } \ z \in \langle 0,1\rangle\} = y. \tag{4.15}$$

Die Gleichung (4.15) gilt, weil die Bedingung $min(x,z) \leqq y$ für $z = y$ erfüllt ist, denn

$$min(x,y) = y \leqq y;$$

jedoch kein $z = y'$ mit $y' > y$ existiert, so daß

$$min(x,y') \leqq y.$$

■

Aufgabe 4.4.2 *Gibt es eine S-Norm σ und eine Negation ν, so daß*

$$imp_{\mathrm{G}}(x,y) = \sigma(\nu(x),y) \text{ für alle } x,y \in \langle 0,1\rangle\,?$$

Theorem 4.4.1
Die GÖDELsche Implikation erfüllt die Eigenschaften I_1, I_2, I_4, I_5, I_6, I_8; jedoch die Eigenschaften I_3, I_7 (Stetigkeit) und I_9 nicht.

Beweis
Aufgabe 4.4.3. ■

Beispiel 3 Die GOGUENsche Implikation mit

$$imp_{\mathrm{Go}}(x,y) =_{def} \begin{cases} 1 & \text{, falls } x = 0 \\ min\left(1, \frac{y}{x}\right) & \text{, falls } x \neq 0. \end{cases}$$

wird als R-Implikation von der T-Norm

$$et_{\mathrm{a}}(x,y) =_{def} x \cdot y,$$

also von der algebraischen Konjunktion erzeugt.

Beweis
Wir haben zu zeigen, daß für alle $x,y \in \langle 0,1\rangle$ die Gleichung

$$imp_{\mathrm{Go}}(x,y) = Sup\,\{z|x \cdot z \leqq y \ \text{ und } \ z \in \langle 0,1\rangle\} \tag{4.16}$$

gilt.

Fall 1. $x = 0$.

Dann gilt nach Definition von imp_{Go}

(4.17) $$imp_{\mathrm{Go}}(x, y) = imp_{\mathrm{Go}}(0, y) = 1.$$

Somit haben wir zu zeigen, daß

(4.18) $$Sup\,\{z \,|\, x \cdot z \leqq y \;\text{ und }\; z \in \langle 0, 1\rangle\} = 1.$$

Dann erfüllt $z = 1$ die Bedingung

$$x \cdot z \leqq y,$$

wobei $0 \cdot 1 \leqq y$, also gilt (4.18).

Fall 2. $x > 0$.

Fall 2.1 $y \leqq x$, also $\frac{y}{x} \leqq 1$.
Dann gilt nach Definition von imp_{Go}, daß

(4.19) $$imp_{\mathrm{Go}}(x, y) = min\left(1, \tfrac{y}{x}\right) = \tfrac{y}{x}.$$

Somit haben wir zu zeigen, daß

(4.20) $$Sup\,\{z \,|\, x \cdot z \leqq y \;\text{ und }\; z \in \langle 0, 1\rangle\} = \tfrac{y}{x}$$

Die Bedingung

$$x \cdot z \leqq y$$

wird aber von $z = \frac{y}{x}$ erfüllt; ferner gibt es wegen $x \cdot z = x \cdot \left(\frac{y}{x}\right) = y$ kein $z' > z$ mit $x \cdot z' \leqq y$, also gilt (4.20).

Fall 2.2 $y > x$, also $\frac{y}{x} > 1$.
Dann gilt nach Definition von imp_{Go}, daß

(4.21) $$imp_{\mathrm{Go}}(x, y) = 1.$$

Somit haben wir zu zeigen, daß

(4.22) $$Sup\,\{z \,|\, x \cdot z \leqq y \;\text{ und }\; z \in \langle 0, 1\rangle\} = 1$$

Dann wird die Bedingung

$$x \cdot z \leqq y$$

für $z = 1$ erfüllt, also gilt Gleichung (4.22).

■

Aufgabe 4.4.4 *Welche der Implikationsaxiome $I_1, \ldots, I_9$ werden von imp_{Go} erfüllt bzw. nicht erfüllt?*

Aufgabe 4.4.5 *Man bestimme die R-implikationen, die von den folgenden Konjunktionsskeletten bzw. T-Normen erzeugt werden.*

1. *Drastische Konjunktion* et_{d}, *wobei*

$$et_{\mathrm{d}}(x,y) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{\textit{falls} } x = 1 \text{ \textit{und} } y = 1 \\ 0, & \text{\textit{falls} } 0 \leqq x < 1 \text{ \textit{oder} } 0 \leqq y < 1 \end{cases}$$

2. *Schwach-drastische Konjunktion* et_{sd}, *wobei*

$$et_{\mathrm{sd}}(x,y) =_{def} \begin{cases} y, & \text{\textit{falls} } x = 1 \\ x, & \text{\textit{falls} } y = 1 \\ 0, & \text{\textit{falls} } x < 1 \text{ \textit{und} } y < 1 \end{cases}$$

3. *Die* YAGER-*Klasse* et^w_{Y}, *wobei*

$$et^w_{\mathrm{Y}}(x,y) =_{def} 1 - min\left(1, ((1-x)^w + (1-y)^w)^{\frac{1}{w}}\right) \qquad \text{mit } 0 < w < +\infty$$

4. *Die* HAMACHER-*Klasse* et^γ_{H}, *wobei*

$$et^\gamma_{\mathrm{H}}(x,y) =_{def} \frac{x \cdot y}{\gamma + (1-\gamma)\cdot(x + y - x \cdot y)} \qquad \text{mit } 0 < \gamma < +\infty$$

5. *Spezialfall einer* HAMACHER-*Konjunktion*

$$et^0_{\mathrm{H}}(x,y) =_{def} \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{x + y - x \cdot y}, & \text{\textit{falls} } x \neq 0 \text{ \textit{oder} } y \neq 0 \\ 0, & \text{\textit{falls} } x = y = 0 \end{cases}$$

4.5 QL-Implikationen

Diese Klasse von Implikationen wurde von L. A. ZADEH in der Arbeit [56] beschrieben.

Ausgangspunkt ist wieder eine Identität der zweiwertigen Logik; nämlich daß für alle $x, y \in \{0,1\}$ gilt:

$$seq(x,y) = vel(non(x), et(x,y))$$

In formalisierter Form bedeutet diese Identität, daß die folgenden Formeln (im Zweiwertigen) wertverlaufsgleich sind, d. h. es gilt

$$A \to B \equiv A \to A \wedge B.$$

Dementsprechend formulieren wir für Abbildungen

$$\tau, \sigma : \langle 0,1 \rangle^2 \to \langle 0,1 \rangle$$

und

$$\nu : \langle 0,1 \rangle \to \langle 0,1 \rangle\,,$$

wobei für alle $x, y \in \langle 0,1 \rangle$:

$$\tau(x,y) = \nu(\sigma(\nu(x), \nu(y))),$$

d. h. τ das ν-*Dual* von σ ist, die folgende Definition.

Definition 4.5.1

1. *imp ist QL-Implikation, erzeugt von τ, σ und ν*
 $=_{def}$ *Für jedes $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:*

$$imp(x, y) = \sigma(\nu(x), \tau(x, y))$$

2. *imp ist QL-Implikation*
 $=_{def}$ *Es gibt τ, σ, ν, so daß τ **ν-Dual** von σ ist und imp von τ, σ, ν im Sinne von 1 erzeugt wird.*

Beispiel 4 Die Kleene-Dienes-Implikation

$$imp_{\mathrm{KD}}(x, y) =_{def} max(1 - x, y)$$

ist QL-Implikation, erzeugt von τ, σ, ν mit

$$\begin{aligned} \tau(x, y) &= max(0, x + y - 1) && x, y \in \langle 0, 1\rangle \\ \sigma(x, y) &= min(1, x + y) \\ \nu(x) &= 1 - x \end{aligned}$$

Beispiel 5 Die Zadehsche Implikation, definiert durch

$$imp_{\mathrm{Z}}(x, y) =_{def} max(1 - x, min(x, y)).$$

Offenbar ist diese Implikation eine QL-Implikation, erzeugt durch

$$\begin{aligned} \tau(x, y) &= min(x, y) \\ \sigma(x, y) &= max(x, y) \\ \nu(x) &= 1 - x \end{aligned}$$

Aufgabe 4.5.1 *Man untersuche die folgenden zwei „exotischen“ Implikationen daraufhin, ob sie S-, R- bzw. QL-Implikationen sind und welche Implikationsaxiome sie erfüllen bzw. nicht erfüllen:*

1. *die Yagersche Implikation imp_{Y} mit*

$$imp_{\mathrm{Y}}(x, y) =_{def} y^x$$

2. *die Willmottsche Implikation imp_{W} mit*

$$imp_{\mathrm{W}}(x, y) =_{def} min(max(1 - x, y), max(x, 1 - y, min(y, 1 - x)))$$

5. Die Teilmengenbeziehung für Fuzzy-Mengen

5.1 Motivationen und Vorbemerkungen

Wir gehen von der Erfahrung aus, daß in der **scharfen** Mengenlehre die Teilmengenbeziehung $M \subseteqq N$ sowohl für die Theorie als auch in den Anwendungen außerordentlich wichtig ist, also sehr häufig gebraucht wird. Ähnliches kann man auch in einer Fuzzy-Mengenlehre erwarten, und zwar unabhängig davon, auf welcher logischen Basis diese Fuzzy-Mengenlehre („standard" oder „nicht-standard") aufgebaut ist.

Dabei werden die folgenden **drei neuen** wichtigen Gesichtspunkte ins Spiel kommen.

1. Ausgehend vom Begriff der „scharfen" n-stelligen Relation aus der scharfen Mengenlehre Entwicklung eines „weichen" Begriffs von n-stelliger Relation, auch *Fuzzy-Relation* genannt (mehr dazu in Kapitel 6).

2. Feststellung der Tatsache, daß schon in der scharfen Mengenlehre eine korrekte Definition der Teilmengenbeziehung $M \subseteqq N$ nur auf der Basis der Prädikatenlogik möglich ist. Dies steht im Einklang mit dem Prinzip, mengentheoretische Beziehungen auf logische Beziehungen zurückzuführen. Die Übertragung dieses Prinzips auf die Fuzzy-Mengenlehre, **hier** im Spezialfall zur Definition einer *Teilmengenbeziehung* für *Fuzzy-Mengen*, führt mit Notwendigkeit dazu, die Fuzzy-Aussagenlogik zur *Fuzzy-Prädikatenlogik* auszubauen.

3. Sind F und G Fuzzy-Mengen über einem Universum, so kann man zunächst die (scharfe) Teilmengenbeziehung $M \subseteqq N$ für scharfe Mengen M und N verallgemeinern zu einer *„scharfen"* Teilmengenbeziehung $F \subseteqq G$ für die gegebenen Fuzzy-Mengen F und G. Demgemäß wird $F \subseteqq G$ nur zwei „Antworten" haben, „ja" oder „nein" bzw. „wahr" oder „falsch".

   Für Theorie und Praxis reicht aber eine derartige „scharfe" Beziehung nicht aus; weil zwischen Fuzzy-Mengen F und G (auf Grund ihrer komplizierten Struktur gegenüber scharfen Mengen M und N) vielfältigere Beziehungen bestehen können, die nicht zweiwertig beschreibbar sind. Demgemäß ist es notwendig, eine „weiche" Teilmengenbeziehung $Inc(F,G)$ zwischen Fuzzy-Mengen F und G zu definieren, wobei

   $Inc(F,G) =_{def}$ der *Wahrheitswert* aus $\langle 0,1 \rangle$ ist, zu dem F *Fuzzy-Teilmenge* von G ist.

Bevor wir dieses Programm im einzelnen durchführen, erinnern wir an einige bekannte Dinge aus der scharfen Mengenlehre. Grundlage für die Betrachtung der Teilmengenbeziehung ist die folgende Definition

Definition 5.1.1
$M \subseteqq N$ (M ist Teilmenge von N)
$=_{def} \forall x(x \in M \rightarrow x \in N)$

Diese Definition besagt anschaulich, daß M Teilmenge von N sein soll genau dann, wenn jedes Element x von M auch Element von N ist. D. h. mit anderen Worten „genauer", daß die Teilmengenbeziehung rein „quantitativ" („extensional") definiert wird, indem **allein** auf das Vorkommen von Elementen x Bezug genommen wird; weitergehende Informationen, etwa die Art der „Beschreibung" der Mengen M und N, spielen dabei keine Rolle.

Wir nehmen nun an, daß die Mengen M und N aus einem Universum U stammen. Die Mengen M und N lassen sich — wie bekannt — eineindeutig durch ihre charakteristischen Funktionen χ_M und χ_N festlegen, wobei (zur Erinnerung!) χ_M für M wie folgt definiert ist

1. $\chi_M : U \rightarrow \{0,1\}$
2. $\chi_M(x) =_{def} \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in U \setminus M \\ 1, & \text{falls } x \in M \end{cases}$

Verwendet man die charakteristischen Funktionen, ergibt sich aus der obigen Definition die

Folgerung 5.1.1
$M \subseteqq N$ genau dann, wenn $\forall x \left(\chi_M(x) \rightarrow \chi_N(x)\right)$

Nun weiß man aus der zweiwertigen Prädikatenlogik, daß der All-Quantor $\forall$ wie folgt interpretiert wird:

> $\forall x A(x)$ ist *WAHR* genau dann, wenn **jede** „Instantiierung" $A(x)$ mit $x \in U$ wahr ist.

Somit erhält man aus **Folgerung 5.1.1**:

> $M \subseteqq N$ genau dann, wenn jede „Instantiierung" $\chi_M(x) \rightarrow \chi_N(x)$ mit $x \in U$ wahr ist.

Nun wird $\rightarrow$ im Zweiwertigen durch die „klassische" Implikationsfunktion *seq* interpretiert, und für diese gilt für beliebiges $u, v \in \{0,1\}$:

$$seq(u,v) = 1 \text{ genau dann, wenn } u \leqq v.$$

Wendet man dies auf **Folgerung 5.1.1** an, erhält man:

Folgerung 5.1.2
$M \subseteqq N$ genau dann, wenn für jedes $x \in U$ die Beziehung $\chi_M(x) \leqq \chi_N(x)$ gilt.

Folgerung 5.1.2 kann man nun zum Anlaß nehmen, für beliebige Fuzzy-Mengen F und G die im folgenden Abschnitt 5.2 studierte („scharfe") Teilmengenbeziehung $F \subseteqq G$ zu definieren.

Die Relation $\subseteqq$ wurde für Fuzzy-Mengen erstmals von Lotfi A. Zadeh in [54] definiert.

5.2 Die scharfe Teilmengenbeziehung für Fuzzy-Mengen

Gegeben seien beliebige Fuzzy-Mengen F und G über dem Universum U.

Definition 5.2.1
$F \subseteqq G =_{def}$ *Für jedes* $x \in U$ *gilt:* $F(x) \leqq G(x)$.

Da zur Formulierung dieser Definition die übliche zweiwertige Logik benutzt wird, ist $F \subseteqq G$ eine „scharfe“ (binäre) Relation, d. h. die Antwort auf die Frage, ob $F \subseteqq G$ gilt, ist „ja“ (Wahrheitswert 1) oder „nein“ (Wahrheitswert 0).

Beispiele
Beispiel 1

$$
\begin{aligned}
U &=_{def} \{1, 2, \dots\} && \text{(natürliche Zahlen außer 0)}\\
F_1(x) &=_{def} \frac{1}{x^2} && x \in U\\
G_1(x) &=_{def} \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

Nun gilt für alle $x \in U$

$$\frac{1}{x^2} \leqq \frac{1}{x},$$

also

$$F_1(x) \leqq G_1(x),$$

also ist F_1 (scharfe) Teilmenge von G_1, d. h.

$$F_1 \subseteqq G_1.$$

Eine mögliche Veranschaulichung der betrachteten Fuzzy-Mengen F_1 und G_1:

$F_1(x)$: Die Zahl x ist eine *„sehr kleine“* natürliche Zahl größer als Null.

$G_1(x)$: Die Zahl x ist eine *„kleine“* natürliche Zahl größer als Null.

Hinweis
In diesem Beispiel tritt (erstmals in dieser Vorlesung) ein *Modifikator* auf, indem eine Fuzzy-Menge (hier „Klein“) durch das Präfix „*sehr*“ modifiziert (hier zu „sehr klein“) wird (siehe dazu Kapitel 10).

Beispiel 2

$$
\begin{aligned}
U &=_{def} \{0, 1, 2, \dots\}\\
F_2(x) &=_{def} \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{, falls } x \in U \text{ und } x = 0\\ \frac{1}{x^2} & \text{, falls } x \in U \text{ und } x > 0 \end{cases}\\
G_2(x) &=_{def} \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \in U \text{ und } x = 0\\ \frac{1}{x} & \text{, falls } x \in U \text{ und } x > 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Offenbar gilt:

Nicht $F_2 \subseteqq G_2$, also F_2 ist **nicht** (scharfe) Teilmenge von G_2.

Mögliche Veranschaulichung

$F_2(x)$: x ist eine „sehr kleine" natürliche Zahl größer Null oder x ist „möglicherweise" die Null (aber nicht „sicher").

$G_2(x)$: x ist eine „kleine" natürliche Zahl größer Null und x ist „sicher" **nicht** die Null.

Anmerkung
Die Ungültigkeit von $F_2 \subseteqq G_2$ beruht offenbar darauf, daß allein für das Element $0 \in U$ gilt: $F_2(0) > G_2(0)$.

Man könnte daran denken, die Definition 5.2.1 in der Form abzuschwächen, daß man den Quantor „Für jedes" (d. h. „Für alle") durch den Quantor „Für **fast** alle" ersetzt. Somit setzen wir

Definition 5.2.2
$F \subseteqq' G$
$=_{def}$ *Für fast alle $x \in U$ gilt: $F(x) \leqq G(x)$, d. h.*
Es gibt eine endliche Teilmenge $E \subseteqq U$, so daß für alle $x \in U \setminus E$ gilt: $F(x) \leqq G(x)$.

Für das Beispiel 2 folgt dann, daß

$$F_2 \subseteqq' G_2$$

gilt. Allerdings gelten für $\subseteqq'$ in dem folgenden Theorem 5.2.1 nicht mehr alle Aussagen.

Aufgabe 5.2.1 *Man untersuche, welche der Aussagen von Theorem 5.2.1 für $\subseteqq'$ gelten bzw. nicht gelten.*

Theorem 5.2.1

1. *Reflexivität.*
$$F \subseteqq F$$
2. *Transitivität.*
$$\text{Wenn } F \subseteqq G \text{ und } G \subseteqq H\,,\text{ so } F \subseteqq H$$
3. *Antisymmetrie (Identität).*
$$\text{Wenn } F \subseteqq G \text{ und } G \subseteqq F\,,\text{ so } F = G$$
4. $F \subseteqq \not{\emptyset}$ *genau dann, wenn* $F = \not{\emptyset}$
5. $\not{U} \subseteqq F$ *genau dann, wenn* $F = \not{U}$
6. $F \subseteqq G$ *genau dann, wenn* $\overline{G} \subseteqq \overline{F}$
7. *Wenn* $F \subseteqq G$, *so* $F \cap H \subseteqq G \cap H$ *und*
$F \cap F \subseteqq H \cap G$.
8. *Wenn* $F \subseteqq G$, *so* $F \cup H \subseteqq G \cup H$ *und*
$F \cup F \subseteqq H \cup G$.
9. $F \subseteqq G$ *genau dann, wenn* $F = F \cap G$
10. $F \subseteqq G$ *genau dann, wenn* $G = F \cup G$

Beweis
Rückgang auf die Definitionen. ■

Bemerkung
In den **Theoremen 3.5.1** und **3.5.2** haben wir gezeigt, daß die „Monotonieregeln“ 7 und 8 auch dann gelten, wenn man darin $\cap$ durch $\cap_\tau$ bzw. $\cup$ durch $\cup_\sigma$ ersetzt, wobei τ eine beliebige T-Norm und σ eine beliebige S-Norm ist. Analoges gilt für Bedingung 6, wenn man darin $^-$ durch $\overline{}^{\nu}$ ersetzt, wobei ν eine beliebige Negation ist.

5.3 Die „weiche“ Łukasiewiczsche Inklusionsbeziehung

Wir greifen zur Motivation auf **Beispiel 2** aus Abschnitt 5.2 zurück. Die **Ursache**, daß F_2 nicht (scharfe) Teilmenge von G_2 ist, beruht **allein** auf der „Sonderstellung“ der Zahl 0 in F_2 bzw. in G_2, nämlich daß

$$F_2(0) = \tfrac{1}{10},$$

aber

$$G_2(0) = 0$$

gilt.

Wir wollen nun eine binäre Abbildung *Inc* definieren, die jeder Fuzzy-Menge F und G über U eine reelle Zahl

$$Inc(F, G) \in \langle 0, 1\rangle$$

zuordnet, wobei diese reelle Zahl den Grad des „Enthaltenseins“ der Fuzzy-Menge F in der Fuzzy-Menge G bedeuten soll.

Zu dieser Aufgabe wollen wir schon drei Probleme formulieren:

1. Welche (funktionalen) Eigenschaften muß *Inc*, als Abbildung

$$Inc : \mathfrak{F}(U) \times \mathfrak{F}(U) \to \langle 0, 1\rangle$$

betrachtet, erfüllen, damit man sinnvoll von einer („weichen“) Inklusionsbeziehung sprechen kann?

2. Gibt es „natürliche“ Definitions**prinzipien**, mit denen „weiche“ Inklusionsbeziehungen erzeugt werden können?

3. Muß man außer reellen Zahlen $r \in \langle 0, 1\rangle$ eventuell **kompliziertere** Gebilde benutzen, um das „Eingebettetsein“ einer Fuzzy-Menge F in eine Fuzzy-Menge G sachgerecht beschreiben zu können?

Zu allen diesen Fragen werden wir im Verlauf des Kapitels 5 Antworten geben, jedoch sind „vollständige“ oder „endgültige“ Antworten noch nicht möglich, da hier die Forschung „noch im Fluß“ ist.

Zur Definition der „weichen“ Łukasiewiczschen Inklusionsbeziehung $Inc_{\text{Ł}}$ greifen wir auf die Teilmengendefinition für scharfe Mengen $M, N \subseteqq U$ zurück. Wir hatten gesetzt:

$$M \subseteqq N =_{def} \forall x (x \in M \to x \in N).$$

Dann folgt

$$M \subseteqq N \text{ genau dann, wenn } \forall x \left(\chi_M(x) \leqq \chi_N(x)\right)$$

genau dann, wenn

$$\forall x \left(seq \left(\chi_M(x), \chi_N(x) \right) = 1 \right)$$

genau dann, wenn

$$Inf \left\{ seq \left(\chi_M(x), \chi_N(x) \right) \,\middle|\, x \in U \right\} = 1.$$

Wir ersetzen nun die **zweiwertigen** Funktionen χ_M und χ_N, d. h. mit

$$\chi_M, \chi_N : U \to \{0, 1\}$$

durch beliebige Fuzzy-Mengen F und G über U, d. h. mit

$$F, G : U \to \langle 0, 1 \rangle \,.$$

Ferner ersetzen wir die BOOLEsche Funktion *seq* durch die ŁUKASIEWICZsche Implikation $imp_{Ł}$, d. h. mit

$$imp_{Ł}(x, y) = min(1, 1 - x + y)$$

und schließlich soll sich der Operator *Inf* nicht allein auf die Menge $\{0, 1\}$, sondern auf $\langle 0, 1 \rangle$ beziehen.

Somit definieren wir

Definition 5.3.1

$$Inc_{Ł}(F, G) =_{def} Inf \, \{ imp_{Ł}(F(x), G(x)) \,|\, x \in U \}.$$

Damit haben wir ein Beispiel für unser in Problem 2 gefordertes „natürliches" Definitionsprinzip angegeben, das man wie folgt formulieren kann:

Natürliches Definitionsprinzip:
Gegeben sei eine zweistellige Abbildung

$$imp : \langle 0, 1 \rangle^2 \to \langle 0, 1 \rangle \,,$$

die die Implikationsaxiome I_1 bis I_4 erfüllt und die daher gemäß Definition 4.2.1 als Implikation bezeichnet werden kann. Nun ersetzen wir in der „klassischen"Definition

$$M \subseteqq N =_{def} \forall x (x \in M \to x \in N).$$

die Terme $x \in M$ und $x \in N$ durch $F(x)$ und $G(x)$ und interpretieren den Konnektor $\to$ durch *imp* sowie $\forall x$ durch *Inf*. Somit kommen wir zu der Definition:

Definition 5.3.2

$$Inc_{imp}(F, G) =_{def} Inf \, \{ imp(F(x), G(x)) \,|\, x \in U \}.$$

Später (siehe Kapitel 11) werden wir dieses Definitionsschema dahingehend verallgemeinern, daß wir die („klassische") Standard-Interpretation von $\forall$ durch *Inf* abändern zu einer Interpretation durch *Nicht-Standard-All-Quantoren*, von denen etwa „Fast-alle", „die Meisten" und „Viele" wichtige Beispiele sind.

Wir diskutieren nun die definierte Relation $Inc_{Ł}$ im Hinblick auf die betrachteten **Beispiele 1** und **2**.

Es gilt mit $U = \{1, 2, \dots\}$

$$\begin{aligned} Inc_{Ł}(F_1, G_1) &= Inf \, \{ imp_{Ł}(F_1(x), G_1(x)) \,|\, x \in U \} \\ &= Inf \, \{ min(1, 1 - F_1(x) + G_1(x)) \,|\, x \in U \} \\ &= Inf \left\{ min \left(1, 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) \,\middle|\, x \in U \right\} \\ &= Inf\{1\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Für die in Beispiel 2 betrachteten Fuzzy-Mengen F_2 und G_2 erhalten wir:

$$\begin{aligned}
Inc_{\mathrm{L}}(F_2, G_2) &= Inf\,\{imp_{\mathrm{L}}(F_2(x), G_2(x))\,|\,x \in \{0\} \cup U\} \\
&= Inf\,\left\{\tfrac{9}{10}\right\} \cup \left\{ min\left(1, 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) \middle|\, x \in U \right\} \\
&= Inf\,\left\{\tfrac{9}{10}, 1\right\} \\
&= \tfrac{9}{10}
\end{aligned}$$

Die Diskussion von **Beispiel 1** führt zu der Feststellung, daß für beliebige Fuzzy-Mengen F und G über U gilt:

$$F \subseteqq G \text{ genau dann, wenn } Inc_{\mathrm{L}}(F, G) = 1$$

Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß Axiom I_8 für imp_{L} gilt, d. h. daß für alle $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$x \leqq y \text{ genau dann, wenn } imp_{\mathrm{L}}(x, y) = 1$$

Im Hinblick auf **Beispiel 2** stellen wir fest, daß zwar $F_2 \subseteqq G_2$ **nicht** gilt, jedoch wir **nicht** etwa

$$Inc_{\mathrm{L}}(F_2, G_2) = 0$$

haben, **sondern**

$$Inc_{\mathrm{L}}(F_2, G_2) = 0.9;$$

was man so interpretieren kann, daß F_2 noch zu einem „guten“ Wahrheitswert in G_2 enthalten ist.

Die „Tendenz“ dieser Aussage wird noch deutlicher, wenn wir den Wahrheitswert, zu dem 0 in F_2 vorkommt, verkleinern. Dazu definieren wir:

$$F_{2,n}(x) =_{def} \begin{cases} \frac{1}{10^n} & \text{, falls } x = 0 \\ F_2(x) & \text{, falls } x \in \{1, 2, \dots\} \end{cases}$$

Dann folgt offenbar

$$Inc_{\mathrm{L}}\,(F_{2,n}, G_2) = 1 - \frac{1}{10^n}$$

Für $n \to \infty$ erhalten wir

$$Inc_{\mathrm{L}}\,(F_{2,n}, G_2) \to 1,$$

also kann man sagen, daß wir „im Grenzwert“ die Aussage

$$F_{2,\infty} \subseteqq G_2$$

erhalten.

Für die scharfe Teilmengenbeziehung folgt aus $F \subseteqq \emptyset$ trivial $F = \emptyset$, d. h. die leere Fuzzy-Menge enthält (wie für scharfe Mengen) **nur** sich selbst als Teilmenge. Diese Beziehung gilt für Inc_{L} allgemein in der Form:

$$\text{Wenn } Inc_{\mathrm{L}}(F, \emptyset) = 1\,, \text{ so } F = \emptyset.$$

Nun sollte man erwarten, daß **stärker** die Beziehung gilt:

$$\text{Wenn } Inc_{\mathrm{L}}(F, \emptyset) > 0\,, \text{ so } F = \emptyset.$$

Diese Erwartung wird enttäuscht durch das folgende

Beispiel 3

$$
\begin{aligned}
U &=_{def} \{1, 2, 3, \dots\} \\
F_3(x) &=_{def} \tfrac{1}{10} && \text{für alle } x \in U \\
\not{\phi}(x) &=_{def} 0 && \text{für alle } x \in U \text{, d. h. } \not{\phi} \text{ ist die leere Fuzzy-Menge über } U.
\end{aligned}
$$

Dann folgt unmittelbar

$$Inc_{\mathrm{L}}(F_3, \not{\phi}) = \tfrac{9}{10},$$

also ein Resultat, das mit der Anschauung schlecht vereinbar ist.

Die folgenden Feststellungen zeigen aber wenigstens eine „Tendenz“, die wir akzeptieren können.

1. **Erhöht** man den Zugehörigkeitswert auch nur **eines** Elementes $x \in U$ zur Menge F_3, so **sinkt** der Wert von $Inc_{\mathrm{L}}(F_3, \not{\phi})$. Dazu setzen wir

$$F_3'(x) =_{def} \begin{cases} \frac{99}{100} & \text{, falls } x = 1 \\ F_3(x) & \text{, falls } x = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Dann gilt

$$Inc_{\mathrm{L}}(F_3', \not{\phi}) = \tfrac{1}{100}$$

2. Wird auch **nur ein** Element $x \in U$ mit dem Wert 1 zu F_3 gerechnet, so **sinkt** der Wert von $Inc_{\mathrm{L}}(F_3, \not{\phi})$ auf Null. Dazu setzen wir:

$$F_3''(x) =_{def} \begin{cases} 1 & \text{, falls } x = 1 \\ F_3(x) & \text{, falls } x = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Dann gilt

$$Inc_{\mathrm{L}}(F_3'', \not{\phi}) = 0$$

3. **Vermindert** man den Zugehörigkeitswert **aller** $x \in U$ zur Menge F_3, so **erhöht** sich der Wert von $Inc_{\mathrm{L}}(F_3, \not{\phi})$. Dazu setzen wir:

$$F_3'''(x) =_{def} \tfrac{1}{1000} \quad \text{für alle } x \in U.$$

Dann gilt

$$Inc_{\mathrm{L}}(F_3''', \not{\phi}) = \tfrac{999}{1000}$$

Wichtige Feststellung

Aus den obigen Feststellungen 1 und 2 ergibt sich, daß die Relation Inc_{L} noch sehr „empfindlich“ reagiert in dem Sinne, daß **schon** die Abänderung des Zugehörigkeitswerts auch nur **eines** Elements $x \in U$ sich **stark** auf $Inc_{\mathrm{L}}(F, G)$ auswirken kann.

Die **Ursache** dafür liegt in der Verwendung des *Inf*-Operators, der ähnlich „empfindlich“ reagiert. Also stehen wir aus „logischer Sicht“ vor dem Problem, den *„Standard-All-Operator“* durch *„Nicht-Standard-All-Operatoren“*, die „robuster“ sind, zu ersetzen. Wir haben dazu schon die Quantoren „Fast-alle“, „die Meisten“, „Viele“ erwähnt; allgemein könnte man an *„Maß-Operatoren“* in der Menge $\langle 0, 1\rangle$ denken.

Zum Schluß dieses Abschnitts fragen wir, ob es für Inc_{L} ein dem **Theorem 5.2.1** analoges Theorem gibt? Das folgende Theorem gibt darauf eine partielle Antwort, wobei man sich davor hüten muß, generell Bedingungen der Form $Inc_Ł(F, G) = 1$ zu verwenden; denn dann kann es geschehen, daß man auf Grund der Bedingung

$$F \subseteqq G \text{ genau dann, wenn } Inc_Ł(F, G) = 1$$

nur Aussagen von **Theorem 5.2.1** reproduziert.

Theorem 5.3.1

1. *$Inc_Ł$ ist **reflexiv**, d. h. für jede Fuzzy-Menge F über U gilt:*

$$Inc_Ł(F, F) = 1.$$

2. *$Inc_Ł$ ist **transitiv**, d. h. für jede Fuzzy-Menge F, G, H über U gilt:*

$$min(Inc_Ł(F, G), Inc_Ł(G, H)) \leqq Inc_Ł(F, H)$$

3. $Inc_Ł(F, G) = Inc_Ł\left(\overline{G}, \overline{F}\right)$
4. $Inc_Ł(F, G) \leqq Inc_Ł(F \cap H, G \cap H)$
5. $Inc_Ł(F, G) \leqq Inc_Ł(H \cap F, H \cap G)$
6. $Inc_Ł(F, G) \leqq Inc_Ł(F \cup H, G \cup H)$
7. $Inc_Ł(F, G) \leqq Inc_Ł(H \cup F, H \cup G)$

Beweis
Rückgang auf die Definitionen. **Aufgabe 5.3.1**. ■

Bemerkung
Man stellt fest, daß Behauptung 5 aus Behauptung 4 und daß Behauptung 7 aus Behauptung 6 folgt, wenn man die folgenden „Kommutativitätsgleichungen" zur Verfügung hat:

8. $Inc_Ł(F \cap G, H) = Inc_Ł(G \cap F, H)$
9. $Inc_Ł(H, F \cap G) = Inc_Ł(H, G \cap F)$
10. $Inc_Ł(F \cup G, H) = Inc_Ł(G \cup F, H)$
11. $Inc_Ł(H, F \cup G) = Inc_Ł(H, G \cup F)$

Beweis
dieser Gleichungen als **Aufgabe 5.3.2**. ■

Wir stellen nun die Frage, inwiefern auch die Aussagen 3, 4, 5, 9 und 10 von Theorem 5.2.1 auf die „weiche" Łukasiewiczsche Inklusionsbeziehung $Inc_Ł$ übertragbar sind. Hier stehen wir vor dem Problem, entweder nur „scharfe" Aussagen zu treffen in der Form $Inc_Ł(F, G) = 1$ (was genau dann gilt, wenn $F \subseteqq G$) oder mit der „vollen" Inklusionsbeziehung $Inc_Ł$ zu arbeiten und ihr eine Fuzzy-Gleichheitsrelation (auch „approximative" oder „weiche" Gleichheitsrelation) gegenüberzustellen.

Leitfaden ist für diese Definition die folgende Beziehung für scharfe Teilmengen $A, B \subseteqq U$:

(5.1) $$A = B \text{ genau dann, wenn } A \subseteqq B \text{ und } B \subseteqq A.$$

Dieselbe Beziehung gilt auch für die „scharfe“ Gleichheit und die „scharfe“ Teilmengenbeziehung für Fuzzy-Mengen F und G über U, deren Definition wir zur Erinnerung wiederholen:

$$F = G =_{def} \text{Für jedes } x \in U \text{ gilt: } F(x) = G(x)$$
$$F \subseteqq G =_{def} \text{Für jedes } x \in U \text{ gilt: } F(x) \leqq G(x).$$

Aus diesen Definitionen ergibt sich unmittelbar

(5.2) $$F = G \text{ genau dann, wenn } F \subseteqq G \text{ und } G \subseteqq F.$$

Die Aussagen (5.1) und (5.2) nehmen wir zum Anlaß, die approximative ŁUKASIEWICZsche Identität $Id_{Ł}$ wie folgt zu definieren.

Definition 5.3.3

$$Id_{Ł}(F,G) =_{def} min\,(Inc_{Ł}(F,G), Inc_{Ł}(G,F))$$

Bemerkungen und Folgerungen

1. Die **Definition 5.3.3** ist unmittelbar aus (5.2) gewonnen worden, indem wir $F \subseteqq G$ durch $Inc_{Ł}(F,G)$ und den zweiwertigen Konnektor „und“ durch „*min*“ ersetzt haben.

2. Löst man in **Definition 5.3.3** die Definition von $Inc_{Ł}(F,G)$ auf, erhält man nach einigen Umformungen die Gleichung

$$Id_{Ł}(F,G) = Inf\,\{1 - |F(x) - G(x)| \mid x \in U\}$$

Diese Gleichung ist für das „Rechnen“ mit der approximativen Identität besonders bequem und anwendungsfreundlich.

3. Die „approximative“ Gleichheit $Id_{Ł}$ ist mit der „scharfen“ Gleichheit von Fuzzy-Mengen „**kompatibel**“, weil die folgende Aussage gilt:

$$Id_{Ł}(F,G) = 1 \text{ genau dann, wenn } F = G$$

4. Die „weiche“ Inklusion $Inc_{Ł}$ ist *antisymmetrisch* bezüglich der „weichen“ Identität $Id_{Ł}$, d. h. es gilt für alle Fuzzy-Mengen F und G über U:

$$min\,(Inc_{Ł}(F,G), Inc_{Ł}(G,F)) \leqq Id_{Ł}(F,G).$$

Diese Beziehung gilt trivial nach Definition von $Id_{Ł}$. Man kann sie als eine „Übersetzung“ der Aussage 3 von **Theorem 5.2.1**, nämlich von

$$\text{„Wenn } F \subseteqq G \text{ und } G \subseteqq F\text{, so } F = G\text{“}$$

deuten, indem $F \subseteqq G$, $G \subseteqq F$ und $F = G$ in dieser Reihenfolge durch $Inc_{Ł}(F,G)$, $Inc_{Ł}(G,F)$ und $Id_{Ł}(F,G)$ ersetzt werden, ferner „und“ in „*min*“ übergeht und der „Wenn ... , so“ Konnektor durch die ŁUKASIEWICZsche Implikation interpretiert wird. Die Ungleichung

$$min\,(Inc_{Ł}(F,G), Inc_{Ł}(G,F)) \leqq Id_{Ł}(F,G)$$

wird gefordert, weil die Beziehung

$$\text{„Wenn } F \subseteqq G \text{ und } G \subseteqq F\text{, so } F = G\text{“}$$

mit dem Wahrheitswert 1 gelten soll und für die ŁUKASIEWICZsche Implikation $imp_{Ł}$ gilt

$$imp_{Ł}(x,y) = 1 \text{ genau dann, wenn } x \leqq y.$$

Theorem 5.3.2

1. *$Id_Ł$ ist **reflexiv** über $\mathfrak{F}(U)$, d. h. für jede Fuzzy-Menge F über U gilt:*

$$Id_Ł(F,F) = 1$$

2. *$Id_Ł$ ist **transitiv**, d. h. für jede Fuzzy-Menge F,G,H über U gilt:*

$$min\,(Id_Ł(F,G), Id_Ł(G,H)) \leqq Id_Ł(F,H).$$

3. *$Id_Ł$ ist **symmetrisch**, d. h. für jede Fuzzy-Menge F,G über U gilt:*

$$Id_Ł(F,G) = Id_Ł(G,F)$$

Beweis

Elimination der Definition von $Id_Ł$. **Aufgabe 5.3.3**. ■

Die Gültigkeit der Bedingungen 1, 2 und 3 fassen wir zusammen, indem wir $Id_Ł$ eine „weiche“ oder „approximative“ Äquivalenzrelation über $\mathfrak{F}(U)$ nennen.

In den *„Bemerkungen und Folgerungen“* im Anschluß an **Definition 5.3.3** haben wir u. a. in Punkt 4 festgestellt, daß für beliebige Fuzzy-Mengen F,G über U gilt:

4. Wenn $Id_Ł(F,G) = 1$, so $F = G$.

Gilt für eine binäre „weiche“ Relation außer den in **Theorem 5.3.2** angegebenen Forderungen 1, 2 und 3 auch noch die Aussage 4, so wollen wir diese Relation eine „weiche“ oder „approximative“ Identität nennen.

Für mehr Informationen zu diesem Punkt siehe Kapitel 6, wo wir beliebige Fuzzy-Relationen studieren werden.

Zum Abschluß dieses Abschnitts fragen wir, wie die Aussagen 4, 5, 9, 10 von Theorem 5.2.1 für $Inc_Ł$ mit $Id_Ł$ formuliert werden können. Dazu prüfe man, ob die folgenden Gleichungen für beliebige Fuzzy-Mengen F und G über U gelten:

4′. $Inc_Ł(F,\not{\phi}) = Id_Ł(F,\not{\phi})$

5′. $Inc_Ł(\not{U},F) = Id_Ł(\not{U},F)$

9′. $Inc_Ł(F,G) = Id_Ł(F,F \cap G)$

10′. $Inc_Ł(F,G) = Id_Ł(G,F \cup G)$

5.4 Nicht-Łukasiewiczsche „weiche“ Inklusionsbeziehungen

Das in **Definition 5.3.2** angegebene „natürliche“ Definitionsschema zur Erzeugung weiterer Inklusionsbeziehungen wenden wir nun wie folgt an:

Definition 5.4.1

1. *Die **Kleene-Dienes-Inklusion***

$$Inc_{KD}(F,G) =_{def} Inf\,\{imp_{KD}(F(x),G(x))\,|\,x \in U\}$$

2. *Die **Łukasiewicz-Inklusion** (zur Wiederholung und Einordnung)*

$$Inc_Ł(F,G) =_{def} Inf\,\{imp_Ł(F(x),G(x))\,|\,x \in U\}$$

3. *Die* **Reichenbach-*Inklusion***

$$Inc_{\mathrm{R}}(F,G) =_{def} Inf\,\{imp_{\mathrm{R}}(F(x),G(x))\,|\,x \in U\}$$

4. *Die* **Gödel-Heyting-*Inklusion***

$$Inc_{\mathrm{GH}}(F,G) =_{def} Inf\,\{imp_{\mathrm{GH}}(F(x),G(x))\,|\,x \in U\}$$

5. *Die* ***schwach-drastische Inklusion***

$$Inc_{\mathrm{sd}}(F,G) =_{def} Inf\,\{imp_{\mathrm{sd}}(F(x),G(x))\,|\,x \in U\}$$

6. *Die* **Gaines-Rescher-*Inklusion***

$$Inc_{\mathrm{GR}}(F,G) =_{def} Inf\,\{imp_{\mathrm{GR}}(F(x),G(x))\,|\,x \in U\}$$

7. *Die* **Goguen-*Inklusion***

$$Inc_{\mathrm{Go}}(F,G) =_{def} Inf\,\{imp_{\mathrm{Go}}(F(x),G(x))\,|\,x \in U\}$$

8. *Die* **Zadeh-*Inklusion***

$$Inc_{\mathrm{Z}}(F,G) =_{def} Inf\,\{imp_{\mathrm{Z}}(F(x),G(x))\,|\,x \in U\}$$

Zum besseren Verständnis listen wir die verwendeten Implikationen noch einmal auf. Sei dazu $x, y \in \langle 0, 1\rangle$.

1. Die Kleene-Dienes-*Implikation*

$$imp_{\mathrm{KD}}(x,y) =_{def} max(1-x,y)$$

2. Die Łukasiewicz-*Implikation*

$$imp_{\mathrm{L}}(x,y) =_{def} min(1,1-x+y)$$

3. Die Reichenbach-*Implikation*

$$imp_{\mathrm{R}}(x,y) =_{def} 1-x+xy$$

4. Die Gödel-Heyting-*Implikation*

$$imp_{\mathrm{GH}}(x,y) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{falls } x \leqq y \\ y, & \text{falls } x > y \end{cases}$$

5. Die *schwach-drastische Implikation*

$$imp_{\mathrm{sd}}(x,y) =_{def} \begin{cases} y, & \text{falls } x = 1 \\ 1-x, & \text{falls } y = 0 \\ 0, & \text{falls } x < 1 \textbf{ oder } y > 0 \end{cases}$$

6. Die GAINES-RESCHER-*Implikation*

$$imp_{\mathrm{GR}}(x,y) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{falls } x \leqq y \\ 0, & \text{falls } x > y \end{cases}$$

7. Die GOGUEN-*Implikation*

$$imp_{\mathrm{Go}}(x,y) =_{def} \begin{cases} 1 & \text{, falls } x = 0 \\ min\left(1, \frac{y}{x}\right) & \text{, falls } x > 0 \end{cases}$$

8. Die ZADEH-*Implikation*

$$imp_{\mathrm{Z}}(x,y) =_{def} max(1-x, min(x,y))$$

Aufgabe 5.4.1 *Man prüfe, welche der in Abschnitt 5.3 für die „weiche“ ŁUKASIEWICZsche Inklusionsbeziehung festgestellten Eigenschaften für die „weichen“* ***nicht****-ŁUKASIEWICZschen Implikationsbeziehungen gelten oder nicht gelten.*

Aufgabe 5.4.2 *Man verwende die definierten Inklusionen als Material zur Veranschaulichung der* ***Axiome*** *aus dem folgenden Abschnitt 5.5.*

5.5 Ein Axiomensystem zur Charakterisierung „weicher“ Inklusionsbeziehungen für Fuzzy-Mengen

Wir beziehen uns auf D. SINHA und E. R. DOUGHERTY [39].

Hilfsbegriffe

Gegeben sei ein nicht-leeres Universum $U \neq \phi$. Es seien F und G Fuzzy-Mengen über U, d. h.

$$F, G : U \to \langle 0, 1 \rangle$$

Man definiert den Kern $KER(F)$ sowie den *Cokern* $CKER(F)$ einer Fuzzy-Menge F wie folgt:

$$KER(F) =_{def} \{x \mid x \in U \;\text{ und }\; F(x) = 1\}$$
$$CKER(F) =_{def} \{x \mid x \in U \;\text{ und }\; F(x) = 0\}$$

Zur Formulierung gewisser Axiome benötigen wir außerdem die folgende „Transformation“ einer Fuzzy-Menge F.

Gegeben sei eine Permutation π des Universums, d. h. π ist eine **eineindeutige** Abbildung **von** U **auf** U (d. h. jedes Element von U ist Bild eines anderen). Wir definieren dann die durch π transformierte Fuzzy-Menge $\pi(F)$ der Menge F wie folgt:

$$\pi(F)(x) =_{def} F(\pi(x)) \qquad \text{für alle } x \in U$$

Wir kommen nun zur Formulierung der in [39] angegebenen Axiome.

Dazu sei eine beliebige zweistellige Abbildung *Inc* gegeben, die **jeder** Fuzzy-Menge F und G über U, also mit

$$F, G : U \to \langle 0, 1 \rangle$$

eine reelle Zahl

$$Inc(F, G) \in \langle 0, 1 \rangle$$

zuordnet. In der oben angegebenen Arbeit wird nun gefordert, daß *Inc* alle (oder einige) der folgenden Axiome erfüllt.

INC$_1$. *Kompatibilität* mit der scharfen Inklusion.

$$Inc(F, G) = 1 \text{ genau dann, wenn } F \subseteqq G$$

INC$_2$. *Kompatibilität* mit der Kern-Cokern-Eigenschaft.

$$Inc(F, G) = 0 \text{ genau dann, wenn } KER(F) \cap CKER(G) \neq \emptyset$$

INC$_3$. *Monotonie* in der zweiten Stelle bezüglich der **scharfen** Inklusion (auch eine „Form" der Kompatibilität).

$$\text{Wenn } F \subseteqq G\text{, so } Inc(H, F) \leqq Inc(H, G)$$

INC$_4$. *Comonotonie* in der ersten Stelle von *Inc* bezüglich der „scharfen" Inklusion (ebenfalls eine „Form" der Kompatibilität).

$$\text{Wenn } F \subseteqq G\text{, so } Inc(G, H) \leqq Inc(F, H).$$

INC$_5$. *Invarianz* der Inklusionsbeziehung gegenüber Permutationen.

Ist π eine Permutation von U, so gilt:

$$Inc(\pi(F), \pi(G)) = Inc(F, G)$$

INC$_6$. *Invarianz* der Inklusionsbeziehung gegenüber Komplementbildung.

$$Inc\left(\overline{F}, \overline{G}\right) = Inc(G, F)$$

INC$_7$. *Linksverträglichkeit* mit der Vereinigungsoperation $F \cup G$.

$$Inc\,(F \cup G, H) = min(Inc(F, H), Inc(G, H))$$

INC$_8$. *Rechtsverträglichkeit* mit der Durchschnittsoperation $F \cap G$.

$$Inc\,(H, F \cap G) = min(Inc(H, F), Inc(H, G))$$

INC$_9$. *Rechtsabschätzung* für die Vereinigungsoperation $F \cup G$

$$Inc\,(H, F \cup G) \geqq max(Inc(H, F), Inc(H, G))$$

„Unsere" Diskussion der Axiome

ad 1. Klar, wenn man die Kompatibilität von $Inc(F, G) = 1$ mit der scharfen Inklusion $F \subseteqq G$ verlangt, wobei zu bemerken ist, daß $F \subseteqq G$ ihrerseits mit der Inklusionsbeziehung für Teilmengen kompatibel ist.

ad 2. Der „scharfe“ Hintergrund (Ausgangspunkt) ist die folgende Beziehung für scharfe Mengen

$$M \subseteqq N \text{ genau dann, wenn } M \cap \overline{N} = \emptyset.$$

Unter Beachtung von Axiom INC_1 wäre es deshalb vernünftig zu fordern, daß gilt:

INC_2'. $Inc(F,G) = 1$ genau dann, wenn $KER(F) \cap CKER(G) = \emptyset$.

Hierzu ist allerdings zu bemerken, daß mit Benutzung von INC_1 die Richtung ($\Rightarrow$) beweisbar wird.

Wenn wir INC_1 benutzen, haben wir zu beweisen:

$$\text{Wenn } F \subseteqq G\text{, so } KER(F) \cap CKER(G) = \emptyset.$$

Dazu nehmen wir an, daß $KER(F) \cap CKER(G) \neq \emptyset$ gilt, also existiert ein $x \in U$ mit $F(x) = 1$ und $G(x) = 0$. Damit ist für dieses x die Bedingung $F(x) \leqq G(x)$ verletzt, also gilt **nicht** $F \subseteqq G$.

Die Umkehrung muß nicht gelten, wie man leicht durch Gegenbeispiele belegen kann.

Kontraponiert man Axiom INC_2', erhält man gleichwertig

INC_2''. $Inc(F,G) < 1$ genau dann, wenn $KER(F) \cap CKER(G) \neq \emptyset$.

Wenn wir die Beziehung

$$\text{Wenn } F \subseteqq G\text{, so } KER(F) \cap CKER(G) = \emptyset$$

sowie INC_1 benutzen, können wir von INC_2'' die Richtung ($\Leftarrow$) beweisen, d. h. es gilt:

$$\text{Wenn } KER(F) \cap CKER(G) \neq \emptyset\text{, so } Inc(F,G) < 1.$$

Da $Inc(F,G)$ im allgemeinen **beliebige** Werte aus $\langle 0,1 \rangle$ annehmen kann, entsteht das Problem, ob die Bedingung $Inc(F,G) < 1$ die Bedingung $Inc(F,G) = 0$ impliziert.

Allgemein kann man fragen, ob gilt:

$$\text{Wenn } KER(F) \cap CKER(G) \neq \emptyset\text{, so } Inc(F,G) = 0.$$

Hier gilt nun das folgende

Lemma 5.5.1
Ist Inc durch eine Implikation durch

$$Inc(F,G) =_{def} Inf\,\{imp(F(x), G(x))\,|\,x \in U\}$$

erzeugt, und ist imp zweiwertig kompatibel, indem die Gleichung

$$imp(1,0) = 0$$

gilt, so folgt:

$$\textit{Wenn } KER(F) \cap CKER(G) \neq \emptyset\textit{, so } Inc(F,G) = 0$$

Beweis
Rückgang auf die Definitionen. ∎

Die Richtung ($\Rightarrow$) von INC_2 kann durch folgendes Beispiel widerlegt werden.

Sei $U = \{0, 1, \dots\}$ (Menge der natürlichen Zahlen).

Wir definieren Fuzzy-Mengen F, G wie folgt:

$$F(x) =_{def} \begin{cases} 0 & \text{, falls } x = 0 \\ 1 & \text{, falls } x > 0 \end{cases}$$
$$G(x) =_{def} \begin{cases} 0 & \text{, falls } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{, falls } x > 0. \end{cases}$$

und verwenden zur Definition von *Inc* die ŁUKASIEWICZsche Implikation, d. h.

$$Inc(F, G) =_{def} Inf\,\{min(1, 1 - F(x) + G(x))\,|\,x \in U\}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} min(1, 1 - F(0) + G(0)) &= min(1, 1) = 1 \\ min(1, 1 - F(x) + G(x)) &= min\left(1, 1 - 1 + \tfrac{1}{x}\right) = \tfrac{1}{x} \qquad \text{für } x > 0. \end{aligned}$$

Also folgt

$$Inc(F, G) = 0.$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} KER(F) &= \{1, 2, \dots\} \\ CKER(G) &= \{0\}, \end{aligned}$$

also $KER(F) \cap CKER(G) = \emptyset$, somit ist die Richtung ($\Rightarrow$) von INC_2 widerlegt.

ad 3. Der „scharfe“ Hintergrund ist das folgende Lemma für scharfe Mengen M, N und L:

$$\text{Wenn } M \subseteqq N \text{ und } N \subseteqq L\,, \text{ so } M \subseteqq L$$

Das ist aber die Transitivität der Inklusion für scharfe Mengen.

Problem
Was ergibt sich, wenn man Axiom INC_3 durch die „echte“ Transitivität, nämlich

TR. $min(Inc(F, G), Inc(G, H)) \leqq Inc(F, H)$

ersetzt?

ad 4. Dieses Axiom hat ebenfalls die Transitivität der Teilmengenbeziehung für scharfe Mengen im „Hintergrund“.

ad 5. Klar für scharfe Mengen.

Problem
Kann man dieses Axiom auch für Abbildungen $\varphi : U \to U$ fordern, die **keine** Permutationen sind?

ad 6. „Scharf“ gilt

$$\overline{M} \subseteqq \overline{N} \text{ genau dann, wenn } N \subseteqq M$$

ad 7. „Scharf“ gilt

$$M \cup N \subseteqq K \text{ genau dann, wenn } M \subseteqq K \text{ und } N \subseteqq K$$

ad 8. „Scharf“ gilt

$$K \subseteqq M \cap N \text{ genau dann, wenn } K \subseteqq M \text{ und } K \subseteqq N.$$

ad 9. „Scharf“ gilt

$$\text{Wenn } K \subseteqq M \text{ oder } K \subseteqq N\text{, so } K \subseteqq M \cup N.$$

6. Fuzzy-Relationen

6.1 Scharfe und unscharfe Relationen

Die Begriffe der Relation und der Funktion spielen in der üblichen scharfen (zweiwertigen) Mathematik sowohl in der Theorie als auch in den Anwendungen eine fundamentale Rolle. Ohne diese Begriffe wäre es sinnlos, überhaupt Mathematik betreiben und anwenden zu wollen. Demgemäß stehen wir vor der Aufgabe, die Begriffe in geeigneter Form in die Fuzzy-Mathematik zu übertragen.

Wir beschäftigen uns zuerst mit dem Begriff der Relation, aus dem später der Begriff der Funktion durch Spezialisierung gewonnen wird.

Gegeben seien eine natürliche Zahl $n \geqq 1$ und nicht leere Universa $U_1, \ldots, U_n$. Wie üblich definieren wir das Kartesische Produkt $U_1 \times \cdots \times U_n$ der Universa $U_1, \ldots, U_n$ als Menge aller n-Tupel $[x_1, \ldots, x_n]$ mit $x_1 \in U_1, \ldots, x_n \in U_n$.

Eine scharfe Relation R zwischen Elementen aus $U_1, \ldots, U_n$ wird dann definiert als Teilmenge von $U_1 \times \cdots \times U_n$, also $R \subseteqq U_1 \times \cdots \times U_n$. Demgemäß definiert man:

Definition 6.1.1
S ist eine unscharfe („weiche“ oder „Fuzzy-“) Relation über $U_1, \ldots, U_n$
$=_{def}$ $S : U_1, \ldots, U_n \to \langle 0, 1 \rangle$.

Bemerkungen

1. Die Analogie

Teilmenge M von U als $M \subseteqq U$	Fuzzy-Menge F über U als $F : U \to \langle 0, 1 \rangle$

zu

Relation R über $U_1, \ldots, U_n$ als $R \subseteqq U_1 \times \cdots \times U_n$	Fuzzy-Relation S über $U_1, \ldots, U_n$ als $S : U_1 \times \cdots \times U_n \to \langle 0, 1 \rangle$

ist unverkennbar.

2. Entsprechend der obigen Analogie wird für $x_1 \in U_1, \ldots, x_n \in U_n$ die reelle Zahl $S(x_1, \ldots, x_n)$ auch Zugehörigkeitsgrad des n-Tupels $[x_1, \ldots, x_n]$ zur Relation S genannt bzw. als Wahrheitswert bezeichnet, zu dem die Relation S auf das n-Tupel $[x_1, \ldots, x_n]$ zutrifft.

Beispiele

Gegeben $U_1 = U_2 = \{0, 1, \dots\}$ (Menge der natürlichen Zahlen).

Beispiel 1 R sei die scharfe Relation „Größer“ über U_1, U_2 (auch „binäre“ Relation „Größer“ über der Menge der natürlichen Zahlen genannt). Dann gilt:

$$[m, n] \in R \text{ genau dann, wenn } m < n.$$

Beispiel 2 In der üblichen Mathematik wird manchmal geschrieben $m \ll n$ mit der Interpretation „m ist sehr viel kleiner als n“ bzw. „n ist sehr viel größer als m“. Diese Beziehung ist zweiwertig nicht sinnvoll definierbar. Legt man eine Konstante C fest, etwa $C = 1000$, und setzt man:

$$m \ll n =_{def} m + C \leqq n,$$

dann **gilt** z. B.

$$5 \ll 1005, \qquad \text{weil } 5 + 1000 \leqq 1005 \tag{6.1}$$

jedoch gilt **nicht**

$$6 \ll 1005, \qquad \text{weil } 6 + 1000 > 1005 \tag{6.2}$$

Solche Ergebnisse, erhalten auf Grund der obigen Definition von $\ll$, sind mathematisch zwar richtig, sie weichen jedoch **erheblich** von dem ab, was man anschaulich-intuitiv unter „sehr viel kleiner“ versteht.

Somit liegt eine sogenannte *„semantische Paradoxie“* vor, d. h. das (mathematische) Modell beschreibt einen (semantischen) Sachverhalt unzutreffend. Also muß das (mathematische) Modell abgeändert (verfeinert) werden. Die Verfeinerung besteht darin, daß man zu einer unscharfen Relation S übergeht, die man z. B. wie folgt definieren kann

$$S(m,n) =_{def} \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{n-m} & \text{, falls } m < n \\ 0 & \text{, falls } m \geqq n \end{cases}$$

Zu dieser Definition ist zu bemerken:

1. Für $m < n$ ist der Wahrheitswert $S(m,n)$ umso größer, je größer der Abstand $n-m$ ist. Konvergiert $n-m$ nach ∞ ($n - m \to \infty$), so konvergiert $S(m,n)$ gegen 1,

2. Ein absolutes „sehr viel kleiner“, d. h. natürliche Zahlen $m < n$ mit $S(m,n) = 1$ gibt es nicht; diese Erscheinung ist „sehr vernünftig“, d. h. sie bedeutet eine sehr passende Fuzzy-Modellierung von „sehr viel kleiner“. Zur genaueren Analyse verweisen wir auf die Fuzzy-Modellierung des Konnektors „*sehr*“ (siehe das betreffende Kapitel später).

3. Offenbar ist die obige Definition nicht die einzige möglichkeit zur Fuzzy-Modellierung von „sehr viel kleiner“. Sei s eine fixierte reelle Zahl mit $0 \leqq s < \infty$. Dann kann man definieren

$$S_s(m,n) =_{def} \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{n-m}\right)^s & \text{, falls } m < n \\ 0 & \text{, falls } m \geqq n \end{cases}$$

   Dann kann man jede der Relationen S_s als eine mögliche Fuzzy-Modellierung ansehen, weil $S_s(m,n)$ für $m < n$ **monoton** *wachsend* von der Entfernung $n - m$ abhängt.

   Der „scharfe“ Fall (siehe **Beispiel 1**) ergibt sich als Spezialfall $s = 0$, weil stets $\left(1 - \frac{1}{n-m}\right)^0 = 1$ gilt.

4. Welche der in Punkt 3 vorgeschlagenen Relationen S_s man zur Modellierung von „sehr viel kleiner" wählt, ist keine mathematische Frage, sondern wird durch das betrachtete Anwendungsproblem nahegelegt. Selbstverständlich kann man auch andere Funktionen $f(m,n)$, die für $m < n$ die Bedingung $0 \leqq f(m,n) \leqq 1$ erfüllen, für monoton wachsende Entfernung $n - m$ auch monoton wachsen und schließlich für $m \geqq n$ die Gleichung $f(m,n) = 0$ erfüllen, wählen. Ein Beispiel wäre etwa

$$S'_e(m,n) =_{def} \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{e^{n-m}} & \text{, falls } m < n \\ 0 & \text{, falls } m \geqq n \end{cases}$$

6.2 Durchschnitt, Vereinigung und Komplement von Fuzzy-Relationen

Gegeben seien eine natürliche Zahl $n \geqq 1$ sowie n Universa $U_1, \ldots, U_n$.

Wir diskutieren und definieren die Operationen *Durchschnitt*, *Vereinigung* und *Komplement* nun in **drei** Versionen, nämlich für

- scharfe Relationen,
- unscharfe Relationen als „Fuzzy-Standardoperationen", basierend auf $min(x,y)$, $max(x,y)$ und $1 - x$
- unscharfe Relationen als „Fuzzy-**Nicht**-Standardoperationen", basierend auf $\tau(x,y)$, $\sigma(x,y)$ und $\nu(x)$, wobei ν eine Negation, τ eine T-Norm und σ die dazu bezüglich ν duale S-Norm ist.

Gegeben seien die scharfen Relationen R_1 und R_2 über $U_1, \ldots, U_n$, d. h. es gilt

$$R_i \subseteqq U_1 \times \cdots \times U_n \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Definition 6.2.1

1. $R_1 \cap R_2 =_{def}$ *Der mengentheoretische Durchschnitt von R_1 und R_2, betrachtet als Mengen über dem Universum $U_1 \times \cdots \times U_n$.*
2. $R_1 \cup R_2 =_{def}$ *Die mengentheoretische Vereinigung von R_1 und R_2, betrachtet als Mengen über dem Universum $U_1 \times \cdots \times U_n$.*
3. $\overline{R_1} =_{def}$ *Das mengentheoretische Komplement von R_1, betrachtet als Menge über dem Universum $U_1 \times \cdots \times U_n$.*

Im Hinblick auf die in **Definition 6.2.1** eingeführten Operationen mit Relationen kann man generell feststellen, daß sie dieselben Rechengesetze wie die „BOOLEschen" Operationen mit Mengen erfüllen, da sie (genaugenommen) nur Spezialfälle der allgemeinen Mengenoperationen darstellen.

Analoge Argumente gelten für die in der folgenden Definition eingeführten Fuzzy-Standard-Operationen mit unscharfen Relationen S_1 und S_2, wobei

$$S_i : U_1 \times \cdots \times U_n \to \langle 0, 1 \rangle \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Es sei $x_1 \in U_1, \ldots, x_n \in U_n$.

Definition 6.2.2

1. $(S_1 \cap S_2)(x_1, \ldots, x_n) =_{def} min(S_1(x_1, \ldots, x_n), S_2(x_1, \ldots, x_n))$

2. $(S_1 \cup S_2)(x_1, \ldots, x_n) =_{def} min(S_1(x_1, \ldots, x_n), S_2(x_1, \ldots, x_n))$
3. $\left(\overline{S_1}\right)(x_1, \ldots, x_n) =_{def} 1 - S_1(x_1, \ldots, x_n)$

Alle Betrachtungen aus Abschnitt 2.5 können übernommen werden.

Es seien nun eine beliebige Negation ν, eine T-Norm τ und die dazu bezüglich ν duale S-Norm σ gegeben. Wir definieren dann, wobei wieder $x_1 \in U_1, \ldots, x_n \in U_n$.

Definition 6.2.3

1. $(S_1 \Cap S_2)(x_1, \ldots, x_n) =_{def} \tau(S_1(x_1, \ldots, x_n), S_2(x_1, \ldots, x_n))$
2. $(S_1 \Cup S_2)(x_1, \ldots, x_n) =_{def} \sigma(S_1(x_1, \ldots, x_n), S_2(x_1, \ldots, x_n))$
3. $\left(\overline{S_1}^{\nu}\right)(x_1, \ldots, x_n) =_{def} \nu(S_1(x_1, \ldots, x_n))$

6.3 Das Produkt von Fuzzy-Relationen

Das Produkt von Relationen ist eine **neue** Operation, die **nicht** auf eine (oder mehrere) der Operationen Durchschnitt, Vereinigung, Komplement zurückführbar ist. Es ist für Relationen charakteristisch, d. h. es läßt sich in sinnvoller Weise nicht für Mengen definieren.

Wir betrachten das Produkt — in Analogie zu Abschnitt 6.2 — in drei Versionen, nämlich

- für scharfe Relationen,
- als Standard-Produkt für Fuzzy-Relationen,
- als Nicht-Standard-Produkt für Fuzzy-Relationen, basierend auf einer beliebigen T-Norm und einem geeignet gewählten Quantor.

Wir beginnen mit der Definition und Untersuchung des Produkts für scharfe Relationen.

Gegeben seien natürliche Zahlen $m \geqq 1$ und $n \geqq 1$ sowie nicht-leere Universa $U_1, \ldots, U_m$, $V_1, \ldots, V_n$ und W.

Gegeben seien ferner scharfe Relationen R_1 über $U_1, \ldots, U_m, W$ und R_2 über $W, V_1, \ldots, V_n$, d. h.

$$R_1 \subseteqq U_1 \times \cdots \times U_m \times W$$

und

$$R_2 \subseteqq W \times V_1 \times \cdots \times V_n.$$

Das Produkt $R_1 \circ R_2$ der Relationen R_1 und R_2 wird dann wie folgt definiert, wobei wesentlich ist, daß die Elemente der „letzten“ Stelle von R_1 und die Elemente der „ersten“ Stelle von R_2 aus derselben Menge W gewählt sind.

Definition 6.3.1

$[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n] \in R_1 \circ R_2 =_{def}$ *Es gibt ein* $z \in W$, *so daß* $[x_1, \ldots, x_m, z] \in R_1$ *und* $[z, y_1, \ldots, y_n] \in R_2$.

Das folgende Theorem beinhaltet einige Regeln für das Rechnen mit dem Produkt.

Theorem 6.3.1

1. *Assoziativität*

$$R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$$

2. *Links-Distributivität bezüglich* $\cup$

$$R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$$

3. *Rechts-Distributivität bezüglich* $\cup$

$$(R_1 \cup R_2) \circ R_3 = (R_1 \circ R_3) \cup (R_2 \circ R_3)$$

4. *Links-Monotonie bezüglich* $\subseteqq$

$$\textit{Wenn } R_1 \subseteqq R_2\,, \textit{ so } R_3 \circ R_1 \subseteqq R_3 \circ R_2.$$

5. *Rechts-Monotonie bezüglich* $\subseteqq$

$$\textit{Wenn } R_1 \subseteqq R_2\,, \textit{ so } R_1 \circ R_3 \subseteqq R_2 \circ R_3.$$

Beweis
Wir beweisen — als Musterlösung — nur die Aussage 2; die übrigen Beweise werden als **Aufgabe 6.3.1** gestellt.

ad 2. Zur Vereinfachung der Schreibweisen verwenden wir die folgenden Abkürzungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &\text{ für } [x_1, \ldots, x_m] \\ \mathfrak{y} &\text{ für } [y_1, \ldots, y_n] \\ [\mathfrak{x}, z] &\text{ für } [x_1, \ldots, x_m, z] \\ [z, \mathfrak{y}] &\text{ für } [z, y_1, \ldots, y_n] \end{aligned}$$

Außerdem verwenden wir — der kürzeren Schreibweisen wegen — die Notationen des Prädikatenkalküls der ersten Stufe.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] \in R_1 \circ (R_2 \cup R_3) \\
&\quad\updownarrow \\
&\exists z\,([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in R_2 \cup R_3) \\
&\quad\updownarrow \\
&\exists z\,([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge ([z, \mathfrak{y}] \in R_2 \vee [z, \mathfrak{y}] \in R_3)) \\
&\quad\updownarrow \\
&\exists z\,(([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in R_2) \vee ([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in R_3)) \\
&\quad\updownarrow \\
&\exists z\,([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in R_2) \vee \exists z\,([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in R_3) \\
&\quad\updownarrow \\
&[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] \in R_1 \circ R_2 \vee [\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] \in R_1 \circ R_3 \\
&\quad\updownarrow \\
&[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] \in R_1 \circ R_2 \cup R_1 \circ R_3
\end{aligned}$$

■

Bei diesen Schlüssen ist wesentlich, daß die folgenden (zweiwertigen!) logischen Äquivalenzen gelten

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

und

$$\exists x(A \vee B) \equiv \exists x A \vee \exists x B$$

Bezüglich des Durchschnitts und des Komplements von Relationen kann man für das Produkt im allgemeinen keine Gleichungen beweisen, sondern nur noch die folgenden Inklusionen.

Theorem 6.3.2

1. *Schwache Links-Distributivität bezüglich* $\cap$

$$R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteqq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$$

2. *Schwache Rechts-Distributivität bezüglich* $\cap$

$$(R_1 \cap R_2) \circ R_3 \subseteqq (R_1 \circ R_3) \cap (R_2 \circ R_3)$$

3. *Wenn* R_1 *in den ersten* m *Stellen total ist, d. h. für alle* $\mathfrak{x} \in U_1 \times \cdots \times U_m$ *gilt*

$$\exists z[\mathfrak{x}, z] \in R_1,$$

so gilt $\overline{R_1 \circ R_2} \subseteqq R_1 \circ \overline{R_2}$.

Beweis
Wir verwenden wieder dieselben Abkürzungen und Notationen wie im Beweis von **Theorem 6.3.1**.

ad 1. Es gilt:

$$\begin{array}{l}
[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] \in R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \\
\quad \updownarrow \\
\exists z\,([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in R_2 \cap R_3) \\
\quad \updownarrow \\
\exists z\,([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge ([z, \mathfrak{y}] \in R_2 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in R_3)) \\
\quad \updownarrow \\
\exists z\,(([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in R_2) \wedge ([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in R_3)) \\
\quad \downarrow \quad (\textbf{Achtung: } \uparrow \text{ gilt im allgemeinen nicht}) \\
\exists z\,([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in R_2) \wedge \exists z\,([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in R_3) \\
\quad \updownarrow \\
[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] \in R_1 \circ R_2 \wedge [\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] \in R_1 \circ R_3 \\
\quad \updownarrow \\
[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] \in R_1 \circ R_2 \cap R_1 \circ R_3
\end{array}$$

ad 2. Analog zu Behauptung 1.

ad 3. Es gilt:

$$[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] \in \overline{R_1 \circ R_2}$$
$$\updownarrow$$
$$\neg\left([\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] \in R_1 \circ R_2\right)$$
$$\updownarrow$$
$$\neg\exists z\left([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in R_2\right)$$
$$\updownarrow$$
$$\forall z \neg\left([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in R_2\right)$$
$$\updownarrow$$
$$\forall z\left(\neg[\mathfrak{x}, z] \in R_1 \vee \neg[z, \mathfrak{y}] \in R_2\right)$$
$$\updownarrow$$
$$\forall z\left([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \rightarrow \neg[z, \mathfrak{y}] \in R_2\right)$$
$$\downarrow \quad \text{(weil } \forall\mathfrak{x}\exists z[\mathfrak{x}, z] \in R_1\text{; } \uparrow \text{ gilt im allgemeinen nicht)}$$
$$\exists z\left([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge \neg[z, \mathfrak{y}] \in R_2\right)$$
$$\updownarrow$$
$$\exists z\left([\mathfrak{x}, z] \in R_1 \wedge [z, \mathfrak{y}] \in \overline{R_2}\right)$$
$$\updownarrow$$
$$[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] \in R_1 \circ \overline{R_2}$$

■

Wir definieren nun das *Standard-Produkt* für unscharfe Relationen, indem wir vom Produkt für scharfe Relationen ausgehen und das in der entsprechenden Definition verwendete zweiwertige *„und“* durch $min(x, y)$ sowie den zweiwertigen Quantor *„es gibt ein“* durch das Supremum (bezogen auf die Menge $\langle 0, 1\rangle$) übersetzen.

Gegeben seien wieder nicht-leere Universa $U_1, \ldots, U_m$, $V_1, \ldots, V_n$ und W, wobei $m \geqq 1$ und $n \geqq 1$.

Für beliebige unscharfe Relationen

$$S_1 : U_1 \times \cdots \times U_m \times W \rightarrow \langle 0, 1\rangle$$

und

$$S_2 : W \times V_1 \times \cdots \times V_n \rightarrow \langle 0, 1\rangle$$

und beliebige Elemente $x_1 \in U_1, \ldots, x_m \in U_m, z \in W, y_1 \in V_1, \ldots, y_n \in V_n$ definieren wir:

Definition 6.3.2 (Standard-Produkt)
$(S_1 \circ S_2)\,(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$
$=_{def}\ Sup\left\{min\left(S_1(x_1, \ldots, x_m, z), S_2(z, y_1, \ldots, y_n)\right) \mid z \in W\right\}$

Bemerkung
In manchen Büchern oder Arbeiten wird das Produkt $S_1 \circ S_2$ in der Form definiert, daß anstelle des Supremums das Maximum verwendet wird. Das führt dazu, daß die unscharfe Relation $S_1 \circ S_2$ evtl. nicht mehr total definiert ist, weil die Menge

$$\left\{min\left(S_1(x_1, \ldots, x_m, z), S_2(z, y_1, \ldots, y_n)\right) \mid z \in W\right\}$$

reeller Zahlen aus $\langle 0, 1\rangle$ zwar stets ein (genau ein!) Supremum hat, jedoch im allgemeinen kein Maximum besitzen wird.

Wir wollen nun durch einige Sätze das oben definierte Produkt „rechtfertigen".

Zunächst zeigen wir, daß es mit dem Produkt für scharfe Relationen kompatibel ist. Dazu definieren wir für

$$R_1 \subseteqq U_1 \times \cdots \times U_m \times W$$
$$R_2 \subseteqq W \times V_1 \times \cdots \times V_n$$

die charakteristischen Funktionen χ_{R_1} und χ_{R_2}, die offenbar unscharfe Relationen im Sinne von **Definition 6.3.2** sind:

$$\chi_{R_1}(x_1, \ldots, x_m, z) =_{def} \begin{cases} 1 & \text{, falls } [x_1, \ldots, x_m, z] \in R_1 \\ 0 & \text{, falls } [x_1, \ldots, x_m, z] \notin R_1 \end{cases}$$

Analog für χ_{R_2}.

Lemma 6.3.3 (Kompatibilitätslemma)

$$\chi_{R_1} \circ \chi_{R_2} = \chi_{(R_1 \circ R_2)}$$

Beweis
Rückgang auf die Definitionen (**Aufgabe 6.3.2**). ■

Analog zu **Theorem 6.3.1** gilt für das (*Standard-*) Produkt $S_1 \circ S_2$:

Theorem 6.3.4

1. $S_1 \circ (S_2 \circ S_3) = (S_1 \circ S_2) \circ S_3$
2. $S_1 \circ (S_2 \cup S_3) = (S_1 \circ S_2) \cup (S_1 \circ S_3)$
3. $(S_1 \cup S_2) \circ S_3 = (S_1 \circ S_3) \cup (S_2 \circ S_3)$
4. *Wenn* $S_1 \subseteqq S_2$, *so* $S_3 \circ S_1 \subseteqq S_3 \circ S_2$.
5. *Wenn* $S_1 \subseteqq S_2$, *so* $S_1 \circ S_3 \subseteqq S_2 \circ S_3$.

Beweis
Wir beweisen — wieder als Musterlösung — nur die Aussage 2 (auch, um einen Vergleich zum Beweis von Aussage 2 des **Theorems 6.3.1** zu haben); die übrigen Beweise werden als **Aufgabe 6.3.3** gestellt.

ad 2. Wir verwenden wieder die im Beweis von **Theorem 6.3.1** eingeführten Abkürzungen.

Es gilt

$$\begin{aligned}
&(S_1 \circ (S_2 \cup S_3))(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \\
&\quad = Sup\,\{min(S_1(\mathfrak{x}, z), (S_1 \cup S_3)(z, \mathfrak{y}))\,|\,z \in W\} \\
&\quad = Sup\,\{min(S_1(\mathfrak{x}, z), max(S_1(z, \mathfrak{y}), S_3(z, \mathfrak{y})))\,|\,z \in W\} \\
&\quad = Sup\,\{max(min(S_1(\mathfrak{x}, z), S_1(z, \mathfrak{y})), min(S_1(\mathfrak{x}, z), S_3(z, \mathfrak{y})))\,|\,z \in W\} \\
&\quad = max \begin{pmatrix} Sup\,\{min(S_1(\mathfrak{x}, z), S_1(z, \mathfrak{y}))\,|\,z \in W\}\,, \\ Sup\,\{min(S_1(\mathfrak{x}, z), S_3(z, \mathfrak{y}))\,|\,z \in W\} \end{pmatrix} \\
&\quad = max\,((S_1 \circ S_2)(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), (S_1 \circ S_3)(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})) \\
&\quad = (S_1 \circ S_2 \cup S_1 \circ S_3)(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})
\end{aligned}$$

■

Bei den obigen Schlüssen ist wesentlich, daß für beliebige $x, y, z \in \langle 0, 1 \rangle$ und für beliebige F und G mit

$$F, G : W \to \langle 0, 1 \rangle$$

gilt:

$$min(x, max(y, z)) = max(min(x, y), min(x, z))$$

und

$$Sup\,\{max(F(z), G(z))\,|\,z \in W\} = max(Sup\,\{F(z)\,|\,z \in W\}\,, Sup\,\{G(z)\,|\,z \in W\}).$$

Analog zu **Theorem 6.3.2** können wir beweisen:

Theorem 6.3.5

1. $S_1 \circ (S_2 \cap S_3) \subseteqq (S_1 \circ S_2) \cap (S_1 \circ S_3)$

2. $(S_1 \cap S_2) \circ S_3 \subseteqq (S_1 \circ S_3) \cap (S_2 \circ S_3)$

3. Wenn

$$Inf\,\{Sup\,\{S_1(\mathfrak{x}, z)\,|\,z \in W\}\,|\,\mathfrak{x} \in U_1 \times \cdots \times U_m\} = 1,$$

so $\overline{S_1 \circ S_2} \subseteqq S_1 \circ \overline{S_2}$.

Beweis
Übertragung der zum Beweis von **Theorem 6.3.2** vollzogenen Schlüsse. **Aufgabe 6.3.4**.
■

Wir gehen jetzt dazu über, ein *Nicht-Standard-Produkt* für Fuzzy-Relationen zu definieren.
Gegeben seien wieder für natürliche Zahlen $m \geqq 1$ und $n \geqq 1$ die nicht-leeren Universa $U_1, \ldots, U_m, V_1, \ldots, V_n, W$. Ferner seien gegeben unscharfe Relationen

$$S_1 : U_1 \times \cdots \times U_m \times W \to \langle 0, 1 \rangle$$

und

$$S_2 : W \times V_1 \times \cdots \times V_n \to \langle 0, 1 \rangle$$

In **Definition 6.3.2** hatten wir das in **Definition 6.3.1** verwendete *„und“* durch den Minimum-Operator min (in $\langle 0, 1 \rangle$) ersetzt sowie anstelle von *„es gibt ein“* den Operator Sup (in $\langle 0, 1 \rangle$) benutzt.

Erste Stufe der Definition eines Nicht-Standard-Produkts: Wir ersetzen den Minimum-Operator durch eine beliebige T-Norm τ. **Wichtig:** Der Operator *Sup* wird noch beibehalten.
Demgemäß definieren wir:

Definition 6.3.3 (Nicht-Standard-τ-Produkt von Fuzzy-Relationen)
$(S_1 \circledcirc S_2)\,(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$
$=_{def}\; Sup\,\{\tau\,(S_1(x_1, \ldots, x_m, z), S_2(z, y_1, \ldots, y_n))\,|\,z \in W\}$.

Man kann zunächst nicht erwarten, daß für $S_1 \circledcirc S_2$ Sätze gelten, die zu den **Theoremen 6.3.4** und **6.3.5** analog sind. Insbesondere wird man in den Formulierungen der Behauptungen 2 und 3 von **Theorem 6.3.4** anstelle von max (welches die Grundlage für die Vereinigung $\cup$ von Relationen ist), eine geeignete S-Norm wählen müssen.

Aufgabe 6.3.5 *Man gebe Bedingungen für τ und σ an, so daß gilt*

1. $S_1 \circledT (S_2 \circledT S_3) = (S_1 \circledT S_2) \circledT S_3$
2. $S_1 \circledT (S_2 \Cup S_3) = (S_1 \circledT S_2) \Cup (S_1 \circledT S_3)$
3. $(S_1 \Cup S_2) \circledT S_3 = (S_1 \circledT S_3) \Cup (S_2 \circledT S_3)$
4. *Wenn* $S_1 \subseteqq S_2$, *so* $S_3 \circledT S_1 \subseteqq S_3 \circledT S_2$.
5. *Wenn* $S_1 \subseteqq S_2$, *so* $S_1 \circledT S_3 \subseteqq S_2 \circledT S_3$.
6. $S_1 \circledT (S_2 \Cap S_3) \subseteqq (S_1 \circledT S_2) \Cap (S_1 \circledT S_3)$
7. $(S_1 \Cap S_2) \circledT S_3 \subseteqq (S_1 \circledT S_3) \Cap (S_2 \circledT S_3)$
8. *Wenn*
$$Inf\,\{Sup\,\{S_1(\mathfrak{x}, z)\,|\,z \in W\}\,|\,\mathfrak{x} \in U_1 \times \cdots \times U_m\} = 1,$$
so $\overline{S_1 \circledT S_2} \subseteqq S_1 \circledT \overline{S_2}$.

Zu Punkt 8 ist zu bemerken, daß anstelle der für die Definition des Komplements $\overline{S}$ einer Fuzzy-Relation S verwendeten Łukasiewiczschen Negation $1 - x$ auch eine beliebige andere Negation $\nu(x)$ verwendet werden kann. Demgemäß kann man fragen, ob allgemeiner gilt

8′. Wenn
$$Inf\,\{Sup\,\{S_1(\mathfrak{x}, z)\,|\,z \in W\}\,|\,\mathfrak{x} \in U_1 \times \cdots \times U_m\} = 1,$$
so $\overline{S_1 \circledT S_2}^{\,\nu} \subseteqq S_1 \circledT \overline{S_2}^{\,\nu}$.

Zweite Stufe der Definition eines Nicht-Standard-Produkts: Die Grundidee besteht darin, daß auch der „Supremum“-Operator, der als *„Standard-Existenz-Quantor“* aufgefaßt wird, in einem bestimmten Nicht-Standard-Sinne abgeändert wird.

Wie die Abänderung zu vollziehen ist, erläutern wir durch die folgende Analogiebetrachtung.

1. Der zweiwertige Existenzquantor „es gibt ein“ ist eine „iterierte Alternative“.
2. Der reellwertige Existenzquantor „*Sup*“ läßt sich als „iteriertes Maximum“ deuten.
3. Ist nun als Nicht-Standard-Verallgemeinerung von $max(x, y)$ eine beliebige S-Norm $\sigma(x, y)$ gegeben, so kann man durch Iteration von $\sigma(x, y)$ einen reellwertigen Existenzoperator EX_σ wie folgt erzeugen.

   Durch Induktion über die natürliche Zahl $n \geqq 1$ definieren wir für $x_1, \ldots, x_n \in \langle 0, 1\rangle$ zunächst $\sigma_n(x_1, \ldots, x_n)$ wie folgt

   Definition 6.3.4
   a) $\sigma_1(x_1) =_{def} x_1$
   b) $\sigma_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) =_{def} \sigma(\sigma_n(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1})$

   Mit Hilfe der Funktionen σ_n, die man als n-stellige S-Normen bezeichnen könnte, definieren wir einen Operator EX_σ wie folgt, wobei $M \subseteqq \langle 0, 1\rangle$.

   Definition 6.3.5
   $EX_\sigma(M) =_{def} Sup\,\{\sigma_n(x_1, \ldots, x_n)\,|\,n \geqq 1 \;\; und \;\; x_1, \ldots, x_n \in M\}$

Auf der Grundlage dieser Definition führen wir ein *„natürliches“* (oder *kanonisches“*) Nicht-Standard-τ-Produkt von Relationen wie folgt ein.

Gegeben sei eine beliebige T-Norm τ. Wir wählen als S-Norm σ die zu τ duale Funktion, d. h. wir definieren für $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$:

$$\sigma(x, y) =_{def} 1 - \tau(1 - x, 1 - y).$$

Mit Hilfe von σ konstruieren wir gemäß **Definition 6.3.5** den Operator EX_σ. Als natürliches Nicht-Standard-Produkt $S_1 \circledcirc S_2$ definieren wir dann:

Definition 6.3.6
$(S_1 \circledcirc S_2)(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$
$=_{def} EX_\sigma \{\tau(S_1(x_1, \ldots, x_m, z), S_2(z, y_1, \ldots, y_n)) \mid z \in W\}.$

Aufgabe 6.3.6 *Man verallgemeinere die Axiome für S-Normen auf beliebige n-stellige Funktionen und zeige, daß die Funktionen σ_n diese Axiome erfüllen, falls die Ausgangsfunktion σ eine S-Norm ist.*

Aufgabe 6.3.7 *Man stelle, in Analogie zu den* **Theoremen 6.3.4** *und* **6.3.5** *Rechenregeln für das natürliche Nicht-Standard-Produkt $S_1 \circledcirc S_2$ auf und beweise diese.*

Anmerkung
Zu weiterführenden Untersuchungen über Nicht-Standard-Fuzzy-Quantoren wird auf das entsprechende Kapitel später verwiesen.

6.4 Fuzzy-Relationen als Abbildungen

Zur Vereinfachung der folgenden Betrachtungen beschränken wir uns zunächst auf binäre Relationen. Analog zu den Abschnitten 6.2 und 6.3 diskutieren wir drei Versionen des Abbildungsbegriffs.

Wir beginnen mit der Diskussion der durch scharfe Relationen vermittelten Abbildungen.

Gegeben seien die Universa U und V sowie eine scharfe (binäre) Relation R über U und V, d. h.

$$R \subseteqq U \times V.$$

Ist nun $[x, y] \in R$, so sagt man, daß

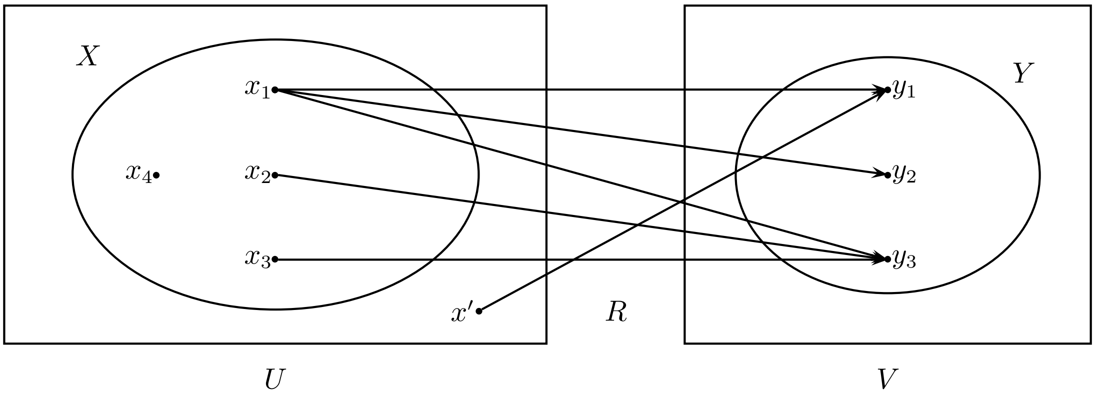
- y ein R-Bild von x und
- x ein R-Urbild von y sei.

Unmittelbar ist klar, daß ein gegebenes x kein R-Bild oder genau eines oder mehr als ein R-Bild haben kann.

Gegeben sei nun eine Teilmenge $X \subseteqq U$. Den üblichen Ansätzen in der scharfen Mengenlehre folgend, definieren wir das R-Bild $R(X)$ der Menge X wie folgt:

Definition 6.4.1
$R(X) =_{def} \{y \mid \exists x(x \in X \wedge [x, y] \in R)\}$

Veranschaulichung Wir nehmen an $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$, $y_1, y_2, y_3 \in Y$ und $[x_1, y_1] \in R$, $[x_1, y_2] \in R$, $[x_1, y_3] \in R$, $[x_2, y_3] \in R$, $[x_3, y_3] \in R$, $\neg\exists y(y \in V \wedge [x_4, y] \in R)$, ferner sei $x' \in U$, $x' \notin X$ und $[x', y_1] \in R$.



Zu dieser Veranschaulichung stellen wir fest:

1. Das Element x_1 hat mehrere R-Bilder, nämlich y_1, y_2 und y_3.
2. Das Element y_3 hat mehrere Urbilder (in der Menge X), nämlich x_1, x_2 und x_3. Außerdem hat y_1 das R-Urbild x', welches allerdings nicht in X liegt.
3. Das Element x_4 hat kein R-Bild.

Feststellung Durch Definition 6.4.1 wird offenbar jeder gegebenen Teilmenge $X \subseteqq U$ eindeutig eine Teilmenge $R(X) \subseteqq V$ zugeordnet, d. h. durch die (binäre) Relation wird ein Operator Ψ_R festgelegt, der die Potenzmenge $\mathfrak{P}(U)$ eindeutig in die Potenzmenge $\mathfrak{P}(V)$ abbildet, d. h. es gilt

$$\Psi_R : \mathfrak{P}(U) \to \mathfrak{P}(V).$$

Die scharfe Relation $R \subseteqq U \times V$ kann man auch dazu verwenden, eine „Rückkehrabbildung" wie folgt zu definieren. Es sei dazu eine Menge $Y \subseteqq V$ gegeben. Durch die folgende Definition legen wir die Menge $R'(Y)$ aller R-Urbilder der Menge Y fest.

Definition 6.4.2
$R'(Y) =_{def} \{x \mid \exists y(y \in Y \wedge [x, y] \in R)\}$

Die Menge $R'(Y)$ kann man sehr einfach durch die Inverse R^{-1} einer Relation R charakterisieren.

Definition 6.4.3
$R^{-1} =_{def} \{[y, x] \mid [x, y] \in R\}$

Folgerung 6.4.1

1. *Wenn $R \subseteqq U \times V$, so $R^{-1} \subseteqq V \times U$.*
2. $(R^{-1})^{-1} = R$
3. *Wenn $Y \subseteqq V$, so $R'(Y) = R^{-1}(Y)$.*
4. *$R'(R(X)) \supseteqq X$ für alle $X \subseteqq U$.*

Beweis trivial.

Aufgabe 6.4.1 *Man berechne* $(R_1 \cap R_2)^{-1}$, $(R_1 \cup R_2)^{-1}$ *und* $((U \times V) \setminus R)^{-1}$ *für* $R, R_1, R_2 \subseteqq U \times V$.

Gegeben seien nun die Universa U, V und W sowie die scharfen Relationen $R_1 \subseteqq U \times V$ und $R_2 \subseteqq V \times W$.

Dann gilt das folgende

Theorem 6.4.2

1. $(R_1 \circ R_2)^{-1} = \left(R_2^{-1}\right) \circ \left(R_1^{-1}\right)$
2. *Wenn* $X \subseteqq U$, *dann* $(R_1 \circ R_2)(X) = R_2(R_1(X))$.
3. *Wenn* $Z \subseteqq W$, *dann* $(R_1 \circ R_2)^{-1}(Z) = R_1^{-1}\left(R_2^{-1}(Z)\right)$

Aufgabe 6.4.2 *Man beweise Theorem 6.4.2.*

Bemerkung

Die Aussagen 2 und 3 von Theorem 6.4.2 sind eine „abbildungstheoretische“ Rechtfertigung für die Definition des Relationenprodukts $R_1 \circ R_2$.

Wir wollen nun die obigen Betrachtungen von binären Relationen auf beliebige $(n+1)$-stellige Relationen $(n \geqq 1)$ verallgemeinern.

Dazu seien die Universa $U_1, \ldots, U_n$ und V gegeben. Wir bilden $U_1 \times \cdots \times U_n \times V$ und betrachten eine scharfe Relation R über $U_1, \ldots, U_n, V$, d. h. es sei

$$R \subseteqq U_1 \times \cdots \times U_n \times V.$$

Wir betrachten nun $U_1, \ldots, U_n$ als Argumentbereiche und V als Wertebereich der durch R vermittelten Abbildung, d. h. für $X_1 \subseteqq U_1, \ldots, X_n \subseteqq U_n$ definieren wir das R-Bild $R(X_1, \ldots, X_n)$ von $X_1, \ldots, X_n$ wie folgt.

Definition 6.4.4

$R(X_1, \ldots, X_n) =_{def} \{y \,|\, \exists x_1 \ldots \exists x_n (x_1 \in X_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in X_n \wedge [x_1, \ldots, x_n, y] \in R)\}$

Wir gehen nun dazu über, die obigen Betrachtungen zu fuzzifizieren. Dazu seien eine Fuzzy-Relation S über U, V, also

$$S : U \times V \to \langle 0, 1 \rangle\,,$$

sowie eine Fuzzy-Menge F über U, also

$$F : U \to \langle 0, 1 \rangle$$

gegeben. In Analogie zu Definition 6.4.1 wollen wir das S-Bild $S(F)$ der Fuzzy-Menge F definieren. Demgemäß definieren wir:

Definition 6.4.5

$S(F)(y) =_{def} Sup\,\{min(F(x), S(x,y)) \,|\, x \in U\}$

Offenbar ist $S(F)$ eine Fuzzy-Menge über V. Ferner ist klar, daß Definition 6.4.5 aus Definition 6.4.1 hervorgeht, indem die scharfe Relation R bzw. die scharfe Menge X durch die Fuzzy-Relation S bzw. die Fuzzy-Menge F ersetzt wird; ferner wird das zweiwertige Und $\wedge$ bzw. der auf x bezogene Existenz-Operator $\exists x$ durch die Minimum-Funktion *min* bzw. durch die den auf x bezogenen Supremum-Operator ersetzt.

Das für Fuzzy-Verallgemeinerungen von zweiwertigen Begriffsbildungen geforderte Kompatibilitätsprinzip ist hier in der folgenden Form gültig.

Folgerung 6.4.3
Sind F und S zweiwertig, d. h.

$$F : U \to \{0,1\} \qquad , \qquad S : U \times V \to \{0,1\}\,,$$

so $KER(S(F)) = (KER(S))(KER(F))$.

Beweis
Es gilt

$$y \in KER(S(F)) \tag{6.3}$$

genau dann, wenn

$$S(F)(y) = 1 \tag{6.4}$$

genau dann, wenn

$$Sup\,\{min(F(x), S(x,y))\,|\,x \in U\} \tag{6.5}$$

genau dann, wenn

$$\exists x(x \in U \wedge min(F(x), S(x,y)) = 1) \tag{6.6}$$

genau dann, wenn

$$\exists x(x \in U \wedge F(x) = 1 \wedge S(x,y) = 1) \tag{6.7}$$

genau dann, wenn

$$\exists x(x \in U \wedge x \in KER(F) \wedge [x,y] \in KER(S)) \tag{6.8}$$

genau dann, wenn

$$y \in (KER(S))(KER(F)) \tag{6.9}$$

■

Bemerkung
Offenbar impliziert (6.5) die Bedingung (6.6) im allgemeinen nicht, wenn U unendlich ist und F, S nicht zweiwertig sind.

Aufgabe 6.4.3 *Wie kann man Folgerung 6.4.3 modifizieren, wenn man die Voraussetzung, daß F und S zweiwertig sind, streicht?*

Durch Definition 6.4.5 wird offenbar jeder gegebenen Fuzzy-Menge F über U eindeutig eine Fuzzy-Menge $S(F)$ über V zugeordnet, d. h. durch die Fuzzy-Relation S wird ein Operator Φ_S definiert, der die Fuzzy-Potenzmenge $\mathfrak{F}(U)$ von U in die Fuzzy-Potenzmenge $\mathfrak{F}(V)$ von V abbildet, d. h. es gilt

$$\Phi_S : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}(V).$$

Da die Fuzzy-Mengen über U bzw. V reelle Funktionen sind, ist Φ_S ein reeller Funktionaloperator, und es liegt nahe, zum Studium solcher Operatoren die Konzepte der Funktionalanalysis heranzuziehen. Zu diesem Gesichtspunkt sei auf die folgenden Abschnitte 7 und 8 verwiesen.

Wir werden jetzt die Wirkung des Operators Φ_S auf einige spezielle Fuzzy-Mengen studieren.

Beispiel 6.4.1 Es gilt $\Phi_S(\emptyset_U) = \emptyset_V$.

Wir hatten $\emptyset_U$ als die leere Fuzzy-Menge über U definiert, d. h. $\emptyset_U(x) = 0$ für alle $x \in U$. Nun gilt

$$\begin{aligned}
\Phi_S(\emptyset_U)(y) &= S(\emptyset_U)(y) \\
&= \mathit{Sup}\left\{\mathit{min}(\emptyset_U(x), S(x,y))\,\middle|\, x \in U\right\} \\
&= \mathit{Sup}\,\{\mathit{min}(0, S(x,y))\,|\, x \in U\} \\
&= \mathit{Sup}\{0\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Beispiel 6.4.2 Es gilt für jedes $y \in V$: $\Phi_S(\not{U})(y) = \mathit{Sup}\,\{S(x,y)\,|\, x \in U\}$.

Beweis
Es gilt

$$\begin{aligned}
\Phi_S(\not{U})(y) &= S(\not{U})(y) \\
&= \mathit{Sup}\,\{\mathit{min}(\not{U}(x), S(x,y))\,|\, x \in U\} \\
&= \mathit{Sup}\,\{\mathit{min}(1, S(x,y))\,|\, x \in U\} \\
&= \mathit{Sup}\,\{S(x,y)\,|\, x \in U\}
\end{aligned}$$

■

Der Ausdruck

$$\mathit{Sup}\,\{S(x,y)\,|\, x \in U\}$$

spielt in der Theorie der (binären) Fuzzy-Relationen eine besondere Rolle.

Gilt für eine (binäre) scharfe Relation $R \subseteq U \times V$ für $y \in V$ die Beziehung

$$\exists x (x \in U \wedge [x,y] \in R),$$

so sagt man, daß y ein R-Urbild hat bzw. daß R an der Stelle y total sei. Demgemäß kann man

$$\mathit{Sup}\,\{S(x,y)\,|\, x \in U\}$$

als „Grad“ dafür ansehen, daß y ein S-Urbild hat bzw. daß S an der Stelle y total sei.

Beispiel 6.4.3 Gegeben sei ein fixiertes Element $x_0 \in U$. Wir betrachten die Fuzzy-Menge F_{x_0}, die für beliebiges $x \in U$ definiert ist durch

$$F_{x_0}(x) =_{def} \begin{cases} 1 & \text{, falls } x = x_0 \\ 0 & \text{, falls } x \neq x_0 \end{cases}.$$

Dann gilt für jedes $y \in V$

$$\Phi_S(F_{x_0})(y) = S(x_0, y).$$

Beweis
Es gilt

$$\begin{aligned}
\Phi_S(F_{x_0})(y) &= S(F_{x_0})(y) \\
&= Sup\,\{min(F_{x_0}(x), S(x,y))\,|\,x \in U\} \\
&= Sup\,(\{min(F_{x_0}(x_0), S(x_0,y))\} \cup \{min(F_{x_0}(x), S(x,y))\,|\,x \in U \wedge x \neq x_0\}) \\
&= Sup\,(\{min(1, S(x_0,y))\} \cup \{min(0, S(x,y))\,|\,x \in U \wedge x \neq x_0\}) \\
&= Sup\,(\{S(x_0,y)\} \cup \{0\}) \\
&= S(x_0,y).
\end{aligned}$$

■

Auch der Ausdruck

$$S(x_0, y)$$

spielt in der Theorie der (binären) Fuzzy-Relationen eine besondere Rolle. Man kann $S(x_0, y)$ als den „Grad“ interpretieren, so daß y S-Bild des Elements x_0 ist.

Wir fuzzifizieren nun die Definitionen 6.4.2 und 6.4.3. Gegeben sei dazu eine Fuzzy-Menge G über V, ferner gelte $x \in U$.

Definition 6.4.6
$S'(G)(x) =_{def} Sup\,\{min(G(y), S(x,y))\,|\,y \in V\}$

Definition 6.4.7
$S^{-1}(x,y) =_{def} S(y,x)$, *wobei* $x \in V$ *und* $y \in U$.

Folgerung 6.4.4

1. *Wenn* $S : U \times V \to \langle 0,1 \rangle$, *so* $S^{-1} : V \times U \to \langle 0,1 \rangle$.
2. $(S^{-1})^{-1} = S$
3. *Wenn* $G : V \to \langle 0,1 \rangle$, *dann* $S'(G) = S^{-1}(G)$.
4. *Wenn* $F : U \to \langle 0,1 \rangle$, *dann* $S'(S(F)) \supseteq F$.

Aufgabe 6.4.4 *Man beweise Folgerung 6.4.4.*

Aufgabe 6.4.5 *Man berechne* $(S_1 \cap S_2)^{-1}$, $(S_1 \cup S_2)^{-1}$ *und* $((\mathbb{U} \times \mathbb{V}) \setminus S)^{-1}$ *für* $S, S_1, S_2 : U \times V \to \langle 0,1 \rangle$.

Gegeben seien nun die Universa U, V und W sowie die Fuzzy-Relationen

$$S_1 : U \times V \to \langle 0,1 \rangle$$

und

$$S_2 : V \times W \to \langle 0,1 \rangle \, .$$

In Analogie zu Theorem 6.4.2 gilt dann

Theorem 6.4.5

1. $(S_1 \circ S_2)^{-1} = \left(S_2^{-1}\right) \circ \left(S_1^{-1}\right)$

2. Wenn $F : U \to \langle 0,1 \rangle$, *dann* $(S_1 \circ S_2)(F) = S_2(S_1(F))$.

3. Wenn $G : W \to \langle 0,1 \rangle$, *dann* $(S_1 \circ S_2)^{-1}(G) = S_1^{-1}\left(S_2^{-1}(G)\right)$

Aufgabe 6.4.6 *Man beweise Theorem 6.4.5.*

Anleitung: *Rückgang auf die Definitionen.*

Wir wollen nun die in Definition 6.4.5 definierte „Standardform“

$$S(F)(y) =_{def} Sup \, \{min(F(x), S(x,y)) \, | \, x \in U\}$$

der Erzeugung eines Funktionaloperators $\Phi_S : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}(V)$, wobei

$$\Phi_S(F) =_{def} S(F),$$

in geeigneter Weise verallgemeinern.

Dazu wird die Funktion *min* durch eine beliebige zweistellige Funktion κ, wobei

$$\kappa : \langle 0,1 \rangle^2 \to \langle 0,1 \rangle \, ,$$

und der Operator *Sup* durch eine Abbildung Q, wobei

$$Q : \mathfrak{P} \langle 0,1 \rangle \to \langle 0,1 \rangle$$

gilt, ersetzt.

Man nennt κ in diesem Zusammenhang auch „Kombinationsfunktion“, weil sie die Werte $F(x)$ und $S(x,y)$ kombiniert. Q heißt (allgemeiner) Quantor über $\langle 0,1 \rangle$, weil Q den Operator *Sup* ersetzt und *Sup* als Existenzquantor angesehen werden kann, da er die Verallgemeinerung des zweiwertigen Existenzquantors $\exists$ auf den Bereich $\langle 0,1 \rangle$ ist.

Wir setzen zur Abkürzung $\mathfrak{J} = [S, \kappa, Q]$ und definieren einen Funktionaloperator

$$\Phi_{\mathfrak{J}} : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}(V)$$

folgendermaßen für $F \in \mathfrak{F}(U)$ und $y \in V$.

Definition 6.4.8

$\Phi_{\mathfrak{J}}(F)(y) =_{def} Q \, \{\kappa(F(x), S(x,y)) \, | \, x \in U\}$

Aufgabe 6.4.7 *Unter welchen Voraussetzungen für* κ *und* Q *gilt*

1. $\Phi_{\mathfrak{J}}(\emptyset_U) = \emptyset_V$

2. $\Phi_{\mathfrak{J}}(\not{U})(y) = Q \, \{S(x,y) \, | \, x \in U\}$ *für beliebiges* $y \in U$

3. $\Phi_{\mathfrak{J}}(F_{x_0})(y) = S(x_0, y)$ *für beliebiges* $y \in U$*?*

Anleitung: *Man betrachte die in den Beispielen 6.4.1 bis 6.4.3 verwendeten Lösungswege und leite daraus Lösungen für die oben gestellten Aufgaben ab.*

7. Der verallgemeinerte Modus Ponens und die Compositional Rule of Inference

7.1 Der verallgemeinerte Modus Ponens (VMP)

Beim Studium logischer Systeme $\mathfrak{S}$ findet man häufig die folgende Situation vor: Gegeben ist eine Menge $AUSD$ von Ausdrücken. Die Menge $AUSD$ ist abgeschlossen bezüglich der Konstruktion von Ausdrücken mit Hilfe des „Implikationssymbols" $\rightarrow$, d. h. es gilt für beliebige Ausdrücke $A, B \in AUSD$:

$$\text{Wenn } A \in AUSD \text{ und } A \rightarrow B \in AUSD, \text{ so } B \in AUSD.$$

Ist $\mathfrak{S}$ „regelbasiert" aufgebaut, so liegt eine binäre Relation $X \vdash A$ vor, wobei $X \subseteqq AUSD$ und $A \in AUSD$. Man sagt dann, daß der Ausdruck A aus der Menge X von Ausdrücken ableitbar sei, wobei X auch häufig Axiomensystem genannt wird. Die Relation $X \vdash A$ wird induktiv über eine Ableitbarkeitsstufe definiert, wobei die einzelnen Ableitungsschritte durch die Anwendung von („elementaren") Schlußregeln, die beim Aufbau des regelbasierten logischen Systems $\mathfrak{S}$ festgelegt worden sind, realisiert werden.

Viele regelbasiert aufgebaute logische Systeme stützen sich u. a. auf den Modus Ponens als Schlußregel: Wenn aus X ableitbar sind $A \rightarrow B$ und A, so soll aus X auch ableitbar sein B. Diese Schlußregel wird auch häufig kurz durch das folgende Schema beschrieben:

$$\begin{array}{l} X \vdash A \rightarrow B \\ X \vdash A \\ \hline X \vdash B \end{array}$$

Soll nun das logische System $\mathfrak{S}$ verwendet werden, um z. B. Wissen über ein bestimmtes Sachgebiet zu modellieren, muß eine semantische Interpretation des Systems $\mathfrak{S}$ definiert werden, die das betreffende Sachgebiet erfaßt. Dabei ist wesentlich, daß die verwendeten Schlußregeln semantisch korrekt sind, von (semantisch) gültigen Ausdrücken wieder zu solchen führen.

Unter den vielen möglichen Interpretationen sind die „scharfen" ausgezeichnet, bei denen die zweiwertige Logik zugrunde liegt (mit der Menge $\{0,1\}$ als Wahrheitswerte) und der übliche („scharfe") Funktionsbegriff sowie allein zweiwertige Prädikate (die ihre logischen Werte in $\{0,1\}$ annehmen) verwendet werden.

Ist eine derartige Interpretation vorgegeben und liegt eine Belegung der Variablen vor, so ist jedem Ausdruck A ein logischer Wert $VAL(A) \in \{0,1\}$ zugeordnet.

Die semantische Korrektheit des oben betrachteten Modus Ponens wird dann durch das folgende Lemma ausgedrückt:

Lemma 7.1.1
Wenn $VAL(A \to B) = 1$ *und* $VAL(A) = 1$, *dann* $VAL(B) = 1$.

Dieses Lemma kann auch durch das folgende Schema beschrieben werden:

$$\frac{\begin{array}{l} VAL(A \to B) = 1 \\ VAL(A) = 1 \end{array}}{VAL(B) = 1}.$$

Die Gültigkeit von Lemma 7.1.1 kann man wie folgt einsehen: Bei der vorausgesetzten zweiwertigen Interpretation wird das Symbol extensional interpretiert, d. h. die Funktion VAL erfüllt die Gleichung

$$VAL(A \to B) = \beta(VAL(A), VAL(B)),$$

d. h. der Wert $VAL(A \to B)$ hängt allein von den Werten $VAL(A)$ und $VAL(B)$ ab, jedoch nicht von A und B selbst. β ist eine geeignet gewählte zweistellige BOOLEsche Funktion, d. h. $\beta : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$, nämlich *seq*, die durch die folgende Tabelle festgelegt ist:

x	y	$seq(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Nun gilt aber trivial: Wenn $seq(x,y) = 1$ und $x = 1$, so $y = 1$. Somit ist Lemma 7.1.1 bewiesen.

Wir gehen nun zur Diskussion des verallgemeinerten Modus Ponens (generalized modus ponens) über, der unter dieser Bezeichnung von L. A. ZADEH im Jahre 1972 in der Arbeit [56] eingeführt worden ist.

Der verallgemeinerte Modus Ponens dient der Verarbeitung „unscharfen“ Wissens, das durch Regeln der Form

$$IF\ x\ is\ F\ \ THEN\ y\ is\ G$$

gegeben ist.

Wir erläutern derartige IF-THEN-Regeln durch die folgenden Beispiele.

Beispiel 7.1.1 *IF* Geschwindigkeit ist hoch
THEN Bremsweg ist lang

Beispiel 7.1.2 *IF* Temperatur in einem Heizkessel ist niedrig
THEN öffne das Ventil für Heizgaszuführung sehr stark

Im Beispiel 7.1.1 wird ein kausaler Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit etwa eines Autos und dem Bremsweg dieses Autos, etwa bei Auftauchen eines Hindernisses, beschrieben.

Als erstes muß man auf den grundsätzlichen Unterschied zu Ausdrücken der Form

$$A \to B$$

hinweisen, wie wir sie bei der Diskussion des üblichen Modus Ponens oben betrachtet haben. Ausdrücke der Form $A \to B$ beschreiben im allgemeinen keinen kausalen Zusammenhang, was z. B. auch durch die logische Äquivalenz von $A \to B$ mit $\neg A \vee B$ deutlich wird.

Zweitens wird in Beispiel 7.1.1 ein kausaler Zusammenhang zwischen **unscharfen** Aussagen beschrieben: Eine hohe Geschwindigkeit eines Autos impliziert einen langen Bremsweg. Zur weiteren Präzisierung dieser Situation wurden von Zadeh die Begriffe „linguistische Variable“ und „linguistischer Term“ eingeführt (siehe [**?**]).

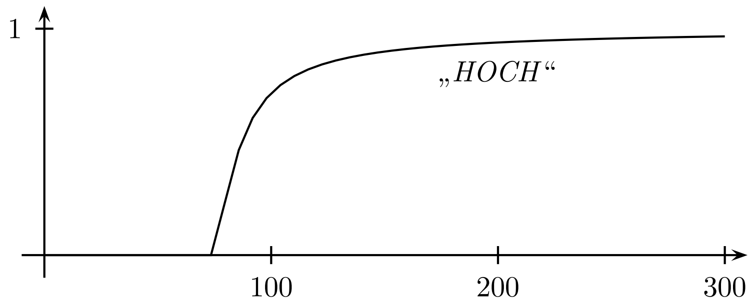
Als linguistische Variablen treten in dem betrachteten Beispiel

x: Geschwindigkeit und

y: Bremsweg auf.

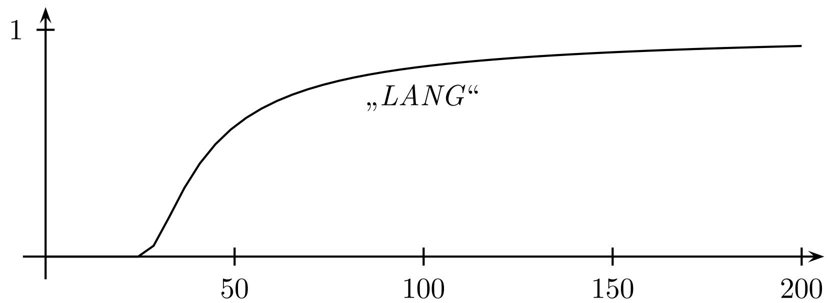
Auf Grund klassischer „scharfer“ Vorstellungen könnte man daran denken, als Variabilitätsbereich für x etwa die Menge $U_x = [0, 300]$ aller reellen Zahlen festzulegen, wobei $r \in [0, 300]$ bedeuten soll, daß das betrachtete Auto sich mit der Geschwindigkeit r km/h bewegt.

Wie in ähnlichen Fällen läßt sich die Semantik von „hoch“ nicht durch eine reelle Zahl $r_0 \in [0, 300]$, etwa $r_0 = 200$, erfassen; vielmehr muß „hoch“ durch eine geeignete Fuzzy-Menge über $[0, 300]$ modelliert werden, etwa wie in der folgenden Skizze dargestellt:



Somit nimmt die Variable x als Werte Fuzzy-Mengen über dem Universum $[0, 300]$ an. Die Bezeichnungen dieser Fuzzy-Mengen, die also Konstanten im Sinne der Prädikatenlogik sind, heißen bei Zadeh „linguistische Terme“, offenbar deshalb, weil in den Anwendungen als Konstanten häufig Wörter der Umgangssprache verwendet werden.

Für die linguistische Variable y (Bremsweg) wählen wir das Universum $U_y = \{0, 1, 2, \ldots, 200\}$, wobei $n \in U_y$ bedeuten soll, daß der Bremsweg n Meter beträgt. Eventuell ist die Einheit Meter zu „grob“, d. h. man könnte daran denken, als Einheit Dezimeter oder gar Centimeter zu wählen, um eine „feinere“ numerische Beschreibung des Bremsweges zu erhalten, was im Hinblick auf einen möglichen Auffahrunfall von Bedeutung sein kann. Somit kann der zu y gehörende linguistische Term „lang“ zum Beispiel durch die Fuzzy-Menge



interpretiert werden.

In der Arbeit [56] schlug Zadeh vor, das folgende Schlußschema, das er „generalized modus ponens“ nannte, zur Gewinnung neuer unscharfer Informationen zu präzisieren und dann zu benutzen:

$$\begin{array}{rr} \text{Antecedent 1:} & \text{Wenn } x \text{ ist } F\text{, so } y \text{ ist } G \\ \text{Antecedent 2:} & x \text{ ist } F' \\ \hline \text{Conclusion:} & y \text{ ist } G' \end{array}$$

Dabei sind F und F' Fuzzy-Mengen über U, G und G' sind Fuzzy-Mengen über V. Das obige Schema ist so zu verstehen, daß aus der „unscharfen Implikation“

„Wenn x ist F, so y ist G“

und der unscharfen Aussage

„x ist F'“

die unscharfe Aussage

„y ist G'“

abgeleitet wird.

Wir erläutern dies an dem folgenden Beispiel:

Antecedent 1:	Wenn die Geschwindigkeit hoch ist, so ist der Bremsweg lang.
Antecedent 2:	Die Geschwindigkeit ist niedrig.
Conclusion:	Der Bremsweg ist kurz.

Diese Ableitung führt offenbar zu einem richtigen Resultat, d. h. zu einem Resultat, das mit den Beobachtungen beim Autofahren übereinstimmt.

Wir stellen nun die Frage, wie diese Prozedur allgemein präzisiert werden kann. Dabei ist natürlich zu beachten, daß die obige Ableitung realisiert wird, dagegen die folgende **nicht**, weil sie offenbar nicht mit den Beobachtungen übereinstimmt, somit falsch wäre.

Antecedent 1:	Wenn die Geschwindigkeit hoch ist, so ist der Bremsweg lang.
Antecedent 2:	Die Geschwindigkeit ist mittel.
Conclusion:	Der Bremsweg ist sehr lang.

Um zu einer allgemeinen Interpretation des Generalized Modus Ponens zu kommen, betrachten wir zunächst das Antecedent 1, und zwar in der allgemeinen Form

Wenn x ist F, so y ist G.

Eine Interpretation nach dem Vorbild des zweiwertigen Modus Ponens versagt hier völlig, selbst wenn wir auf das Gebiet der mehrwertigen Logik ausweichen. Vielmehr gelangen wir zu einem passenden Ansatz, wenn wir den Konnektor „Wenn . . . , so“ kausal oder — was noch treffender ist — funktional interpretieren. (Man vergleiche dazu die Ausführungen in Kapitel 4.) Dazu stellen wir uns vor, daß eine „Blackbox“ der Form

$$\longrightarrow \boxed{\text{Wenn } x \text{ ist } F\text{, so } y \text{ ist } G} \longrightarrow$$

gegeben ist, in der also eine Fuzzy-IF-THEN-Regel der Form „Wenn x ist F, so y ist G“ abgespeichert ist und die auf Grund dieser Regel eine gewisse Abbildung $\Phi : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}(V)$ definiert. Der „Generalized Modus Ponens“ wird dann in der Weise interpretiert, daß die in Conclusion „y ist G'“ vorkommende Fuzzy-Menge G' aus der im Antecedent 2 „x ist F'“ vorkommenden Fuzzy-Menge F' mit Hilfe des Funktionaloperators Φ in der Form

$$G' =_{def} \Phi(F')$$

abgeleitet („inferiert“) wird.

7.2 Verschiedene semantische Interpretation des verallgemeinerten Modus Ponens

Als erstes nehmen wir — der Übersichtlichkeit wegen — die folgende Vereinfachung in der Notation vor: Wir ersetzen die deutschen Termini „Wenn“ bzw. „so“ durch „*IF*“ bzw. „*THEN*“, um hervorzuheben, daß sie keine umgangssprachlichen Gebilde, sondern „Konnektoren“ zur Formulierung von Regeln einer bestimmten Form sind. Auf die Angabe der (linguistischen) Variablen x und y verzichten wir, weil sie — wegen der hier betrachteten sehr einfachen Form von Regeln — in den betreffenden Definitionen weggelassen werden können, ohne daß Unklarheiten oder Mehrdeutigkeiten entstehen. Somit notieren wir den verallgemeinerten Modus Ponens in der Form

$$\frac{\begin{array}{l} \mathit{IF}\ F\ \mathit{THEN}\ G \\ \quad F' \end{array}}{\qquad\qquad G'},$$

wobei F, F' Fuzzy-Mengen über U und G, G' Fuzzy-Mengen über V sind.

Als erstes definieren wir „extensionale“ Interpretationen, und zwar im Standardfall als „Compositional Rule of Inference“, eingeführt von ZADEH in [56]. Sodann wird diese Interpretationstechnik auf den Nichtstandardfall verallgemeinert und als „Generalized Compositional Rule of Inference“ eingeführt. Zweitens betrachten wir relationale Interpretationen, die als Lösungen von Gleichungen für Fuzzy-Relationen gegeben sind. Drittens schließlich werden „funktionale“ Interpretationen definiert, die eine unmittelbare Verallgemeinerung relationaler Interpretationen sind.

Zum Verständnis der extensionalen Interpretationen in Standardform, d. h. der ursprünglich von ZADEH definierten Compositional Rule of Inference, erinnern wir an den relational definierten Abbildungsbegriff der scharfen Mengenlehre.

Gegeben seien die scharfen Mengen U und V. Wir bilden $U \times V$ und wählen $A \subseteqq U$ und $R \subseteqq U \times V$. Dann ist das R-Bild $R(A)$ der Menge A definiert durch

$$R(A) =_{def} \{y \,|\, \exists x (x \in A \wedge [x, y] \in R)\}\,.$$

Diese Begriffsbildungen werden nun im Rahmen der Fuzzy-Mengenlehre wie folgt verallgemeinert (siehe Kapitel 6.4).

Gegeben seien eine Regel der Form

$$\mathit{IF}\ F\ \mathit{THEN}\ G,$$

wobei F Fuzzy-Menge über U und G Fuzzy-Menge über V, sowie eine binäre Funktion

$$\pi : \langle 0, 1\rangle^2 \to \langle 0, 1\rangle\,.$$

Dabei dient π zur Interpretation des Konnektors *IF* ... *THEN*. Sie wird deshalb auch „Implikationsfunktion“ genannt, obwohl sie zunächst völlig beliebig gewählt werden kann, d. h., daß die Funktion π nicht notwendig irgendwelche Implikationsaxiome erfüllen muß.

Wir definieren nun eine binäre Relation $S_\pi^{F,G}$ wie folgt für $x \in U$ und $y \in V$:

$$S_\pi^{F,G}(x, y) =_{def} \pi(F(x), G(y)).$$

Das Wort „extensional“ soll in diesem Zusammenhang bedeuten, daß $S_\pi^{F,G}$ nicht unmittelbar von x und y abhängt, sondern nur von den Werten $F(x)$ und $G(y)$ der Fuzzy-Mengen F und G. Dies bedeutet, daß für beliebige $x, x' \in U$, $y, y' \in V$ gilt:

$$\text{Wenn } F(x) = F(x') \text{ und } G(y) = G(y'), \text{ so } S_\pi^{F,G}(x, y) = S_\pi^{F,G}(x', y').$$

Würde dagegen die Funktion π zusätzlich von den Variablen x und y abhängen, d. h. wäre eine Funktion der Form

$$\Pi : \langle 0,1\rangle^2 \times U \times V \to \langle 0,1\rangle$$

gegeben und würde man eine binäre unscharfe Relation $S_\Pi^{F,G}$ wie folgt definieren, wobei $x \in U$, $y \in V$:

$$S_\Pi^{F,G}(x,y) =_{def} \Pi(F(x), G(y), x, y),$$

so würde man von einer nicht-extensionalen („intensionalen") Erzeugung von $S_\Pi^{F,G}$ mittels F, G und Π sprechen. Auf diese Verallgemeinerung kommen wir bei der Definition von relationalen Interpretationen zurück.

Gegeben sei nun eine beliebige Fuzzy-Menge F' über U. In Analogie zur Definition von $R(A)$ definieren wir das $S_\pi^{F,G}$-Bild $S_\pi^{F,G}(F')$ der Fuzzy-Menge F' wie folgt, wobei $y \in V$.

Definition 7.2.1 (Compositional Rule of Inference)
$S_\pi^{F,G}(F')(y) =_{def} Sup\,\{min\,(F'(x), S_\pi^{F,G}(x,y))\,|\, x \in U\}$

Zum vertieften Verständnis der Analogie zur Definition von $R(A)$ siehe Kapitel 6.4.

Das Schema

$$\begin{array}{l} IF\ F\ \ THEN\ G \\ \quad F' \\ \hline \qquad\qquad\quad G' \end{array}$$

wird dann in der Form interpretiert, daß man — nachdem π fixiert ist — die Fuzzy-Menge G' durch

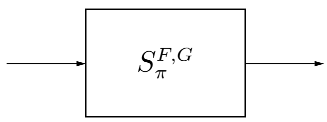
$$G'(y) =_{def} S_\pi^{F,G}(F')(y)$$

für $y \in V$ definiert. Löst man die Definition von $S_\pi^{F,G}$ auf, erhält man, daß die Gleichung

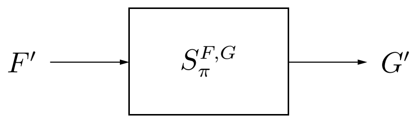
$$G'(y) = Sup\,\{min\,(F'(x), \pi(F(x), G(y)))\,|\, x \in U\}$$

für alle $y \in V$ gilt.

Geht man auf die Veranschaulichung durch eine Blackbox zurück, so bedeutet dies, daß die Blackbox



auf die Eingabe von F' mit der Ausgabe G' antwortet, d. h., daß

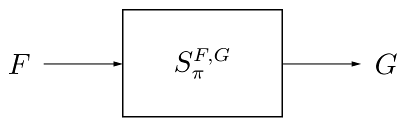


gilt.

Wenn man nun die gegebene IF-THEN-Regel

$$IF\ F\ THEN\ G$$

in der Weise versteht, daß die konstruierte Blackbox auf die Eingabe von F mit G antworten soll, d. h., daß



gilt, so führt dies auf die fundamentale Eigenschaft der lokalen Korrektheit, was in Formelschreibweise

$$S_{\pi}^{F,G}(F) = G$$

und damit gleichwertig

$$Sup\,\{min\,(F(x), \pi(F(x), G(y)))\mid x \in U\} = G(y)$$

für alle $y \in V$ bedeutet.

Die lokale Korrektheit ist aus „funktionalen“ Gründen für die Anwendungen fundamental wichtig. Ein weiterer Punkt, aus dem die Wichtigkeit dieser Begriffsbildung folgt, ist die Tatsache, daß lokale Korrektheit die Koinzidenz mit dem üblichen Modus Ponens bedeutet, was sich durch das Schema

$$\begin{array}{l} \textit{IF F THEN G} \\ \quad F \\ \hline \qquad\qquad\quad G \end{array}$$

beschreiben läßt.

Nun läßt sich aber sehr leicht durch Beispiele zeigen, daß die lokale Korrektheit nicht generell, sondern nur unter speziellen einschränkenden Bedingungen für F, G und π gilt. Aus diesen Gründen ist das folgende Kapitel 7.3 allein der totalen Korrektheit gewidmet.

Wir gehen nun zur Definition der „Generalized Compositional Rule of Inference“ über. Ausgangspunkt ist die Beobachtung, daß es außer der Funktion *min* viele andere Łukasiewiczsche Erweiterungen der Booleschen Funktion *et*, die das logische Verhalten des klassischen „Und“ beschreibt, gibt. Die Funktionenklasse der T-Normen unterstreicht diese Feststellung. Wir wollen uns hier nicht einmal auf T-Normen festlegen, sondern wollen *min* durch eine beliebige Funktion

$$\kappa : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$$

ersetzen.

Ähnliches gilt für den Operator *Sup*, der nur eine mögliche Erweiterung des zweiwertigen Existenzoperators $\exists$ ist. Somit ersetzen wir *Sup* durch eine beliebige Abbildung

$$Q : \mathfrak{P}\,\langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$$

und nennen Q einen allgemeinen Quantor.

Somit definieren wir

Definition 7.2.2
$\mathfrak{I} = [\pi, \kappa, Q]$ *heiße allgemeine extensionale Interpretation (einer einzelnen IF-THEN-Regel)*
$=_{def}$ *1.* $\pi, \kappa : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$
2. $Q : \mathfrak{P}\,\langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$

Es sei nun eine (einzelne) IF-THEN-Regel gegeben, etwa der Form

IF F THEN G,

wobei F eine Fuzzy-Menge über U und G eine Fuzzy-Menge über V ist.

Durch das folgende Konstruktionsverfahren, das wir „Generalized Compositional Rule of Inference“ nennen wollen, wird in den drei Schritten, die in der folgenden Definition beschrieben werden, auf der Basis der Interpretation $\mathfrak{J} = [\pi, \kappa, Q]$ ein Funktionaloperator $\Phi_{\mathfrak{J}}^{F,G}$, d. h. eine Abbildung

$$\Phi_{\mathfrak{J}}^{F,G} : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}(V)$$

folgendermaßen erzeugt.

Definition 7.2.3

Schritt 1 *Unter Verwendung der „Implikationsfunktion“ π und der Regel IF F THEN G definieren wir — wie bisher bei der Compositional Rule of Inference — eine binäre unscharfe Relation S durch*

$$S_{\pi}^{F,G}(x, y) =_{def} \pi(F(x), G(y)) \qquad (x \in U, y \in V).$$

Schritt 2 *Für ein beliebiges $F' : U \to \langle 0, 1\rangle$ wird aus F' unter Verwendung der Relation $S_{\pi}^{F,G}$, der „Kombinationsfunktion“ κ und des „Quantors“ Q die Fuzzy-Menge G' durch die folgende Formel „abgeleitet“ („inferiert“)*

$$G'(y) =_{def} Q \left\{ \kappa \left(F'(x), S_{\pi}^{F,G}(x, y) \right) \,\middle|\, x \in U \right\}$$

mit $y \in V$.

Schritt 3 *Der Operator $\Phi_{\mathfrak{J}}^{F,G}$ wird durch*

$$\Phi_{\mathfrak{J}}^{F,G}(F') =_{def} G'$$

definiert.

Wie bei der Standard-Interpretation, d. h. für $\mathfrak{J}_{ST} =_{def} [\pi, min, Sup]$, stellt sich das Problem der lokalen Korrektheit, in der funktionalanalytischen Terminologie durch die Forderung

$$\Phi_{\mathfrak{J}}^{F,G}(F) = G$$

ausgedrückt.

Wir gehen jetzt zur Definition relationaler Interpretationen über. Gegeben sei *IF F THEN G*.

Grundgedanke und Ausgangspunkt ist, daß man **nicht** den Konnektor *IF … THEN* durch eine beliebige Abbildung $\pi : \langle 0, 1\rangle^2 \to \langle 0, 1\rangle$ interpretiert und dann eine unscharfe Relation S in der Form

$$S(x, y) =_{def} \pi(F(x), G(y)) \qquad (x \in U, y \in V)$$

erzeugt; **sondern** daß man die Regel *IF F THEN G* als eine relationale Gleichung auffaßt, d. h. als eine Gleichung der Form

$$F \circ S = G,$$

die für gegebenes F und G zur Bestimmung einer binären Relation S (also einer Lösung) dienen soll.

Um dies zu präzisieren, ist es erforderlich, eine Operation „Produkt“ zu haben, um $F \circ S$ bilden zu können. Wir gehen von dem allgemeinen Ansatz aus, daß wir ein Produkt $\circ$ als eine Abbildung der Form

$$\circ : \mathfrak{F}(U) \times \mathfrak{F}(U \times V) \to \mathfrak{F}(V)$$

definieren, d. h. als eine eindeutige Abbildung $\circ$, die jeder Fuzzy-Menge $F \in \mathfrak{F}(U)$ und jeder binären unscharfen Relation $S : U \times V \to \langle 0, 1\rangle$ eine Fuzzy-Menge $F \circ S$ über V zuordnet.

Aus theoretischen Untersuchungen und praktischen Anwendungen kennen wir eine Fülle von Möglichkeiten, ein solches Produkt zu definieren.

Betrachten wir die Compositional Rule of Inference, so kann man das sogenannte Standard-Produkt $\circ$, wobei für $y \in V$

$$(F \circ S)(x) =_{def} Sup\,\{min(F(x), S(x,y))\,|\,x \in U\}\,,$$

definieren und dann Definition 7.2.1 in der Form

$$S_{\pi}^{F,G}(F') =_{def} F' \circ S_{\pi}^{F,G}$$

schreiben.

Zu entsprechenden Umformulierungen der Generalized Compositional Rule of Inference gehen wir von einer allgemeinen extensionalen Interpretation der Form $\mathfrak{J} = [\pi, \kappa, Q]$ aus. Für die Definition eines entsprechenden (Nicht-Standard-) Produkts benötigen wir nur κ und Q, wir setzen also $\mathfrak{J}' = [\kappa, Q]$ und definieren das Produkt $\textcircled{\mathfrak{J}}$ wie folgt für $y \in V$:

$$(F \textcircled{\mathfrak{J}} S)\,(y) =_{def} Q\,\{\kappa(F(x), S(x,y))\,|\,x \in U\}\,.$$

Definition 7.2.3 kann man dann wie folgt formulieren:

$$\Phi_{\mathfrak{J}}^{F,G}(F') =_{def} F' \textcircled{\mathfrak{J}}\, S_{\pi}^{F,G}.$$

Durch die folgende Definition präzisieren wir das Konzept „relationale Interpretation“.

Definition 7.2.4
$\mathfrak{J} = [S, \circ]$ *heiße relationale Interpretation*
$=_{def}$ *1.* $S : U \times V \to \langle 0, 1\rangle$
2. $\circ : \mathfrak{F}(U) \times \mathfrak{F}(U \times V) \to \mathfrak{F}(V)$.

Grundlegend für die korrekte Anwendung des Generalized Modus Ponens ist die folgende Verifikationsdefinition.

Definition 7.2.5
Die relationale Interpretation $\mathfrak{J} = [S, \circ]$ *verifiziert den Generalized Modus Ponens*

$$\begin{array}{l} IF\ F\ THEN\ G \\ \quad F' \\ \hline \qquad\qquad\quad G' \end{array}$$

$=_{def}$ *Wenn* $F \circ S = G$, *so* $F' \circ S = G'$.

Diese bedeutet für das praktische Arbeiten mit dem Generalized Modus Ponens auf der Grundlage relationaler Interpretationen folgendes:

Gegeben sei die Regel *IF F THEN G*. Nun ist eine Relation S (Lösung) zu bestimmen, d. h., daß $F \circ S = G$. Die abgeleitete Fuzzy-Menge G' wird dann durch $G' =_{def} F' \circ S$ definiert. Dies hat zur Voraussetzung, daß Konstruktionsverfahren für eine (bzw. möglichst alle) Lösungen S der Gleichung $F \circ S = G$ entwickelt werden. Diese Aufgabenstellung mag als Nachteil gegenüber dem extensionalen Ansatz empfunden werden. Dem steht aber der Vorteil gegenüber, daß beim relationalen Ansatz die lokale Korrektheit „automatisch“ erfüllt ist, während beim extensionalen Ansatz diese Eigenschaft in jedem konkreten Fall erst durch eine mehr oder weniger detaillierte Untersuchung nachgewiesen werden muß.

Für mehr Informationen zu diesem Problemkreis verweisen wir auf die folgenden Kapitel 7.3 und 7.4.

Das im folgenden zu entwickelnde Konzept verallgemeinert den relationalen Ansatz und stellt einen Zusammenhang zu Begriffsbildungen der Funktionalanalysis her.

Definition 7.2.6
Φ heiße funktionale Interpretation
$=_{def}$ $\Phi : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}(V)$.

Definition 7.2.7
Die funktionale Interpretation Φ verifiziert den Generalized Modus Ponens

$$\begin{array}{l} \textit{IF } F \textit{ THEN } G \\ \quad F' \\ \hline \qquad\qquad\quad G' \end{array}$$

$=_{def}$ *Wenn $\Phi(F) = G$, so $\Phi(F') = G'$.*

Auf der Grundlage des Konzeptes funktionaler Interpretationen wird der Generalized Modus Ponens wie folgt verwendet.

Gegeben sei die Regel

$$\textit{IF } F \textit{ THEN } G.$$

Man bestimmt einen Funktionaloperator

$$\Phi : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}(V),$$

so daß

$$\Phi(F) = G$$

gilt. Diese Aufgabe wird im allgemeinen durch zusätzliche Forderungen an Φ eingeschränkt, z. B. daß Φ bezüglich einer gegebenen Metrik oder Topologie stetig sein soll oder allgemein, daß Φ in einer vorher fixierten Klasse $FUNKT$ von Abbildungen $\Psi : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}(V)$ liegen soll. Hat man ein derartiges Φ konstruiert, wird die Ableitung von G' durch

$$G' =_{def} \Phi(F')$$

definiert.

7.3 Die lokale Korrektheit der Generalized Compositional Rule of Inference

Gegeben seien eine IF-THEN-Regel der Form

$$\textit{IF } F \textit{ THEN } G$$

sowie eine allgemeine extensionale Interpretation der Form

$$\mathfrak{I} = [\pi, \kappa, Q].$$

Entsprechend Definition 7.2.3 definieren wir einen Funktionaloperator

$$\Phi_{\mathfrak{I}}^{F,G} : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}(V)$$

für beliebiges $F' \in \mathfrak{F}(U)$ durch

$$\Phi_{\mathfrak{I}}^{F,G}(F')(y) =_{def} Q\,\{\kappa(F'(x), \pi(F(x), G(y)))\,|\,x \in U\} \qquad (y \in V).$$

Definition 7.3.1
$\Phi_{\mathfrak{J}}^{F,G}$ *heißt lokal korrekt*
$=_{def}$ $\Phi_{\mathfrak{J}}^{F,G}(F) = G.$

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, für verschiedene extensionale Interpretationen die lokale Korrektheit zu beweisen bzw. durch Gegenbeispiele zu widerlegen.

Beispiel 7.3.1 Wir beginnen mit der Diskussion einer extensionalen Interpretation, die ursprünglich schon von ZADEH betrachtet und bei den ersten Anwendungen von Fuzzy-IF-THEN-Regeln [**?**] verwendet wurde und die auch heute noch bei vielen Anwendungen benutzt wird.

Dabei ist wesentlich, daß als interpretierende Funktion π nicht irgendeine Implikation oder „implikationsähnliche“ Funktion (siehe Kapitel 4), sondern das Minimum gewählt wird, d. h. wir definieren

$$\pi(r,s) =_{def} min(r,s) \qquad (r,s \in \langle 0,1\rangle).$$

Diese Wahl mag zunächst Befremden erwecken, insbesondere, wenn man dem IF-THEN-Konnektor eine „implikative“ Bedeutung im Sinne der zweiwertigen oder der ŁUKASIEWICZschen Logik unterlegt. Denkt man jedoch an die funktionale Bedeutung des Konnektors, so ist die Wahl von π als Minimum völlig klar und einsichtig; denn durch die Definition

$$S(x,y) =_{def} min(F(x), G(y))$$

wird nichts anderes als das CARTESIsche Produkt der Mengen F und G erzeugt, was eine sehr spezielle („universelle“) binäre Relation (Abbildungsvorschrift) ist. Ersetzen wir F bzw. G durch die scharfen Mengen A und B, dann korrespondiert zu S die binäre (scharfe!) Relation

$$R =_{def} A \times B.$$

Bei der Wahl von κ und Q beschränken wir uns auf den Standardfall, d. h. wir wählen

$$\kappa =_{def} min$$
$$Q =_{def} Sup\,.$$

Zur Formulierung des folgenden für sowohl Theorie als auch Anwendungen grundlegenden Satzes definieren wir

$$\mathfrak{J}_1 =_{def} [min, min, Q].$$

Theorem 7.3.1
Wenn $hgt(F) \geqq hgt(G)$, *so* $\Phi_{\mathfrak{J}_1}^{F,G}(F) = G.$

Dieser Satz besagt somit, daß bei der betrachteten Interpretation der Generalized Modus Ponens mit dem üblichen Modus Ponens zusammenfällt bzw. daß die Compositional Rule of Inference lokal korrekt ist.

Aufgabe 7.3.1 *Man beweise Theorem 7.3.1.*

Anleitung: *Man beweise die beiden folgenden Ungleichungen* (7.1) *und* (7.2) *gesondert, wobei* $y \in V$.

$$\text{(7.1)} \qquad Sup\,\{min(F(x), min(F(x), G(y)))\,|\,x \in U\} \leqq G(y)$$

$$\text{(7.2)} \qquad Sup\,\{min(F(x), min(F(x), G(y)))\,|\,x \in U\} \geqq G(y)$$

Dabei wird man feststellen, daß die Voraussetzung $hgt(F) \geqq hgt(G)$ *zum Beweis von* (7.1) *nicht erforderlich ist, dagegen zum Beweis von* (7.2) *gebraucht wird.*

Aufgabe 7.3.2 *Man zeige durch ein Gegenbeispiel, daß auf die Voraussetzung* $hgt(F) \geqq hgt(G)$ *nicht verzichtet werden kann.*

Anleitung: *Da die in der Anleitung zu Übungsaufgabe 7.3.1 formulierte Bedingung* (7.1) *ohne die Voraussetzung* $hgt(F) \geqq hgt(G)$ *gilt, muß man* (7.2) *widerlegen, und zwar durch die Konstruktion von Fuzzy-Mengen* F *und* G*, für die* $hgt(F) < hgt(G)$ *gilt.*

Die in Beispiel 7.3.1 betrachtete extensionale Interpretation und das dazugehörige Theorem 7.3.1 kann man wie folgt verallgemeinern. Zur Formulierung des folgenden Theorems erinnern wir an die Definition: F heiße normal genau dann, wenn $Sup\,\{F(x)\,|\,x \in U\} = 1$. Es sei $\mathfrak{J} = [\pi, \kappa, Q]$ gegeben.

Theorem 7.3.2
Wenn

1. F *normal ist,*
2. π *und* κ *stetige T-Normen sind,*
3. $Q = Sup$,

so ist $\Phi_{\mathfrak{J}}^{F,G}$ *lokal korrekt.*

Beweis
Wir haben zu beweisen, daß für alle $y \in V$

$$\text{(7.3)} \qquad Sup\,\{\kappa(F(x), \pi(F(x), G(y)))\,|\,x \in U\} = G(y)$$

gilt. Wir betrachten für fixiertes $s_0 \in \langle 0, 1\rangle$ die reelle Funktion

$$\text{(7.4)} \qquad \varphi(r) =_{def} \kappa(r, \pi(r, s_0)) \qquad (r \in \langle 0, 1\rangle).$$

Weil κ und π monoton sind, gilt

$$\text{(7.5)} \qquad \varphi \text{ ist monoton.}$$

Weil κ und π außerdem stetig sind, folgt

$$\text{(7.6)} \qquad \varphi \text{ ist stetig.}$$

Aus (7.5) und (7.6) folgt für jedes beliebige $M \subseteqq \langle 0, 1\rangle$

$$\text{(7.7)} \qquad Sup\,\{\varphi(r)\,|\,r \in M\} = \varphi\,(Sup\,\{r\,|\,r \in M\})\,.$$

Ferner gilt nach Voraussetzung

$$\text{(7.8)} \qquad F \text{ ist normal, d. h. nach Definition } Sup\,\{F(x)\,|\,x \in U\} = 1.$$

Aus (7.7) und (7.8) erhalten wir

$$\begin{aligned}
(7.9)\ & Sup\,\{\kappa(F(x),\pi(F(x),G(y)))\,|\,x\in U\} \\
&= \kappa\,(Sup\,\{F(x)\,|\,x\in U\}\,,\pi\,(Sup\,\{F(x)\,|\,x\in U\}\,,G(y))) \\
&= \kappa(1,\pi(1,G(y))) \\
&= \pi(1,G(y)) && \text{weil } \kappa \text{ eine T-Norm ist} \\
&= G(y) && \text{weil } \pi \text{ eine T-Norm ist.}
\end{aligned}$$

Damit ist Theorem 7.3.2 bewiesen. ■

Aufgabe 7.3.3 *Die in Theorem 7.3.2 angegebenen Voraussetzungen sind zum Beweis der Behauptung hinreichend, aber offenbar nicht notwendig. Dies betrifft insbesondere Voraussetzung 2, nämlich daß π und κ stetige T-Normen sind.*

Man untersuche, welche Voraussetzungen über π und κ tatsächlich im Beweis von Theorem 7.3.2 gebraucht werden und formuliere diese.

Aufgabe 7.3.4 *In Übungsaufgabe 7.3.2 hatten wir gezeigt, daß die im Beispiel 7.3.1 auftretende Bedingung $hgt(F) \geqq hgt(G)$, die für die lokale Korrektheit des Operators $\Phi_{\mathfrak{J}}^{F,G}$ im Falle $\mathfrak{J} = [min, min, Sup]$ hinreichend ist, nicht abgeschwächt werden kann.*

Analog zeige man für Theorem 7.3.2, daß auf die Voraussetzung $Sup\,\{F(x)\,|\,x\in U\} = 1$, d. h. daß F normal ist, nicht verzichtet werden kann, falls π und κ beide archimedisch sind (siehe Definition **??***).*

Wir untersuchen nun die Frage, unter welchen Bedingungen man in Theorem 7.3.2 auf die Stetigkeit der T-Normen π und κ verzichten kann.

Diese Frage wird durch das folgende Theorem beantwortet.

Zur Formulierung dieses Theorems erinnern wir: F heiße stark normal genau dann, wenn es ein $x \in U$ gibt mit $F(x) = 1$.

Theorem 7.3.3
Wenn

1. *F stark normal ist,*
2. *π und κ beliebige T-Normen sind,*
3. *$Q = Sup$,*

so ist $\Phi_{\mathfrak{J}}^{F,G}$ lokal korrekt.

Beweis
Wir haben zu zeigen, daß für alle $y \in V$ gilt

$$(7.10)\qquad Sup\,\{\kappa(F(x),\pi(F(x),G(y)))\,|\,x\in U\} \leqq G(y)$$

$$(7.11)\qquad Sup\,\{\kappa(F(x),\pi(F(x),G(y)))\,|\,x\in U\} \geqq G(y).$$

Um (7.10) zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß für beliebige $x \in U$

$$(7.12)\qquad \kappa(F(x),\pi(F(x),G(y))) \leqq G(y)$$

gilt. Nun gilt aber für eine beliebige T-Norm τ

$$\tau(r,s) \leqq s \qquad \text{für alle } r,s \in \langle 0,1\rangle. \tag{7.13}$$

Somit folgt (7.12) durch iterierte Anwendung von (7.13).

Um (7.11) zu beweisen, gehen wir davon aus, daß für beliebiges $x \in U$ gilt:

$$\kappa(F(x),\pi(F(x),G(y))) \leqq \mathit{Sup}\,\{\kappa(F(x'),\pi(F(x'),G(y)))\,|\,x' \in U\}\,. \tag{7.14}$$

Also genügt es zu zeigen, daß ein $x \in U$ existiert, so daß

$$\kappa(F(x),\pi(F(x),G(y))) = G(y) \tag{7.15}$$

gilt.

Da F stark normal ist, existiert ein $x_0 \in U$ mit

$$F(x_0) = 1. \tag{7.16}$$

Für ein solches x_0 folgt dann, weil κ und π T-Normen sind,

$$\begin{aligned}\kappa(F(x_0),\pi(F(x_0),G(y))) &= \kappa(1,\pi(1,G(y)))\\ &= \kappa(1,G(y))\\ &= G(y),\end{aligned} \tag{7.17}$$

d. h. es gilt (7.15). ■

Aufgabe 7.3.5 *Man zeige durch Gegenbeispiele, daß Theorem 7.3.3 im allgemeinen nicht mehr gilt, falls man für F anstelle der starken Normalität nur noch die Normalität, d. h. $\mathit{Sup}\,\{F(x)\,|\,x \in U\} = 1$ fordert.*

Anleitung: *Wegen Theorem 7.3.2 wird man zur Konstruktion eines Gegenbeispiels T-Normen κ und π verwenden müssen, von denen mindestens eine unstetig ist.*

Wir gehen nun dazu über, die lokale Korrektheit für die Fälle zu untersuchen, wo π als eine „Implikationsfunktion" gewählt wird.

Beispiel 7.3.2 Wir wählen π als ŁUKASIEWICZsche Implikation $imp_{\text{Ł}}$. Die Funktionen κ und Q werden wie in Beispiel 7.3.1 als Minimum bzw. Supremum genommen. Somit definieren wir für $r,s \in \langle 0,1\rangle$:

$$\pi(r,s) =_{def} min(1, 1-r+s)$$

und betrachten die Interpretation

$$\mathfrak{J}_2 = [imp_{\text{Ł}}, min, Sup].$$

Hier kann man sehr leicht Mengen F und G angeben, so daß der Operator $\Phi^{F,G}_{\mathfrak{J}_2}$ nicht lokal korrekt ist, d. h. $\Phi^{F,G}_{\mathfrak{J}_2}(F) \neq G$ gilt.

Dazu seien Elemente $x_0 \in U$ und $y_0 \in V$ fixiert sowie eine Fuzzy-Menge F über U und eine Fuzzy-Menge G über V gegeben, so daß

$$\begin{aligned}F(x_0) &= \tfrac{1}{2}\\ G(x_0) &= \tfrac{1}{4}\end{aligned}$$

gilt. Für die übrigen Elemente $x \in U$ bzw. $y \in V$ seien F bzw. G beliebig definiert.

Dann folgt

$$\begin{aligned}
&Sup\,\{min(F(x), min(1, 1 - F(x) + G(y)))\,|\,x \in U\} \\
&\geqq min(F(x_0), min(1, 1 - F(x_0) + G(y_0))) \\
&= min\left(\tfrac{1}{2}, min\left(1, 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\right)\right) \\
&= min\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right) \\
&> \tfrac{1}{4} = G(y_0),
\end{aligned}$$

also ist $\Phi^{F,G}_{\mathfrak{J}_2}$ nicht lokal korrekt.

Aufgabe 7.3.6 *Man gebe hinreichende Bedingungen für F und G an, so daß $\Phi^{F,G}_{\mathfrak{J}_2}$ lokal korrekt ist.*

Beispiel 7.3.3 Wir wählen π als KLEENE-DIENES-Implikation imp_{KD}, wobei für $r, s \in \langle 0, 1\rangle$:

$$imp_{\mathrm{KD}}(r, s) =_{def} max(1 - r, s).$$

Die Funktionen κ und Q werden wieder als Minimum und Supremum gewählt. Somit verwenden wir die Interpretation

$$\mathfrak{J}_3 =_{def} [imp_{\mathrm{KD}}, min, Sup].$$

Auch zu diesem Beispiel kann man sehr leicht Fuzzy-Mengen F und G angeben, so daß der Operator $\Phi^{F,G}_{\mathfrak{J}_3}$ nicht lokal korrekt ist.

Dazu seien wieder Elemente $x_0 \in U$ und $y_0 \in V$ fixiert. Wir wählen Fuzzy-Mengen F über U und G über V

7.4 Eine relationale Semantik für IF-THEN-Regeln

Für eine gegebene IF-THEN-Regel

$$R : IF\ F\ THEN\ G$$

und eine gegebene Interpretation

$$\mathfrak{J} = [\pi, \kappa, Q]$$

deuten wir die lokale Korrektheit des erzeugten Operators $\Phi^R_{\mathfrak{J}}$, also die Gültigkeit der Gleichung

$$\Phi^R_{\mathfrak{J}}(F) = G,$$

folgendermaßen um.

Wir betrachten gesondert die durch R und π erzeugte binäre unscharfe Relation

$$S(x, y) =_{def} \pi(F(x), G(y)) \qquad (x, y \in U).$$

Die gegebene Interpretation $\mathfrak{J}$ reduzieren wir durch Weglassen von π zu

$$\mathfrak{J}' = [\kappa, Q].$$

Mit Hilfe von $\mathfrak{J}'$ definieren wir für eine beliebige Fuzzy-Menge $F' : U \to \langle 0,1 \rangle$ und die Relation S ein Produkt $F' \circledS S$ wie folgt:

$$(F' \circledS S)(y) =_{def} Q\{\kappa(F'(x), S(x,y)) \,|\, x \in U\} \qquad (y \in U).$$

Da wir in diesem Kapitel die (reduzierte) Interpretation $\mathfrak{J}' = [\kappa, Q]$ nicht verändern, schreiben wir im folgenden zur Vereinfachung anstelle $F' \circledS S$ einfacher $F' \circ S$.

Ist nun die Gleichung

$$\Phi^R_{\mathfrak{J}}(F) = G$$

erfüllt, d. h. ist der Operator lokal korrekt, so bedeutet dies, wenn man die neu eingeführten Begriffsbildungen benutzt, daß die Gleichung

$$F \circ S = G$$

gilt, somit, da F und G gegeben sind, daß S eine Lösung (bezüglich der verwendeten Multiplikation $\circ$) der gegebenen Relationalgleichung ist.

Wir modifizieren nun den in Kapitel 7.2 eingeführten und in Kapitel 7.3 diskutierten Interpretationsbegriff $\mathfrak{J} = [\pi, \kappa, Q]$ wie folgt.

Definition 7.4.1
$\mathfrak{J} = [S, \kappa, Q]$ *heiße relationale Interpretation*
$=_{def}$ 1. $S : U \times U \to \langle 0,1 \rangle$
2. $\kappa : \langle 0,1 \rangle^2 \to \langle 0,1 \rangle$
3. $Q : \mathfrak{P}\langle 0,1 \rangle \to \langle 0,1 \rangle$.

Dieser Interpretationsbegriff unterscheidet sich von dem in Kapitel 7.2 eingeführten darin, daß die Funktion $\pi : \langle 0,1 \rangle^2 \to \langle 0,1 \rangle$, die auf Grund einer gegebenen IF-THEN-Regel *IF F THEN G* zur Definition einer Relation S in der Form

$$S(x,y) =_{def} \pi(F(x), G(y)) \qquad (x, y \in U)$$

dient, nicht mehr vorhanden ist und durch die Relation S ersetzt ist, wobei über die „Herkunft“ von S nichts ausgesagt ist.

Man kann trotzdem sofort einen Funktionaloperator $\Phi_{\mathfrak{J}} : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}(U)$ definieren, nämlich auf der Grundlage des Produkts $\circ$, das auf $\mathfrak{J}' = [\kappa, Q]$ beruht, wie folgt für beliebiges $F' : U \to \langle 0,1 \rangle$.

Definition 7.4.2
$\Phi_{\mathfrak{J}}(F') =_{def} F' \circ S$

Eliminiert man die Definition von $\circ$, so erhält man folgende Gleichung zur „Berechnung“ von $\Phi_{\mathfrak{J}}(F')$:

$$\Phi_{\mathfrak{J}}(F')(y) = Q\{\kappa(F'(x), S(x,y)) \,|\, x \in U\}, \qquad y \in U.$$

Somit können wir (trivial!) feststellen, daß für jede Lösung S von $F \circ S = G$ der Operator $\Phi_{\mathfrak{J}}$ lokal korrekt ist bezüglich der Regel *IF F THEN G*.

Aus dieser Feststellung entsteht das Problem, einen Überblick über alle Lösungen S einer gegebenen Gleichung $F \circ S = G$ zu gewinnen, um auf diesem Wege einen Überblick über alle Operatoren der Form $\Phi_{\mathfrak{J}}$ zu erhalten.

Zur Formulierung unserer Ergebnisse erinnern wir für $S : U \times V \to \langle 0,1 \rangle$, $T : U \times V \to \langle 0,1 \rangle$ und $\mathfrak{S} \subseteqq \{S \,|\, S : U \times V \to \langle 0,1 \rangle\}$ an die Definitionen, wobei $x \in U$ und $y \in V$:

1. $(S \cup T)(x,y) =_{def} max(S(x,y), T(x,y))$
2. $(sup\, \mathfrak{S})(x,y) =_{def} Sup\, \{S(x,y) \,|\, S \in \mathfrak{S}\}$

Um hinreichend gut übersehbare Ergebnisse zu erhalten, beschränken wir uns auf den Standardfall eines Produkts $\circ$, d. h. in $\mathfrak{J}' = [\kappa, Q]$ wählen wir $\kappa = min$, $Q = Sup$ und verwenden dann die Definition für $y \in V$

$$(F \circ S)(y) =_{def} Sup\, \{min(F(x), S(x,y)) \,|\, x \in U\}\,.$$

Das folgende Lemma spielt beim Beweis der späteren Theoreme eine grundlegende Rolle.

Lemma 7.4.1

1. $F \circ (S \cup T) = (F \circ S) \cup (F \circ T)$

2. $F \circ sup\, \mathfrak{S} = sup\, \{F \circ S \,|\, S \in \mathfrak{S}\}$

Beweis

ad 1.

Es gilt nach Definition

$$F \circ (S \cup T)(y) = Sup\, \{min(F(x), (S \cup T)(x,y)) \,|\, x \in U\}\,, \tag{7.18}$$

also nach Definition von $\cup$

$$F \circ (S \cup T)(y) = Sup\, \{min(F(x), max(S(x,y), T(x,y))) \,|\, x \in U\}\,, \tag{7.19}$$

also, weil *min* bezüglich *max* distributiv ist,

$$F \circ (S \cup T)(y) = Sup \left\{ max \begin{pmatrix} min(F(x), S(x,y)), \\ min(F(x), T(x,y)) \end{pmatrix} \middle|\, x \in U \right\}, \tag{7.20}$$

also, weil *Sup* mit *max* vertauschbar ist,

$$F \circ (S \cup T)(y) = max \begin{pmatrix} Sup\, \{min(F(x), S(x,y)) \,|\, x \in U\}\,, \\ Sup\, \{min(F(x), T(x,y)) \,|\, x \in U\} \end{pmatrix}. \tag{7.21}$$

Führt man die Definition für $\circ$ auf der rechten Seite der obigen Gleichung ein, erhält man die Behauptung unseres Lemmas. ■

Aufgabe 7.4.1 *Man beweise Behauptung 2 von Lemma 7.4.1.*

Anleitung: *Der Übergang von (7.19) zu (7.20) beruhte darauf, daß min bezüglich max distributiv ist. Hier müssen wir analog verwenden, daß min bezüglich Sup distributiv ist, d. h. für $r \in \langle 0,1 \rangle$ und $M \subseteqq \langle 0,1 \rangle$ gilt*

$$min(r, Sup\, M) = Sup\, \{min(r,s) \,|\, s \in M\}\,.$$

Zu den oben fixierten F, S, T sei gegeben $G : V \to \langle 0,1 \rangle$.

Theorem 7.4.2

Gilt

$$F \circ S = G$$

und

$$F \circ T = G,$$

so auch

$$F \circ (S \cup T) = G.$$

Beweis
Aus

$$F \circ S = G$$

und

$$F \circ T = G$$

folgt

$$F \circ S \cup F \circ T = G \cup G,$$

also nach Lemma 7.4.1 und weil $G \cup G = G$ wegen der Idempotenz von max folgt die Behauptung. ■

Das folgende Theorem verallgemeinert Theorem 7.4.2 auf beliebige Mengen von Lösungen.

Theorem 7.4.3
Wenn

$$\mathfrak{S} \neq \emptyset$$

und

$$F \circ S = G \text{ für jedes } S \in \mathfrak{S},$$

so

$$F \circ sup\, \mathfrak{S} = G.$$

Beweis
Analog zum Beweis von Theorem 7.4.2, wobei man jetzt die Behauptung 2 von Lemma 7.4.1 benutzt. ■

Man beachte, daß die Voraussetzung $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ notwendig ist, denn für $\mathfrak{S} = \emptyset$ ist $sup\, \mathfrak{S}$ die leere binäre unscharfe Relation S_0, d. h. $S_0(x, y) = 0$ für alle $x \in U$ und $y \in V$, und diese Relation ist im allgemeinen keine Lösung, d. h. es gilt im allgemeinen **nicht** $F \circ S_0 = G$.

Korollar 7.4.4
Gibt es von $F \circ S = G$ eine Lösung, d. h. $\{S \,|\, S : U \times V \rightarrow \langle 0, 1\rangle \wedge F \circ S = G\} \neq \emptyset$, dann ist

$$S^* =_{def} sup\, \{S \,|\, S : U \times V \rightarrow \langle 0, 1\rangle \wedge F \circ S = G\}$$

die größte Lösung der Gleichung $F \circ S = G$, d. h. für jedes $S : U \times V \rightarrow \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$\text{Wenn } F \circ S = G, \text{ so } S \subseteqq S^*.$$

Beweis
Trivial durch Anwendung von Theorem 7.4.3. ■

Wir stellen jetzt die Frage, unter welchen Bedingungen eine Relationalgleichung der Form
$$F \circ S = G$$
überhaupt eine Lösung hat.

Das folgende Theorem gibt auf diese Frage eine Antwort. Zur Formulierung erinnern wir an die Definition der GÖDELschen Implikation $imp_{\mathrm{Gö}}$. Es gilt für alle $r, s \in \langle 0, 1 \rangle$:

$$imp_{\mathrm{Gö}}(r, s) =_{def} \begin{cases} 1 & \text{, falls } r \leqq s \\ s & \text{, falls } r > s \end{cases}.$$

Außerdem benutzen wir neben Interpretationen der Form

$$\mathfrak{J} = [S, min, Sup]$$

auch solche der Form
$$\mathfrak{J} = [imp_{\mathrm{Gö}}, min, Sup].$$

Theorem 7.4.5

1. *Es gibt ein $S : U \times V \to \langle 0, 1 \rangle$ mit*

$$F \circ S = G$$

genau dann, wenn
$$F \circ S^{F,G}_{imp_{\mathrm{Gö}}} = G.$$

2. *Für jedes $S : U \times V \to \langle 0, 1 \rangle$ gilt: Wenn $F \circ S \subseteqq G$, so $S \subseteqq S^{F,G}_{imp_{\mathrm{Gö}}}$.*

Bedingung 1 dieses Theorems besagt, daß die Frage, ob $F \circ S = G$ eine Lösung hat, durch den Test
$$F \circ S^{F,G}_{imp_{\mathrm{Gö}}} = G$$
beantwortet werden kann.

Aus Bedingung 2 folgt: Ist $S^{F,G}_{imp_{\mathrm{Gö}}}$ eine Lösung, so ist diese Relation sogar die (eindeutig bestimmte) größte Lösung.

Beweis (von Theorem 7.4.5)
ad 1
1.1 ($\to$). Gegeben sei ein $S : U \times V \to \langle 0, 1 \rangle$ mit

$$F \circ S = G,$$

also gegeben sei eine Lösung. Wir haben dann zu zeigen, daß dann auch $S^{F,G}_{imp_{\mathrm{Gö}}}$ eine Lösung ist, also
$$F \circ S^{F,G}_{imp_{\mathrm{Gö}}} = G$$
gilt.

Lösen wir die entsprechenden Definitionen auf, haben wir die **Voraussetzung**

(7.22) für jedes $y \in V$ gilt: $Sup\,\{min(F(x), S(x, y))\,|\,x \in U\} = G(y)$.

Die **Behauptung** lautet dann

(7.23)
für jedes $y \in V$ gilt: $Sup\,\{min(F(x), imp_{\mathrm{Gö}}(F(x), G(y)))\,|\,x \in U\} = G(y)$.

Um die Behauptung (7.23) zu beweisen, **genügt** es, die folgenden Behauptungen (7.24) und (7.25) zu zeigen:

(7.24)
für jedes $x \in U$ und $y \in V$ gilt: $min(F(x), imp_{\text{Gö}}(F(x), G(y))) \leqq G(y)$

(7.25)
zu jedem $y \in V$ und $z \in \langle 0, 1\rangle$ mit $z < G(y)$ existiert ein $x \in U$,
so daß $z \leqq min(F(x), imp_{\text{Gö}}(F(x), G(y))) \leqq G(y)$.

ad (7.24)

Fall 1 $F(x) \leqq G(y)$
Nach Definition der GÖDELschen Implikation folgt daraus, daß

$$imp_{\text{Gö}}(F(x), G(y)) = 1.$$

Somit genügt es, im Fall 1 zu beweisen

$$min(F(x), 1) \leqq G(y).$$

Das gilt aber wegen

$$min(F(x), 1) = F(x)$$

und der Voraussetzung

$$F(x) \leqq G(y)$$

im Fall 1 trivial.

Fall 2 $F(x) > G(y)$
Nach Definition der GÖDELschen Implikation folgt dann

$$imp_{\text{Gö}}(F(x), G(y)) = G(y).$$

Somit genügt es, im Fall 2 zu beweisen

$$min(F(x), G(y)) \leqq G(y).$$

Dies ist aber trivial erfüllt für den Operator *min*.

Anmerkung

Zum Beweis von Teil (7.24) unserer Behauptung (7.23) haben wir die Voraussetzung (7.22) noch nicht benutzt.

ad (7.25) Aus der Voraussetzung (7.23) folgt

(7.26)
zu jedem $y \in V$ und $z \in \langle 0, 1\rangle$ mit $z < G(y)$ existiert ein $x \in U$,
so daß $z \leqq min(F(x), S(x, y)) \leqq G(y)$.

Um Behauptung (7.25) zu beweisen, sei zu gegebenem $y \in V$ und $z \in \langle 0, 1\rangle$ mit $z < G(y)$ ein $x \in U$ entsprechend (7.26) gewählt.

Fall (7.25.1) $F(x) \leqq G(y)$
Dann folgt

$$imp_{\text{Gö}}(F(x), G(y)) = 1.$$

Um Behauptung (7.25) im Fall (7.25.1) zu beweisen, haben wir somit

$$z \leqq min(F(x), 1) \leqq G(y)$$

zu zeigen. Wegen

$$min(F(x), 1) = F(x)$$

haben wir schließlich

$$z \leqq F(x) \leqq G(y)$$

zu beweisen.
Die Beziehung

$$F(x) \leqq G(y)$$

gilt trivial nach Voraussetzung im Fall (7.25.1).
Um

$$z \leqq F(x)$$

zu zeigen, gehen wir von Folgerung (7.26) aus. Wir erhalten

$$z \leqq min(F(x), S(x, y)),$$

ferner gilt für *min* stets

$$min(F(x), S(x, y)) \leqq F(x),$$

also folgt

$$z \leqq F(x).$$

Fall (7.25.2) $F(x) > G(y)$
Behauptung (7.25) nimmt in diesem Fall wegen

$$imp_{\mathrm{Gö}}(F(x), G(y)) = G(y)$$

die folgende Form an:

> zu jedem $y \in V$ und $z \in \langle 0, 1\rangle$ mit $z < G(y)$ existiert ein $x \in U$, so daß $z \leqq min(F(x), G(y)) \leqq G(y)$.

Dies gilt aber trivial wegen $min(F(x), G(y)) = G(y)$ und $z < G(y)$.

1.2 (←). Diese Richtung ist trivial; wir wählen dazu

$$S =_{def} S^{F,G}_{imp_{\mathrm{Gö}}}.$$

ad 2
Aus der Voraussetzung

(7.27) $$F \circ S \subseteqq G$$

folgt, daß gilt

(7.28) für jedes $x \in U$ und $y \in V$ gilt: $min(F(x), S(x, y)) \leqq G(y)$.

Wir haben zu beweisen, daß

(7.29) für jedes $x \in U$ und $y \in V$ gilt: $S(x, y) \leqq imp_{\mathrm{Gö}}(F(x), G(y))$.

Fall 1 $F(x) \leqq G(y)$

Dann folgt für die GÖDELsche Implikation

$$imp_{\text{Gö}}(F(x), G(y)) = 1,$$

also gilt wegen $S(x, y) \leqq 1$ die Behauptung (7.29) im Fall 1 trivial.

Fall 2 $F(x) > G(y)$

Dann folgt

$$imp_{\text{Gö}}(F(x), G(y)) = G(y),$$

also haben wir im Fall 2 zu zeigen, daß

$$S(x, y) \leqq G(y). \tag{7.30}$$

Wir unterscheiden die folgenden zwei Unterfälle

Fall 2.1 $F(x) \leqq S(x, y)$

Dann gilt

$$min(F(x), S(x, y)) = F(x),$$

also folgt aus (7.28), daß

$$F(x) \leqq G(y).$$

Diese Folgerung widerspricht Fall 2, also kann Fall 2.1 nicht eintreten.

Fall 2.2 $F(x) > S(x, y)$

Dann gilt

$$min(F(x), S(x, y)) = S(x, y),$$

also folgt aus (7.28), daß

$$S(x, y) \leqq G(y).$$

■

8. Fuzzy-IF-THEN-Regelbasen

8.1 Einleitung. Motivationen

Fuzzy-IF-THEN-Regelbasen wurden erstmals von L. A. Zadeh in [56] eingeführt, genauer untersucht und auf konkrete Beispiele angewendet. Anlaß war eine Analyse von komplexen Systemen und von Entscheidungsprozessen.

Was damit gemeint ist, erläutern wir an dem folgenden Beispiel.

Beispiel 8.1.1 Der Lok-Führer eines mit einer bestimmten Geschwindigkeit G fahrenden Zuges entdeckt zu einem bestimmten Zeitpunkt in einem Abstand A vor dem Zug auf den Schienen ein Hindernis. Er schätzt ein, daß die Nichtbeachtung dieses Hindernisses, also ein Auffahren, ein Unglück mit erheblichen Folgen bedeuten würde, somit entscheidet er zu bremsen, um den Zug bei einem gewissen (kleinen) Sicherheitsabstand vor dem Hindernis zum Stehen zu bringen.

Wie wird er handeln, d. h. welche Bremskraft K wird er wählen?

Wenn man den Lok-Führer bei seinen entsprechenden Handlungen beobachtet bzw. ihn befragt, wie er in der beschriebenen Situation handeln würde, könnte man daraus das folgende Regelsystem ableiten:

R_{11} Wenn A klein und G niedrig, so K mittel.

R_{21} Wenn A mittel und G niedrig, so K schwach.

R_{31} Wenn A groß und G niedrig, so K sehr schwach.

R_{12} Wenn A klein und G mittel, so K stark.

R_{22} Wenn A mittel und G mittel, so K mittel.

R_{32} Wenn A groß und G mittel, so K schwach.

R_{13} Wenn A klein und G hoch, so K sehr stark.

R_{23} Wenn A mittel und G hoch, so K stark.

R_{33} Wenn A groß und G hoch, so K mittel.

R_{14} Wenn A klein und G sehr hoch, so K voll.

R_{24} Wenn A mittel und G sehr hoch, so K sehr stark.

R_{34} Wenn A groß und G sehr hoch, so K stark.

Die angegebenen zwölf Regeln kann man sehr kompakt und übersichtlich durch die folgende Tabelle beschreiben:

		G			
		niedrig	mittel	hoch	sehr hoch
	klein	mittel	stark	sehr stark	voll
A	mittel	schwach	mittel	stark	sehr stark
	groß	sehr schwach	schwach	mittel	stark

Handelt ein Lok-Führer nach diesen Regeln, so

- wird er die Fahrgäste nicht durch **unnötig** starkes Bremsen erschrecken oder gar gefährden,
- ist jedoch nicht sicher, daß in jedem Fall ein Zusammenstoß vermieden wird, z. B. im Fall der Anwendung von R_{14}, weil eine größere Bremskraft als sie einer Vollbremsung entspricht, aus physikalischen Gründen nicht möglich ist.

Ferner kann man beobachten, daß verschiedene Lok-Führer, die nach demselben obigen Schema von Regeln handeln, im allgemeinen sehr verschiedene Bremsvorgänge „produzieren“, ja sogar, daß derselbe Lokführer bei wiederholtem Handeln nach dem obigen Schema bei gleichen Anfangsbedingungen seinen Zug auf sehr verschiedene Weise zum Stehen bringen wird.

Die Ursache dafür ist in der „unscharfen“ Bedeutung von Wörtern wie „klein“, „mittel“, „groß“, „niedrig“, „hoch“ usw. zu suchen, indem sie von verschiedenen Personen bzw. zu verschiedenen Zeitpunkten unterschiedlich interpretiert werden.

Will man den diskutierten Bremsvorgang nicht durch einen Menschen, sondern durch einen Rechner steuern lassen, muß man — wenn man die „Philosophie“ der klassischen („scharfen“) Steuer- und Regeltechnik anwendet — folgendermaßen vorgehen:

Man mißt den Abstand A und die Geschwindigkeit G, erhält also die „scharfen“ Werte A und G, wobei natürlich beide Werte mit gewissen Fehlern behaftet sein können.

Ferner müssen wir eine scharfe Funktion f bestimmen, die uns in der Form

$$K = f(A, G)$$

die scharfe Größe K der anzuwendenden Bremskraft liefert.

Schließlich ist f auf einem gegebenen Rechner zu realisieren.

Nun ist aber die Bestimmung und Berechnung von f im Sinne der „klassischen“ Philosophie der Steuer- und Regeltechnik häufig mit großen Schwierigkeiten verbunden, weil sie in vielen Fällen extrem nicht-linear ist, eventuell auch nicht differenzierbar, ja nicht einmal stetig ist, also die „klassische“ Analysis, etwa in Form der Theorien der Differential- und Integralgleichungen einschließlich der dazugehörigen numerischen Verfahren, teilweise oder vollständig versagt.

Aus diesen Schwierigkeiten hat L. A. Zadeh in der Arbeit [56] einen Ausweg gezeigt, den man ohne Übertreibung als völlig neu und als genial bezeichnen kann. Bekannt war schon früher, daß in den Anwendungen eine hinreichend gute Approximation $\bar{f}$ der „exakten“ Lösung f dasselbe zu leisten vermag.

Neu war jedoch, daß man f oder $\bar{f}$ durch ein Verfahren bestimmen kann, das von den Verfahren, die aus der klassischen (scharfen!) Steuer- und Regeltechnik bekannt sind, völlig verschieden ist, nämlich durch die Aufstellung einer Fuzzy-IF-THEN-Regelbasis und deren Auswertung, wobei „Auswertung“ noch präzise zu definieren ist.

Die seit etwa 1980 wachsenden Anwendungen des Zadehschen Konzepts bis hin zu marktfähigen Produkten mit hervorragenden Eigenschaften — insbesondere in Japan — zeigen die Fruchtbarkeit des Zadehschen Konzepts.

Bevor wir die ZADEHschen Ideen und die damit verbundenen Begriffsbildungen und Zielstellungen ausführlich diskutieren, wollen wir — von Beispiel 8.1.1 ausgehend — den Begriff der Fuzzy-IF-THEN-Regelbasis auf eine bestimmte Normalform reduzieren, um auf diese Weise eine bessere Übersichtlichkeit zu gewinnen.

Grundlegend dafür ist der Begriff der linguistischen Variablen, den wir bereits in Kapitel 7.1 definiert haben. In Beispiel 8.1.1 haben wir drei linguistische Variablen, nämlich

A: Abstand

G: Geschwindigkeit

K: Bremskraft.

Jeder linguistischen Variablen ist eine Menge von Konstanten (im Sinne der Logik) zugeordnet, die linguistische Terme genannt werden, weil sie häufig einer (natürlichen) Sprache entnommen sind.

In unserem Beispiel sind das

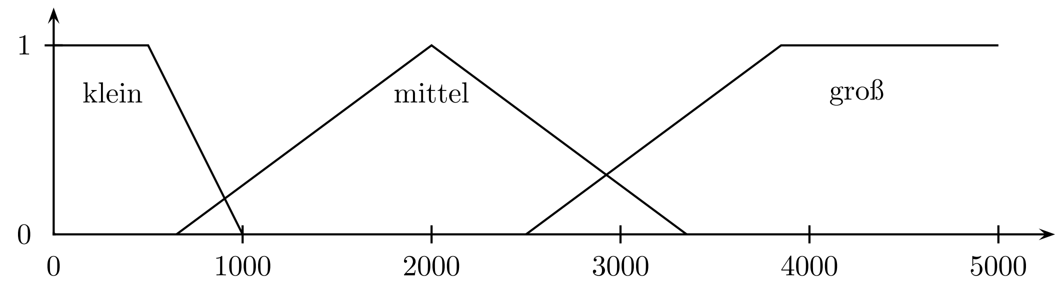
$$\begin{aligned} A &\sim \{\text{klein}, \text{mittel}, \text{groß}\} \\ G &\sim \{\text{niedrig}, \text{mittel}, \text{hoch}, \text{sehr hoch}\} \\ K &\sim \{\text{sehr schwach}, \text{schwach}, \text{mittel}, \text{stark}, \text{sehr stark}, \text{voll}\} \end{aligned}$$

Als nächstes wird eine Interpretation vorgenommen, indem jeder linguistischen Variablen X ein Universum U_X sowie jedem linguistischen Term T, der zu X gehört, eine Fuzzy-Menge F_T über U_X zugeordnet wird.

Zur Veranschaulichung betrachten wir die linguistische Variable A.

Wir wählen $U_A =_{def} \langle 0, 5000 \rangle$, wobei $\langle 0, 5000 \rangle$ das abgeschlossene Intervall aller reellen Zahlen r mit $0 \leqq r \leqq 5000$ bezeichnet und als Einheit das Meter gewählt wird.

Die den linguistischen Termen „klein“, „mittel“ und „groß“ zugeordneten Fuzzy-Mengen über U_A kann man der folgenden Tabelle entnehmen.



Sehr wichtig ist zu bemerken, daß die zu wählende (bzw. die gewählte) Interpretation sehr stark von dem zu betrachtenden Anwendungsproblem abhängt. So werden U_A sowie die obige Tabelle ganz anders aussehen, wenn es sich nicht um die Beschreibung des Bremsverhaltens eines Lok-Führers, sondern eines Autofahrers oder gar eines Radfahrers handelt.

Die Aussage, daß der Abstand A klein ist, wird bei ZADEH in der Form

„*A is klein*“

ausgedrückt. Damit äquivalent und logisch etwas klarer schreibt man häufig

„$A = \textit{klein}$“.

Wir leiten nun aus unserem Beispiel eine für die folgenden Betrachtungen hinreichend allgemeine Form einer Fuzzy-IF-THEN-Regelbasis ab.

Gegeben seien die linguistischen Variablen

$$X_1, \ldots, X_m \qquad (m \geqq 1)$$

und

$$Y_1, \ldots, Y_n \qquad (n \geqq 1).$$

Wir legen fest, daß

- zu X_μ die linguistischen Terme $T_{\mu 1}, \ldots, T_{\mu n}$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ gehören sowie
- zu Y_ν der linguistische Term T'_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ zugeordnet ist.

Eine häufig betrachtete Form einer Fuzzy-IF-THEN-Regelbasis ist dann die folgende:

$$\begin{array}{ll} \mathit{IF}\ X_1 = T_{11}\ \mathit{and} \ldots \mathit{and}\ X_m = T_{m1}\ & \mathit{THEN}\ Y_1 = T'_1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathit{IF}\ X_1 = T_{1n}\ \mathit{and} \ldots \mathit{and}\ X_m = T_{mn}\ & \mathit{THEN}\ Y_n = T'_n. \end{array}$$

Betrachtet man eine einzelne Regel, etwa

$$R_\nu : \mathit{IF}\ X_1 = T_{1\nu}\ \mathit{and} \ldots \mathit{and}\ X_m = T_{m\nu}\ \mathit{THEN}\ Y_\nu = T'_\nu,$$

so heißt der Ausdruck

$$X_1 = T_{1\nu}\ \mathit{and} \ldots \mathit{and}\ X_m = T_{m\nu}$$

IF-Part oder Prämisse von R_ν, dementsprechend heißt

$$Y_\nu = T'_\nu$$

THEN-Part oder Konklusion von R_ν.

Wir weisen darauf hin, daß die Prämisse von R_ν mit Hilfe der logischen Verknüpfung *and* aus „elementaren“ Ausdrücken der Form

$$X_i = T_{ij}$$

zusammengesetzt ist. Dementsprechend kann man auch Zusammensetzungen mit Hilfe von *or* bzw. *not* betrachten, d. h. als Prämissen können „BOOLEsche“ Ausdrücke auftreten, die beginnend mit Elementarausdrücken der Form $X_i = T_{ij}$ unter Verwendung von *and*, *or* und *not* aufgebaut sind.

Um die Anwendung einer Fuzzy-IF-THEN-Regelbasis auf eine korrekte wissenschaftliche Grundlage zu stellen, muß eine semantische Interpretation an die Spitze gestellt werden. Dies bedeutet, daß einer zusammengesetzten Prämisse, z. B.

$$X_1 = T_{1\nu}\ \mathit{and} \ldots \mathit{and}\ X_m = T_{m\nu},$$

eine Fuzzy-Menge F_ν zugeordnet wird, die aus den Fuzzy-Mengen

$$F_{1\nu}, \ldots, F_{m\nu},$$

die als Interpretation der linguistischen Terme

$$T_{1\nu}, \ldots, T_{m\nu}$$

auftreten, durch eine *and*-Verbindung errechnet wird.

8.2 Interpretation von Fuzzy-IF-THEN-Regelbasen. Die Prinzipien FATI und FITA

Wir betrachten eine fixierte Fuzzy-IF-THEN-Regelbasis der Form

$$RB: \quad \begin{array}{c} \mathit{IF}\ F_1\ \mathit{THEN}\ G_1 \\ \vdots \\ \mathit{IF}\ F_n\ \mathit{THEN}\ G_n, \end{array}$$

wobei $n \geqq 1$ und $F_1, \ldots, F_n, G_1, \ldots, G_n$ Fuzzy-Mengen über dem (gemeinsamen) Universum U sind.

Zur Interpretation von RB fixieren wir ein $(3n+4)$-Tupel $\mathfrak{J}$ der Form

$$\mathfrak{J} = [\pi_1, \ldots, \pi_n, \kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_n, Q_0, Q_1, \ldots, Q_n, \alpha, \beta]\,,$$

wobei

1. $\pi_1, \ldots, \pi_n, \kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_n : \langle 0,1\rangle^2 \rightarrow \langle 0,1\rangle$
2. $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n : \mathfrak{P}\langle 0,1\rangle \rightarrow \langle 0,1\rangle$
3. $\alpha, \beta : \langle 0,1\rangle^n \rightarrow \langle 0,1\rangle$.

In Verallgemeinerung der Terminologie, die wir in Kapitel 7 eingeführt haben, nennen wir $\pi_1, \ldots, \pi_n$ Implikationen, $\kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_n$ Kombinationsfunktionen, $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ (reelle) Quantoren sowie α, β Aggregationsfunktionen.

Die Interpretation einer Fuzzy-IF-THEN-Regelbasis auf der Grundlage eines gegebenen $(3n+4)$-Tupels wird durch die folgenden drei Schritte definiert:

Schritt 1. Interpretation der einzelnen Fuzzy-IF-THEN-Regeln der Form

$$\mathit{IF}\ F_i\ \mathit{THEN}\ G_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Unter Verwendung der Funktion π_i definieren wir eine binäre Fuzzy-Relation S_i über U wie folgt:

$$S_i(x,y) =_{def} \pi_i(F_i(x), G_i(y)) \qquad (x, y \in U).$$

Wir sagen, daß die „Implikationsfunktion π_i die Regel *IF* F_i *THEN* G_i interpretiert“, wobei zu bemerken ist, daß S_i nicht allein durch π_i, sondern auch durch F_i und G_i festgelegt ist.

Wir unterstreichen, daß bei unserem (sehr allgemeinen) Ansatz jede Regel ihre eigene („individuelle“) Interpretation haben kann, im Gegensatz zu manchen Anwendungen, wo $\pi_1 = \cdots = \pi_n$ gilt, also eine universelle Interpretation der Regeln vorliegt.

Wir haben die vorgelegte Verallgemeinerung aber insbesondere aus der Sicht der Anwendungen vorgenommen, um auch solche Fälle zu erfassen, wo mit „gewichteten“ Regeln gearbeitet wird.

Wir weisen ferner darauf hin, daß wir auf der vorliegenden Stufe unserer Betrachtungen noch keine speziellen Eigenschaften für die Funktionen π_i fordern; dies wird erst bei Formulierung und Beweis der folgenden Theoreme sowie bei der Diskussion der folgenden Beispiele der Fall sein.

Die Schritte 2 und 3 hängen davon ab, ob wir das Prinzip FATI oder das Prinzip FITA befolgen. Wir kürzen ab

FATI $=_{def}$ **F**irst **A**ggregation **T**hen **I**nference

FITA $=_{def}$ **F**irst **I**nference **T**hen **A**ggregation.

Wir beschreiben als erstes FATI.

Schritt 2 (FATI). Dieser Schritt besteht darin, daß man die im Schritt 1 definierten n binären Fuzzy-Relationen $S_1, \ldots, S_n$ zu einer „Superrelation“ S aggregiert, und zwar durch Verwendung der „Aggregationsfunktion“ α. Wir definieren:

$$S(x,y) =_{def} \alpha(S_1(x,y), \ldots, S_n(x,y)) \qquad (x, y \in U).$$

Analog zum Schritt 1 werden zunächst keinerlei Voraussetzungen an die Funktion α gestellt; solche gehen erst in die Formulierung bestimmter Theoreme ein. Wir wollen jedoch schon hier kritisch erwähnen, daß von manchen Autoren die Meinung vertreten wird (siehe z. B. [44]), daß als Aggregationsfunktionen nur die Minimum-Funktion und die Maximum-Funktion zugelassen werden dürfen. Wir lehnen diese Einschränkung ab, weil sie nach unserer Auffassung die Anwendbarkeit des Ansatzes zu stark beschränkt.

Schritt 3 (FATI). Bezüglich der gegebenen Interpretation $\mathfrak{J}$ definieren wir nun den durch die Fuzzy-IF-THEN-Regelbasis RB festgelegten Funktionaloperator $FATI_{\mathfrak{J}}^{RB}$, indem wir aus einer gegebenen Fuzzy-Menge F mit Hilfe der „Superrelation“ S, der Kombinationsfunktion κ_0 und des Quantors Q_0 eine neue Fuzzy-Menge durch das Schema der Compositional Rule of Inference herleiten.

Somit definieren wir für $y \in U$:

Definition 8.2.1
$FATI_{\mathfrak{J}}^{RB}(F)(y) =_{def} Q_0 \{\kappa_0(F(x), S(x,y)) \,|\, x \in U\}$

Setzt man hier die Definition von S im zweiten Schritt ein, erhält man für $FATI_{\mathfrak{J}}^{RB}$ die Darstellung

$$FATI_{\mathfrak{J}}^{RB}(F)(y) =_{def} Q_0 \{\kappa_0(F(x), \alpha(S_1(x,y), \ldots, S_n(x,y))) \,|\, x \in U\}.$$

Löst man auch noch die im ersten Schritt erfolgte Definition der Relationen $S_1, \ldots, S_n$ auf, erhält man die folgende „explizite“ Form (d. h. die ohne Benutzung von definierten Symbolen formulierte Form) von $FATI_{\mathfrak{J}}^{RB}$ wie folgt:

$$FATI_{\mathfrak{J}}^{RB}(F)(y) =_{def} Q_0 \{\kappa_0(F(x), \alpha(\pi_1(F_1(x), G_1(y)), \ldots, \pi_n(F_n(x), G_n(y)))) \,|\, x \in U\}.$$

Zur Definition des Operators $FITA_{\mathfrak{J}}^{RB}$ vertauschen wir die Schritte 2 und 3 wie folgt:

Schritt 2 (FITA). Gegeben sei wieder eine Fuzzy-Menge F über U. Aus F leiten wir zunächst mit der „lokalen“ Relation S_i sowie der „lokalen“ Kombinationsfunktion κ_i und dem „lokalen“ Quantor Q_i die „lokale“ Fuzzy-Menge H_i ab, und zwar wieder nach dem Rechenschema der Compositional Rule of Inference, d. h. wir setzen für $y \in U$

$$H_i(y) =_{def} Q_i \{\kappa_i(F(x), S_i(x,y)) \,|\, x \in U\}.$$

Nach Elimination der Definition von S_i erhalten wir somit für $y \in U$:

$$H_i(y) =_{def} Q_i \{\kappa_i(F(x), \pi_i(F_i(x), G_i(y))) \,|\, x \in U\}.$$

Schritt 3 (FITA). Aus den „lokalen“ Resultaten $H_1, \ldots, H_n$ leiten wir durch Aggregation mit Hilfe der Funktion β das „globale“ Resultat H ab, indem wir für $y \in U$ setzen:

$$H(y) =_{def} \beta(H_1(y), \ldots, H_n(y)).$$

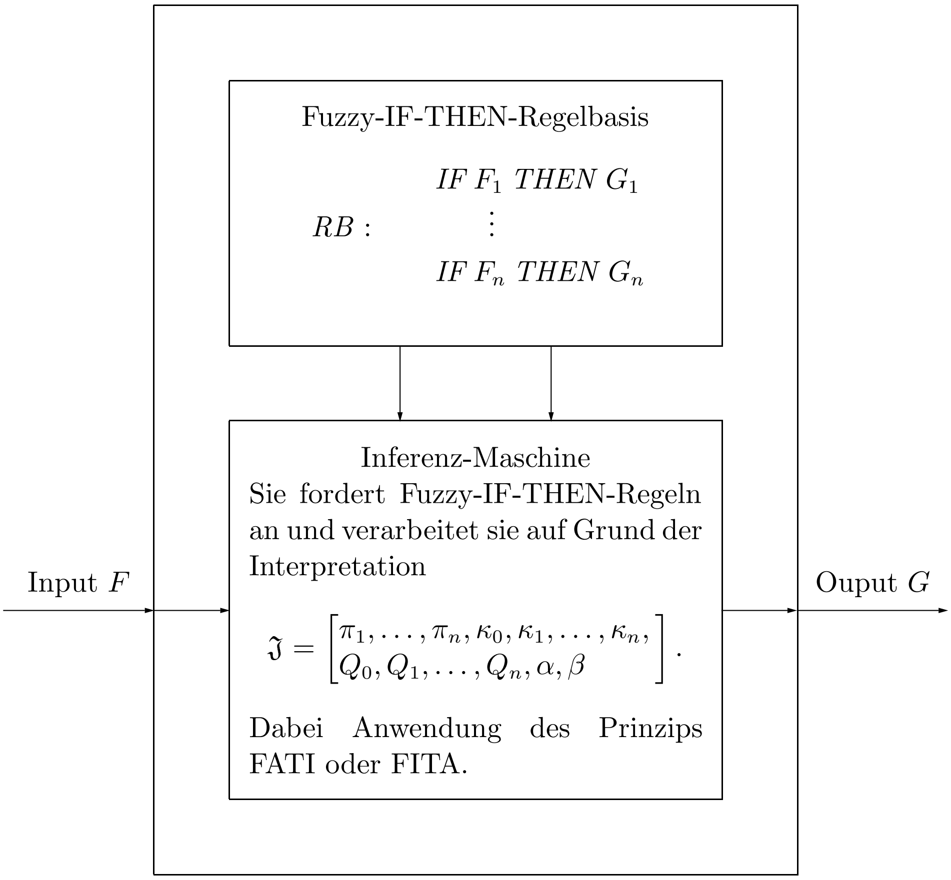
Somit definieren wir $FITA_{\mathfrak{J}}^{RB}$ wie folgt:

Definition 8.2.2
$FITA_{\mathfrak{J}}^{RB}(F)(y) =_{def} \beta(H_1(y), \ldots, H_n(y))$

Eliminiert man in der obigen Definition von $FITA_{\mathfrak{I}}^{RB}(F)(y)$ in Analogie zu $FATI_{\mathfrak{I}}^{RB}(F)$ sukzessive die eingeführten Definitionen, erhält man die folgende Kette von Gleichungen für $y \in U$:

$$\begin{aligned}
&FITA_{\mathfrak{I}}^{RB}(F)(y)\\
&= \beta\left(H_1(y), \ldots, H_n(y)\right)\\
&= \beta\left(Q_1\left\{\kappa_1(F(x), S_1(x,y)) \,|\, x \in U\right\}, \ldots, Q_n\left\{\kappa_n(F(x), S_n(x,y)) \,|\, x \in U\right\}\right)\\
&= \beta\begin{pmatrix} Q_1\left\{\kappa_1(F(x), \pi_1(F_1(x), G_1(y))) \,|\, x \in U\right\}, \ldots, \\ Q_n\left\{\kappa_n(F(x), \pi_n(F_n(x), G_n(y))) \,|\, x \in U\right\} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Zum Schluß dieses Kapitels 8.2 wollen wir den Block eines Fuzzy-Controllers, der die Funktionaloperatoren $FATI_{\mathfrak{I}}^{RB}$ bzw. $FITA_{\mathfrak{I}}^{RB}$ realisiert, durch ein Bild genauer beschreiben:



Probleme

1. Welches Prinzip ist günstiger (besser), FATI oder FITA?
2. Unter welchen Bedingungen liefern FATI und FITA dasselbe Resultat?
3. Gibt es noch andere Möglichkeiten, einen Funktionaloperator Φ zu bestimmen, der die Bedingungen

$$\begin{gathered}
\Phi(F_1) = G_1\\
\vdots\\
\Phi(F_n) = G_n
\end{gathered}$$

erfüllt?

Zum ersten Problem können wir auf der erreichten Stufe der Untersuchung zunächst nur anschaulich-heuristisch argumentieren. Unmittelbar ist klar, daß die rechnerische Durchführung einer Inferenzprozedur der Form

$$Q_i \{\kappa_i(F(x), S_i(x,y)) \,|\, x \in U\}$$

mit Schwierigkeiten verbunden sein kann. Auf Grund der vorliegenden Formel muß als erster Schritt für jedes $x \in U$ der Term

$$\kappa_i(F(x), S_i(x,y))$$

berechnet werden. Ist U unendlich, ist dies in der Regel unmöglich; ist dagegen U endlich, aber sehr groß, kann ein Rechenaufwand anfallen, der auch mit sehr schnellen Rechnern nicht bewältigt werden kann. Arbeitet man mit dem Prinzip FATI, hat man den „Aggregationsterm"

$$S_0(x,y) = \alpha(S_1(x,y), \ldots, S_n(x,y))$$

zu berechnen und danach die (problematische) Inferenzprozedur

$$Q_0 \{\kappa_0(F(x), S_0(x,y)) \,|\, x \in U\}$$

(nur einmal) durchzuführen. Wendet man das Prinzip FITA an, muß man n Inferenzprozeduren

$$Q_i \{\kappa_i(F(x), S_i(x,y)) \,|\, x \in U\}$$

($i = 1, \ldots, n$) durchführen. Dies wird, insbesondere bei einem großen n, ein erheblich höherer Aufwand sein, wobei in der Regel der weitere Aufwand, der durch die Aggregation dieser Zwischenresultate entsteht, nicht wesentlich ins Gewicht fällt.

Somit könnte man denken, daß die Verwendung von FATI generell günstiger ist als die von FITA. Dem ist nicht so! Wie wir später sehen werden, ist die Frage, ob ein definierter Operator bestimmte (wichtige!) Eigenschaften erfüllt, für Operatoren der Form $FITA^{RB}_{\mathfrak{I}}$ im allgemeinen wesentlich einfacher und leichter zu beantworten als für Operatoren der Form $FATI^{RB}_{\mathfrak{I}}$.

Mit dieser Feststellung wird man auf das zweite Problem geführt, nämlich zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die beschriebenen Operatoren dasselbe Resultat liefern. Hierzu verweisen wir auf das folgende Kapitel 8.3.

8.3 Zur Äquivalenz von FATI und FITA

Wir wollen uns jetzt mit dem Problem der Äquivalenz von FATI und FITA beschäftigen.

Dazu beschäftigen wir uns zunächst mit einem Spezialfall, der auch in vielen Anwendungen eine wichtige Rolle spielt.

Gegeben sei ein fixiertes $x_0 \in U$. Wir erinnern an die Definition der von x_0 festgelegten „scharfen" Fuzzy-Menge F_{x_0} über U, nämlich

$$F_{x_0}(x) =_{def} \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \neq x_0 \\ 1 & \text{, falls } x = x_0 \end{cases} \qquad (x \in U).$$

Als Fuzzifizierer φ wählen wir

$$\varphi(x_0) =_{def} F_{x_0} \qquad (x_0 \in U).$$

Dann folgt für die definierten Funktionaloperatoren $FATI^{RB}_{\mathfrak{I}}$ und $FITA^{RB}_{\mathfrak{I}}$ das folgende

Theorem 8.3.1
Wenn

1. $\kappa_i(0,s) = 0$ *für jedes* $i \in \{0,1,\ldots,n\}$,
2. $\kappa_i(1,s) = s$ *für jedes* $i \in \{0,1,\ldots,n\}$,
3. $Q_i\{r,0\} = r$ *für jedes* $i \in \{0,1,\ldots,n\}$,
4. $\alpha = \beta$,

so gilt für alle $x_0, y \in U$*:*

1. $FATI^{RB}_{\mathfrak{J}}(F_{x_0})(y) = \alpha(S_1(x_0,y),\ldots,S_n(x_0,y))$
2. $FITA^{RB}_{\mathfrak{J}}(F_{x_0})(y) = \beta(S_1(x_0,y),\ldots,S_n(x_0,y))$
3. $FATI^{RB}_{\mathfrak{J}}(F_{x_0})(y) = FITA^{RB}_{\mathfrak{J}}(F_{x_0})(y)$.

Beweis
Für alle $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
& Q_i\left\{\kappa_i(F_{x_0}(x), S_i(x,y))\,|\,x \in U\right\} \\
&= Q_i\begin{pmatrix}\{\kappa_i(F_{x_0}(x_0), S_i(x_0,y))\} \cup \\ \{\kappa_i(F_{x_0}(x), S_i(x,y))\,|\,x \in U \wedge x \neq x_0\}\end{pmatrix} \\
&= Q_i\begin{pmatrix}\{\kappa_i(1, S_i(x_0,y))\} \cup \\ \{\kappa_i(0, S_i(x,y))\,|\,x \in U \wedge x \neq x_0\}\end{pmatrix} && \text{(nach Definition von } F_{x_0}\text{)} \\
&= Q_i\left(\{S_i(x_0,y)\} \cup \{0\}\right) && \text{(nach Voraussetzungen 1 und 2)} \\
&= S_i(x_0,y) && \text{(nach Voraussetzung 3)}
\end{aligned}$$

ad 1. Nach Definition von $FATI^{RB}_{\mathfrak{J}}$ haben wir

$$FATI^{RB}_{\mathfrak{J}}(F_{x_0})(y) = Q_0\left\{\kappa_0(F_{x_0}(x), S_0(x,y))\,|\,x \in U\right\}, \tag{8.1}$$

also

$$= S_0(x_0,y),$$

somit nach Definition von S_0

$$= \alpha(S_1(x_0,y),\ldots,S_n(x_0,y))$$

ad 2. Nach Definition von $FITA^{RB}_{\mathfrak{J}}$ haben wir

$$\begin{aligned}
FITA^{RB}_{\mathfrak{J}}(F_{x_0})(y) &= \beta\begin{pmatrix}Q_1\left\{\kappa_1(F_{x_0}(x), S_1(x,y))\,|\,x \in U\right\},\ldots, \\ Q_n\left\{\kappa_n(F_{x_0}(x), S_n(x,y))\,|\,x \in U\right\}\end{pmatrix} \\
&= \beta(S_1(x_0,y),\ldots,S_n(x_0,y))
\end{aligned} \tag{8.2}$$

ad 3. Aussage 3 folgt aus den Behauptungen 1 und 2 sowie Voraussetzung 4.

■

Bemerkungen (zu Theorem 8.3.1)

1. Die Voraussetzungen 1 und 2 sind für κ_i erfüllt, falls κ_i eine T-Norm, z. B. die Minimum-Funktion ist.

2. Die Voraussetzung 3 ist für Q_i erfüllt, falls Q_i der Supremum-Operator in $\langle 0, 1\rangle$ ist.

3. Es ist sehr wichtig zu bemerken, daß Theorem 8.3.1 unabhängig von der Interpretation der Regeln *IF* F_i *THEN* G_i durch die Funktionen π_i gilt. So kann z. B. jede Regel individuell interpretiert werden, etwa durch Verwendung von „Gewichten".

4. Wir stellen fest, daß die Äquivalenzaussage von Theorem 8.3.1 sich nicht auf die volle Fuzzy-Potenzmenge $\mathfrak{F}(U)$, sondern auf die Menge $\mathcal{F} = \{F_{x_0} | x_0 \in U\}$ der „scharfen" Fuzzy-Mengen F_{x_0} über U bezieht.

Bemerkung 4 führt uns auf die folgende Definition, wobei $\mathcal{F} \subseteqq \mathfrak{F}(U)$ fixiert ist.

Definition 8.3.1
$FATI_{\mathfrak{I}}^{RB}$ *und* $FITA_{\mathfrak{I}}^{RB}$ *sind äquivalent bezüglich* $\mathcal{F}$
$=_{def} \forall F(F \in \mathcal{F} \rightarrow FATI_{\mathfrak{I}}^{RB}(F) = FITA_{\mathfrak{I}}^{RB}(F))$

Beispiel 8.3.1 In diesem Beispiel diskutieren wir den „klassischen" Mamdani-Controller (siehe [?]).

Wir wählen

1. $\pi_1 = \cdots = \pi_n = min$,

2. $\kappa_0 = \kappa_1 = \cdots = \kappa_n = min$,

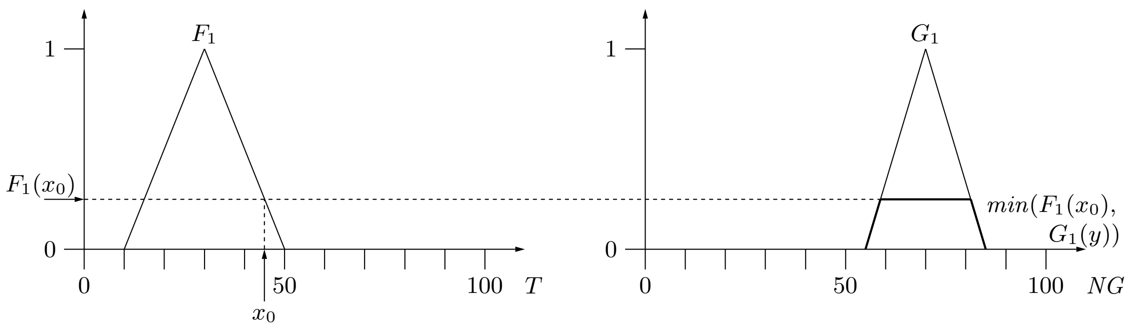
3. $Q_0 = Q_1 = \cdots = Q_n = Sup$,

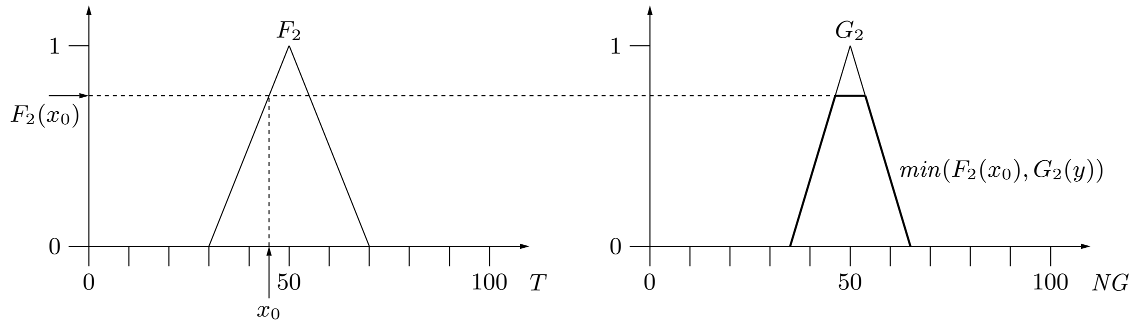
4. $\alpha = \beta = max$.

Wir betrachten die Fuzzy-IF-THEN-Regelbasis

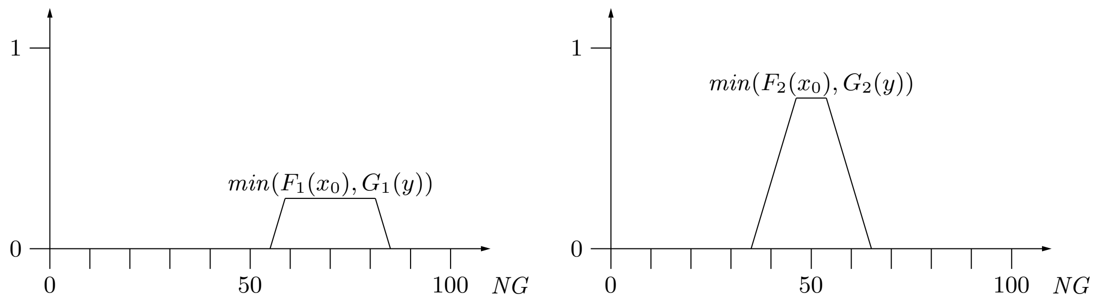
$$RB : \quad \begin{array}{l} IF\ F_1\ THEN\ G_1 \\ IF\ F_2\ THEN\ G_2 \end{array},$$

wobei F_1 und F_2 linguistische Terme zur linguistischen Variablen T (Temperatur) und G_1 und G_2 linguistische Terme zur linguistischen Variablen NG (Erdgaszuführung in Volumen pro Sekunde) sind und beide linguistischen Variablen sich auf dasselbe Universum $\mathbb{R}^+$ (Menge der nicht-negativen reellen Zahlen) beziehen. Die IF-THEN-Regeln sind durch die folgende Zeichnung gegeben:



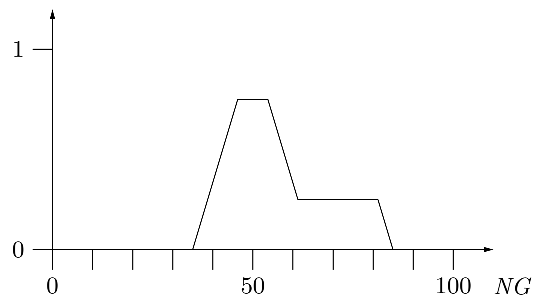


Dann erhalten wir



und schließlich

$$FITA_{\mathfrak{J}}^{RB}(F_{x_0})(y) = G(y) = max(min(F_1(x_0), G_1(y)), min(F_2(x_0), G_2(y)))$$



9. Clusteranalyse. Pattern Recognition

9.1 Einleitung. Motivationen

In seinem im Jahre 1981 erschienenen Buch [8] beschreibt James C. Bezdek das Gebiet „Pattern Recognition“ als

“The Search for Structure in Data Sets or Samples”.

Wir stimmen durchaus mit Bezdek überein, wenn wir diese Formulierung zur Beschreibung des (umfangreicheren) Gebietes „Clusteranalyse“ übernehmen. Allerdings sind wir der Meinung, daß die obige Formulierung einiger Ergänzungen bedarf, wodurch wir auf das „strukturelle Grundproblem der Clusteranalyse“ geführt werden.

Ausgangspunkt ist wieder ein fixiertes Universum U. Die Elemente $x \in U$ sollen nun „klassifiziert“, d. h. zu „Clustern“ zusammengefaßt werden. Demgemäß definieren wir:

Definition 9.1.1

1. *C ist ein scharfer bzw. unscharfer Cluster über U*
   $=_{def}$ *C ist eine scharfe bzw. unscharfe Teilmenge aus U, d. h. es gilt $C \subseteqq U$ bzw. $C : U \to \langle 0, 1\rangle$.*

2. *$\mathfrak{C}$ ist eine Clusterung (aus scharfen bzw. unscharfen Clustern) über U*
   $=_{def}$ *$\mathfrak{C}$ ist eine (scharfe) Menge von scharfen bzw. unscharfen Clustern über U.*

Man beachte, daß $\mathfrak{C}$ selbst eine scharfe Menge ist. Den allgemeineren Fall, daß $\mathfrak{C}$ sogar unscharf ist, d. h. eine Abbildung

$$\mathfrak{C} : \mathfrak{P}(U) \to \langle 0, 1\rangle$$

bzw.

$$\mathfrak{C} : \mathfrak{F}(U) \to \langle 0, 1\rangle$$

ist, betrachten wir nicht.

Wir unterstreichen, daß wir durch die obige Definition ein sehr allgemeines Konzept von „Cluster“ und „Clusterung“ gewählt haben, entsprechend dem Prinzip, die fundamentalen Begriffsbildungen möglichst allgemein zu wählen, um Schwierigkeiten, die durch einen zu speziellen Ansatz entstehen könnten, von vornherein auszuschalten.

Zur weiteren Diskussion gehen wir von der folgenden grundlegenden Annahme, an deren Zulässigkeit wohl kaum Zweifel bestehen können, aus:

Cluster über U werden auf Grund von „Ähnlichkeiten“ zwischen Elementen $x, y \in U$ definiert und schließlich konstruiert. Dabei bedarf die Frage, was „Ähnlichkeiten“ zwischen

x und y aus U sind, einer Präzisierung und exakten Beantwortung, andernfalls beruhen die weiteren entsprechenden Definitionen, Sätze und Algorithmen auf keiner sicheren Grundlage.

Als Beispiele für „Ähnlichkeiten" kann man gemeinsame Eigenschaften von Elementen x und y aus U nennen, etwa daß x und y gerade Zahlen sind, falls U die Menge der natürlichen Zahlen ist. Ist U zum Beispiel ein metrischer Raum mit dem auf $U \times U$ definierten Abstandsbegriff ρ, so kann man eine reelle Zahl $\varepsilon_0 > 0$ fixieren und Elemente $x, y \in U$ ähnlich nennen, falls $\rho(x, y) \leqq \varepsilon_0$ ist.

Wiederum folgend dem Prinzip, daß man sich durch zu spezielle Konzepte eventuell den Weg für fruchtbare theoretische Untersuchungen und für umfassende Anwendungen verbauen kann, gehen wir für die folgenden Betrachtungen von einer sehr abstrakten und sehr allgemeinen Fassung des Ähnlichkeitsbegriffes aus. Dazu sei eine beliebige binäre scharfe Relation R über U, d. h. $R \subseteqq U \times U$, gegeben. Außerdem sei S eine beliebige binäre Fuzzy-Relation über U, d. h. $S : U \times U \to \langle 0, 1\rangle$. Schließlich sei eine reelle Zahl $\varepsilon_0 \in \langle 0, 1\rangle$ fixiert. Wir definieren dann für $x, y \in U$:

Definition 9.1.2

1. *Die Elemente x und y heißen R-ähnlich*
   $=_{def}$ $[x, y] \in R$.

2. *Die reelle Zahl $S(x, y)$ heiße **S-Ähnlichkeitsgrad** von x und y.*

3. *Die Elemente x und y heißen S-ε_0-ähnlich*
   $=_{def}$ $S(x, y) \geqq \varepsilon_0$.

4. *Die Elemente x und y heißen S-ε_0-scharf-ähnlich*
   $=_{def}$ $S(x, y) > \varepsilon_0$.

Von diesem sehr allgemeinen Ansatz ausgehend, werden wir uns in den folgenden Betrachtungen und Untersuchungen dem „intuitiven" (oder „anschaulichen") Ähnlichkeitsbegriff annähern, indem wir für die Relationen R bzw. S bestimmte Eigenschaften fordern, etwa Reflexivität, Symmetrie, Transitivität.

Im Rahmen der bisher diskutierten Begriffsbildungen beschreiben wir nun das

strukturelle Grundproblem der Clusteranalyse

wie folgt, zunächst jedoch noch heuristisch und mathematisch noch nicht ausreichend präzisiert:

> Bestimmte wohldefinierte Mengen von binären scharfen oder unscharfen Relationen über U sind zu bestimmten wohldefinierten Clusterungen über U in eine eineindeutige Beziehung zu setzen.

Das oben formulierte Grundproblem der Clusteranalyse läßt sich in eine Reihe von Teilproblemen zerlegen, die einer mathematischen Präzisierung leichter zugänglich sind, wie wir im folgenden zeigen werden.

Grundproblem 1. Gegeben sei eine Menge REL von scharfen bzw. unscharfen binären Relationen über U. Wir nennen die Relationen aus REL „Ähnlichkeitsrelationen" über U (ohne daß wir zunächst bestimmte Zusatzforderungen stellen) und bezeichnen sie demgemäß mit $\ddot{A}$.

Wir suchen nun eine Abbildung Γ mit

$$\Gamma : REL \to CLUST(U),$$

wobei wir für $\ddot{A} \in REL$ das Γ-Bild $\Gamma\left(\ddot{A}\right)$ „die durch Γ aus der Relation $\ddot{A}$ erzeugte Clusterung über U" nennen.

Ohne zusätzliche Forderungen an Γ kann man eine solche Abbildung Γ stets trivial wie folgt definieren:

Man fixiert eine beliebige Clusterung $\mathfrak{C}_0$ über U und definiert Γ dann für jedes $\ddot{A} \in REL$ wie folgt:

$$\Gamma\left(\ddot{A}\right) =_{def} \mathfrak{C}_0.$$

Diese Prozedur erfaßt jedoch nicht das, was man in der Clusteranalyse für die Erzeugung von Clusterungen durch binäre Relationen fordern muß, nämlich, daß beim Übergang von $\ddot{A}$ zu $\Gamma\left(\ddot{A}\right)$ die in $\ddot{A}$ codierte Information nicht „verfälscht" werden bzw. nicht „verloren gehen" darf. Hierbei bedeutet das Wort „Information" allerdings nicht die wahrscheinlichkeitstheoretisch definierte Information im Sinne von Shannon [38], eher ist hier an „strukturelle" Information zu denken, wie sie etwa Kolmogorov [25] definiert hat. Diese Forderung ist am einfachsten dadurch zu erfüllen, daß man die eindeutige Umkehrbarkeit der Abbildung Γ auf ihrem Definitionsbereich REL fordert, d. h., daß für jedes $\ddot{A}_1, \ddot{A}_2 \in REL$ gilt:

$$\text{Wenn } \Gamma\left(\ddot{A}_1\right) = \Gamma\left(\ddot{A}_2\right), \text{ so } \ddot{A}_1 = \ddot{A}_2.$$

Die oben gestellte Forderung kann man sehr einfach erfüllen, indem man das im folgenden formulierte Grundproblem 2 löst.

Grundproblem 2. Ohne daß wir „strukturelle" Information (in irgendeinem Sinne) korrekt definieren, können wir die oben gestellte Forderung, daß die in $\ddot{A}$ enthaltene Information nicht verfälscht werden bzw. verloren gehen darf, wie folgt erfüllen:

Es ist eine Abbildung Γ' mit folgenden Eigenschaften zu konstruieren:

1. $\Gamma' : \left\{\Gamma\left(\ddot{A}\right) \middle| \ddot{A} \in REL\right\} \to REL$
2. Γ' ist surjektiv für REL
3. $\Gamma'\left(\Gamma\left(\ddot{A}\right)\right) = \ddot{A}$ für alle $\ddot{A} \in REL$.

Existiert eine solche Abbildung Γ', so folgt, daß Γ und Γ' eindeutig umkehrbar sind. Außerdem sind Γ und Γ' zueinander invers und somit Bijektionen zwischen den Mengen REL und $\left\{\Gamma\left(\ddot{A}\right) \middle| \ddot{A} \in REL\right\}$.

Wir zeigen von diesen Behauptungen nur, daß Γ auf REL eindeutig umkehrbar ist.

Wir nehmen dazu für $\ddot{A}_1, \ddot{A}_2 \in REL$ an, daß

$$\Gamma\left(\ddot{A}_1\right) = \Gamma\left(\ddot{A}_2\right)$$

gilt. Durch Anwendung von Γ' erhält man daraus, daß

$$\Gamma'\left(\Gamma\left(\ddot{A}_1\right)\right) = \Gamma'\left(\Gamma\left(\ddot{A}_2\right)\right),$$

also auf Grund von Bedingung 3 für Γ'

$$\ddot{A}_1 = \ddot{A}_2.$$

Wir weisen ausdrücklich darauf hin, daß erst die Lösung des Grundproblems 2 und die daraus folgende eindeutige Umkehrbarkeit der Abbildung Γ den Beweis für die Korrektheit eines durch eine Abbildung $\Gamma : REL \to CLUST(U)$ definierten Clusterungsverfahrens darstellt. Leider wird in vielen Arbeiten zur Clusteranalyse dieses grundlegende Problem nicht behandelt oder — was noch viel schlimmer ist — gar nicht erkannt.

Grundproblem 3. Ist eine Menge REL von binären Relationen über U sowie eine Clusterabbildung

$$\Gamma : REL \rightarrow CLUST(U)$$

gegeben, so ist es sowohl für die Theorie als auch für die Anwendungen sehr wichtig, die Menge $\{\Gamma(\ddot{A}) \,|\, \ddot{A} \in REL\}$ „invariant“ zu beschreiben, d. h. hier ohne Rückgriff auf die Abbildung Γ. Wie die Betrachtungen in den folgenden Abschnitten zeigen, ist in manchen Fällen die Aufgabe ziemlich einfach lösbar (siehe z. B. in Theorem 9.2.1 als Partition), in anderen Fällen dagegen bereitet eine solche Charakterisierung größere Schwierigkeiten (siehe z. B. Definition **??** und Theorem **??**).

Grundproblem 4. Bei den bisher betrachteten drei Grundproblemen war der Ausgangspunkt ein Ähnlichkeitskonzept, gegeben durch eine binäre (scharfe bzw. unscharfe) Relation $\ddot{A}$ über U. Gerade in den Anwendungen zeigt sich nun, daß häufig eine Clusterung $\mathfrak{C}$ gegeben ist und man vor der Aufgabe steht, die Clusterung durch eine Ähnlichkeitsrelation $\ddot{A}$ zu charakterisieren. Als wichtiges Anwendungsbeispiel sei dazu auf die Menge der Prämissen einer Fuzzy-IF-THEN-Regelbasis hingewiesen, die offensichtlich eine Clusterung bildet.

Allgemeiner formuliert, läßt sich das Grundproblem 4 in Analogie zum Grundproblem 1 wie folgt formulieren.

Gegeben sei eine Menge $CLUST$ von Clusterungen $\mathfrak{C}$ über U, wobei die Elemente von $\mathfrak{C}$ scharfe bzw. unscharfe Mengen über U sind.

Wir bezeichnen durch $RELS(U)$ bzw. durch $RELUS(U)$ die Menge der binären scharfen bzw. unscharfen Relationen über U und setzen schließlich

$$REL(U) =_{def} RELS(U) \cup RELUS(U).$$

Wir suchen nun eine Abbildung P mit

$$P : CLUST \rightarrow REL(U),$$

wobei wir für $\mathfrak{C} \in CLUST$ das P-Bild $P(\mathfrak{C})$ „die durch P aus der Clusterung $\mathfrak{C}$ erzeugte binäre Relation über U“ nennen.

Analog zum Grundproblem 1 fordern wir, daß durch die Abbildung P die in $\mathfrak{C}$ steckende strukturelle Information nicht verfälscht wird und auch nicht verloren geht, d. h. wir verlangen, daß die Abbildung P auf $CLUST$ eindeutig umkehrbar ist.

Diese Forderungen können wir erfüllen, wenn wir in Analogie zum Grundproblem 2 das folgende Grundproblem lösen.

Grundproblem 5. Es ist eine Abbildung P' mit folgenden Eigenschaften zu konstruieren:

1. $P' : \{P(\mathfrak{C}) \,|\, \mathfrak{C} \in CLUST\} \rightarrow CLUST$
2. P' ist surjektiv für $CLUST$
3. $P'(P(\mathfrak{C})) = \mathfrak{C}$ für alle $\mathfrak{C} \in CLUST$.

Existiert eine solche Abbildung P', so folgt, daß P und P' eindeutig umkehrbar sind. Außerdem sind P und P' zueinander invers und Bijektionen zwischen den Mengen $CLUST$ und $\{P(\mathfrak{C}) \,|\, \mathfrak{C} \in CLUST\}$.

In Analogie zum Grundproblem 3 ergibt sich das folgende

Grundproblem 6. Ist eine Menge $CLUST$ von Clusterungen über U sowie eine Abbildung P zur Konstruktion von binären Relationen über U gegeben, d. h. gilt

$$P : CLUST \to REL(U),$$

so ist es auch in diesem Fall sowohl für die Theorie als auch für die Anwendungen wichtig, die Menge $\{P(\mathfrak{C}) \,|\, \mathfrak{C} \in CLUST\}$ der binären Relationen über U „invariant" zu charakterisieren, d. h. hier ohne Rückgriff auf die Abbildung P.

Zur Formulierung des nächsten Grundproblems erinnern wir an die Definition von $R_1 \subseteqq R_2$ bzw. $S_1 \subseteqq S_2$ für scharfe bzw. unscharfe binäre Relationen über U, nämlich

$$R_1 \subseteqq R_2 =_{def} \forall x \forall y([x, y] \in R_1 \to [x, y] \in R_2)$$

und

$$S_1 \subseteqq S_2 =_{def} \forall x \forall y(x, y \in U \to S_1(x, y) \leqq S_2(x, y)).$$

Ist nun $REL \subseteqq REL(U)$ gegeben, so sind die definierten Relationen Halbordnungen über REL.

Grundproblem 7. Welche zusätzlichen verbandstheoretischen Eigenschaften sind für REL bezüglich $\subseteqq$ erfüllt und wie kann man in $\left\{\Gamma\left(\ddot{A}\right) \middle| \ddot{A} \in REL\right\}$ eine binäre Relation $\precapprox$ definieren, so daß Γ ein Isomorphismus wird?

Ist umgekehrt eine Menge $CLUST \subseteqq CLUST(U)$ von Clusterungen über U gegeben, so ist für $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2 \in CLUST$ durch

Definition 9.1.3
$\mathfrak{C}_1 \precapprox \mathfrak{C}_2 =_{def} \forall C_1(C_1 \in \mathfrak{C}_1 \to \exists C_2(C_2 \in \mathfrak{C}_2 \wedge C_1 \subseteqq C_2))$

eine Semihalbordnung über $CLUST$ gegeben, d. h. es gilt die Reflexivität und die Transitivität. Man nennt im Falle $\mathfrak{C}_1 \precapprox \mathfrak{C}_2$ dann $\mathfrak{C}_2$ auch Vergröberung von $\mathfrak{C}_1$.

Grundproblem 8. Welche zusätzlichen verbandstheoretischen Eigenschaften sind für $CLUST$ bezüglich $\precapprox$ erfüllt und bezüglich welcher binären Relation für die Relationen aus $\{P(\mathfrak{C}) \,|\, \mathfrak{C} \in CLUST\}$ ist P ein Isomorphismus?

Dual kann man für $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2 \in CLUST$ definieren

$$\mathfrak{C}_1 \precapprox' \mathfrak{C}_2 =_{def} \forall C_2(C_2 \in \mathfrak{C}_2 \to \exists C_1(C_1 \in \mathfrak{C}_1 \wedge C_1 \subseteqq C_2)).$$

Offenbar ist $\precapprox'$ ebenfalls eine Semihalbordnung über $CLUST$. Gilt $\mathfrak{C}_1 \precapprox' \mathfrak{C}_2$, so heißt $\mathfrak{C}_1$ Verfeinerung von $\mathfrak{C}_2$.

Grundproblem 8′. Dieselben Fragen wie beim Grundproblem 8, nur jetzt auf die Relation $\precapprox'$ bezogen.

Aufgabe 9.1.1

1. *Unter welchen hinreichenden Bedingungen gilt für $\precapprox$ bzw. $\precapprox'$ die Antisymmetrie?*
2. *Unter welchen hinreichenden Bedingungen gilt*

$$\mathfrak{C}_1 \precapprox \mathfrak{C}_2 \to \mathfrak{C}_1 \precapprox' \mathfrak{C}_2$$

bzw.

$$\mathfrak{C}_1 \precapprox' \mathfrak{C}_2 \to \mathfrak{C}_1 \precapprox \mathfrak{C}_2?$$

9.2 Das klassische Faktorisierungsproblem der Algebra

Dieses Problem sollte aus einem guten Mathematik-Unterricht der Schule, zumindest aus den Anfängervorlesungen über Algebra an der Universität bekannt sein.

Über dem Universum U seien eine binäre (scharfe) Relation E, d. h. $E \subseteqq U \times U$, und ein Mengensystem $\mathcal{P} \subseteqq \mathfrak{P}U$ (d. h. eine Clusterung über U, die aus scharfen Mengen besteht) gegeben.

Wie in der Algebra üblich definieren wir

Definition 9.2.1

1. $\Pi(E) =_{def} \{xE \,|\, x \in U\}$, *wobei* $xE =_{def} \{y \,|\, [x,y] \in E\}$
2. $\Pi'(\mathcal{P}) =_{def} \{[x,y] \,|\, \exists P(P \in \mathcal{P} \wedge x, y \in P)\}$

Wir erinnern:

1. E heißt Äquivalenzrelation über U genau dann, wenn E reflexiv über U sowie wenn E symmetrisch und transitiv ist, d. h. wenn gilt
   1.1. $\forall x(x \in U \rightarrow [x,x] \in R)$
   1.2. $\forall x \forall y([x,y] \in R \rightarrow [y,x] \in R)$
   1.3. $\forall x \forall y \forall z([x,y] \in R \wedge [y,z] \in R \rightarrow [x,z] \in R)$
2. $\mathcal{P}$ heißt Zerlegung (Partition) von U genau dann, wenn $\mathcal{P}$ die leere Menge nicht enthält, $\mathcal{P}$ eine Überdeckung von U ist, d. h. jedes Element von U in mindestens einem Element von $\mathcal{P}$ enthalten ist, und beliebige Elemente von $\mathcal{P}$, die verschieden sind, disjunkt sind, d. h. wenn gilt
   2.1. $\emptyset \notin \mathcal{P}$
   2.2. $\forall x(x \in U \rightarrow \exists P(P \in \mathcal{P} \wedge x \in P))$
   2.3. $\forall P \forall Q(P, Q \in \mathcal{P} \wedge P \neq Q \rightarrow P \cap Q = \emptyset)$

Durch $EREL(U)$ bzw. $PART(U)$ bezeichnen wir die Menge aller Äquivalenzrelationen über U bzw. die Menge aller Partitionen von U.

Die Grundprobleme 1 bis 6 werden durch das folgende Theorem gelöst, wobei wir setzen

$$\Gamma =_{def} \Pi \qquad , \qquad \Gamma' =_{def} \Pi'$$

und $REL =_{def} EREL(U)$, $CLUST =_{def} PART(U)$.

Theorem 9.2.1

1. *Ist E eine Äquivalenzrelation über U, so gilt*
$$\Pi'(\Pi(E)) = E$$
   und $\Pi(E)$ ist eine Partition von U.
2. *Ist $\mathcal{P}$ eine Partition von U, so gilt*
$$\Pi(\Pi'(\mathcal{P})) = \mathcal{P}$$
   und $\Pi'(\mathcal{P})$ ist eine Äquivalenzrelation über U.
3. *Π ist eine Bijektion von $EREL(U)$ auf $PART(U)$, Π' ist eine Bijektion von $PART(U)$ auf $EREL(U)$ und Π, Π' sind zueinander invers.*

Aufgabe 9.2.1 *Man beweise Theorem 9.2.1.*

Anleitung: *Nach Elimination der eingeführten Definitionen für $\Pi(E)$ und $\Pi'(\mathcal{P})$ wird der Beweis unmittelbar auf Grund der Voraussetzung, daß E eine Äquivalenzrelation über U bzw. $\mathcal{P}$ eine Partition von U ist, geführt.*

Aufgabe 9.2.2 *Beim Beweis der Gleichungen*

$$\Pi'(\Pi(E)) = E$$

bzw.

$$\Pi(\Pi'(\mathcal{P})) = \mathcal{P}$$

stellt man fest, daß nicht alle Eigenschaften einer Äquivalenzrelation E über U bzw. einer Partition $\mathcal{P}$ von U gebraucht werden. Man untersuche, unter welchen allgemeineren Voraussetzungen an E bzw. $\mathcal{P}$ die obigen Gleichungen noch gelten.

Aufgabe 9.2.3 *Man ersetze in Definition 9.2.1 die Abbildung Π durch Π_{r} mit*

$$\Pi_{\mathrm{r}}(E) =_{def} \{Ey \,|\, y \in U\}\,, \text{ wobei } Ey = \{x \,|\, [x, y] \in E\}$$

Gilt dann auch noch Theorem 9.2.1? Wie kann Übungsaufgabe 9.2.2 für diesen Fall gelöst werden?

Wir diskutieren nun die Grundprobleme 7, 8 und 8′.

Gegeben sei eine beliebige Menge $\mathfrak{E}$ von Äquivalenzrelationen über U, d. h. $\mathfrak{E} \subseteqq \mathit{EREL}(U)$.

Lemma 9.2.2
Der mengentheoretische Durchschnitt $\bigcap \mathfrak{E}$ ist wieder eine Äquivalenzrelation über U.

Aufgabe 9.2.4 *Man beweise Lemma 9.2.2.*

Hat $\mathfrak{E}$ die Form $\mathfrak{E} = \{E_1, E_2\}$, schreiben wir wie üblich für $\bigcap \mathfrak{E}$ auch $E_1 \cap E_2$. Klar ist, daß die mengentheoretische Vereinigung $E_1 \cup E_2$ von Äquivalenzrelationen über U im allgemeinen keine Äquivalenzrelation (über U) ist, weil für $E_1 \cup E_2$ zwar die Reflexivität über U und die Symmetrie stets erfüllt sind, jedoch die Transitivität im allgemeinen nicht gilt. Wir definieren nun eine neue Operation $\sqcup$ wie folgt:

Definition 9.2.2
$E_1 \sqcup E_2 =_{def} \bigcap \{E \,|\, E_1 \cup E_2 \subseteqq E \wedge E \in \mathit{EREL}(U)\}$

Offenbar ist $E_1 \sqcup E_2$ wegen Lemma 9.2.2 wieder eine Äquivalenzrelation über U.

Theorem 9.2.3
Die algebraische Struktur $\mathfrak{V} = [\mathit{EREL}(U), \cap, \sqcup]$ ist ein Verband.

Aufgabe 9.2.5 *Man beweise Theorem 9.2.3.*

Aufgabe 9.2.6 *Der Verband $\mathfrak{V}$ ist vollständig.*

Anleitung:

1. *Die $\cap$-Vollständigkeit wird durch Lemma 9.2.2 bewiesen.*
2. *Zur $\sqcup$-Vollständigkeit definieren wir für $\mathfrak{E} \subseteqq EREL(U)$:*

$$\bigsqcup \mathfrak{E} =_{def} \bigcap \left\{ E' \,\middle|\, \bigcup \mathfrak{E} \subseteqq E' \wedge E' \in EREL(U) \right\}$$

Wir betrachten nun $PART(U)$ und definieren für $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in PART(U)$ einen „verbandstheoretischen" Durchschnitt $\mathcal{P}_1 \sqcap\!\!\!\cdot\; \mathcal{P}_2$ der Partitionen $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ wie folgt.

Definition 9.2.3
$\mathcal{P}_1 \sqcap\!\!\!\cdot\; \mathcal{P}_2 =_{def} \{P_1 \cap P_2 \,|\, P_1 \in \mathcal{P}_1 \wedge P_2 \in \mathcal{P}_2 \wedge P_1 \cap P_2 \neq \emptyset\}$

Lemma 9.2.4
Sind $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ Partitionen von U, so ist auch $\mathcal{P}_1 \sqcap\!\!\!\cdot\; \mathcal{P}_2$ eine Partition von U.

Aufgabe 9.2.7 *Man beweise Lemma 9.2.4.*

Bemerkung
Man verwechsele den oben definierten „verbandstheoretischen" Durchschnitt $\mathcal{P}_1 \sqcap\!\!\!\cdot\; \mathcal{P}_2$ der Partitionen $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ von U nicht mit ihrem mengentheoretischen Durchschnitt $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$, für den wir zur Erinnerung seine Definition wiederholen:

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \{P \,|\, P \in \mathcal{P}_1 \wedge P \in \mathcal{P}_2\}\,.$$

Während (nach Lemma 9.2.4) $\mathcal{P}_1 \sqcap\!\!\!\cdot\; \mathcal{P}_2$ stets eine Partition (von U) ist, gilt dies für $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ im allgemeinen nicht.

Zur Definition einer verbandstheoretischen Vereinigung $\mathcal{P}_1 \sqcup\!\!\!\cdot\; \mathcal{P}_2$ für Partitionen $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ von U müssen wir — im Vergleich zu Definition 9.2.3 — einen etwas höheren begrifflichen Aufwand treiben.

Gegeben sei eine beliebige Menge $PART$ von Partitionen der Menge U, d. h. $PART \subseteqq PART(U)$. Wir wollen nun die in Definition 9.2.3 für Partitionen $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ von U definierte Durchschnittsoperation $\mathcal{P}_1 \sqcap\!\!\!\cdot\; \mathcal{P}_2$ auf beliebige Mengen $PART$ verallgemeinern, d. h. $\bigsqcap\!\!\!\cdot\; PART$ definieren.

Wir benutzen dazu eine Auswahlfunktion α auf $PART$, die aus jeder Partition $\mathcal{P} \in PART$ ein Element dieser Partition auswählt, d. h. α erfüllt die folgenden Bedingungen:

(9.1) $$\alpha : PART \to \bigcup PART \qquad \text{und}$$

(9.2) $$\alpha(\mathcal{P}) \in \mathcal{P} \text{ für jedes } \mathcal{P} \in PART\,.$$

Alle Mengen $\alpha(\mathcal{P})$ mit $\mathcal{P} \in PART$ werden dann (mengentheoretisch) untereinander zum Schnitt gebracht. Somit definieren wir in Verallgemeinerung von Definition 9.2.3:

Definition 9.2.4

$$\bigsqcap\!\!\!\cdot\; PART =_{def} \left\{ \bigcap_{\mathcal{P} \in PART} \alpha(\mathcal{P}) \,\middle|\, \begin{array}{l} \alpha : PART \to \bigcup PART \wedge \\ \forall \mathcal{P}(\mathcal{P} \in PART \to \alpha(\mathcal{P}) \in \mathcal{P}) \wedge \bigcap\limits_{\mathcal{P} \in PART} \alpha(\mathcal{P}) \neq \emptyset \end{array} \right\}$$

Lemma 9.2.5
Wenn $PART \subseteqq PART(U)$, so $\bigsqcap PART \in PART(U)$.

Aufgabe 9.2.8 *Man beweise Lemma 9.2.5.*

Wir wollen nun $\mathcal{P}_1 \sqcup \mathcal{P}_2$ definieren. Dazu erinnern wir an die Definition 9.1.3, nach der für beliebiges $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{P}(U)$ gesetzt wird:

$$\mathfrak{M} \lessapprox \mathfrak{N} \text{ genau dann, wenn } \forall M(M \in \mathfrak{M} \rightarrow \exists N(N \in \mathfrak{N} \wedge M \subseteqq N))$$

($\mathfrak{N}$ heißt dann auch Vergröberung von $\mathfrak{M}$).

Definition 9.2.5
$\mathcal{P}_1 \sqcup \mathcal{P}_2 =_{def} \bigsqcap \{\mathcal{P} | \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \lessapprox \mathcal{P} \wedge \mathcal{P} \in PART(U)\}$

Theorem 9.2.6
Die algebraische Struktur $\mathfrak{W} = [PART(U), \sqcap, \sqcup]$ ist ein Verband.

Aufgabe 9.2.9 *Man beweise Theorem 9.2.6.*

Aufgabe 9.2.10 *Der Verband $\mathfrak{W}$ ist vollständig.*

Anleitung:

1. *Die $\sqcap$-Vollständigkeit folgt unmittelbar aus Lemma 9.2.5.*
2. *Zum Beweis der $\sqcup$-Vollständigkeit verallgemeinern wir die Definition $\mathcal{P}_1 \sqcup \mathcal{P}_2$ auf beliebige Mengen $PART \subseteqq PART(U)$ wie folgt.*

Definition 9.2.6
$\bigsqcup PART =_{def} \bigsqcap \{\mathcal{P} | \bigcup PART \lessapprox \mathcal{P} \wedge \mathcal{P} \in PART(U)\}$

Abschließend können wir das folgende Theorem beweisen:

Theorem 9.2.7

1. *Die Abbildung Π ist ein Isomorphismus des vollständigen Verbandes $\mathfrak{V} = [EREL(U), \cap, \sqcup]$ auf den vollständigen Verband $\mathfrak{W} = [PART(U), \sqcap, \sqcup]$.*
2. *Die Abbildung Π' ist ein Isomorphismus des vollständigen Verbandes $\mathfrak{W} = [PART(U), \sqcap, \sqcup]$ auf den vollständigen Verband $\mathfrak{V} = [EREL(U), \cap, \sqcup]$.*

9.3 Fuzzifizierung des klassischen Faktorisierungsproblems der Algebra

In vielen Anwendungen sowie auch in theoretischen Untersuchungen spielt die folgende Fuzzifizierung der Begriffsbildungen und Resultate aus Kapitel 9.2 eine wichtige Rolle.

Grundlage des Folgenden sind eine sinnvolle Übertragung der Konzepte „Äquivalenzrelation“ und „Partition“ in die Fuzzy-Logik. Dabei ist wesentlich, mit welchem Konzept wir beginnen; denn das zweite ist stets eindeutig durch das erste festgelegt, wenn wir unsere Untersuchungen entsprechend den im Kapitel 9.1 formulierten Grundproblemen durchführen.

Wir stellen hier eine Fuzzyfizierung des Begriffs der Äquivalenzrelation an die Spitze, weil dies für uns anschaulicher und leichter verständlich ist, als wenn wir mit einer Fuzzifizierung des Begriffs „Partition“ beginnen. Im Verlauf der Untersuchungen in diesem Kapitel werden wir jedoch feststellen müssen, daß dieser Weg zu Fuzzy-Partitionen führt, die für viele Anwendungen ungeeignet, weil zu speziell, sind. Demgemäß werden wir dann im darauf folgenden Kapitel 9.4 den Weg umkehren, d. h. von sogenannten „natürlichen“ Partitionen, die durch Anwendungen geliefert werden, ausgehen, und werden versuchen, diese durch bestimmte binäre Fuzzy-Relationen, die allgemeiner als die im vorliegenden Kapitel betrachteten Fuzzy-Äquivalenzrelationen sind, zu charakterisieren (im Sinne der in Kapitel 9.1 formulierten Grundprobleme).

Gegeben seien eine binäre scharfe Relation R über U, d. h. $R \subseteqq U \times U$, sowie eine binäre unscharfe Relation S über U, d. h. $S : U \times U \to \langle 0, 1\rangle$.

Man nennt R reflexiv über U genau dann, wenn

$$\forall x(x \in U \to [x, x] \in R) \tag{9.3}$$

gilt.

Wir sagen nun analog, daß S reflexiv über U sei genau dann, wenn

$$\forall x(x \in U \to S(x, x) = 1) \tag{9.4}$$

gilt.

Zwei Verallgemeinerungsmöglichkeiten von (9.4) bieten sich an: Dazu sei ein Schnittpunkt $c \in \langle 0, 1\rangle$ fixiert.

$$\forall x(x \in U \to S(x, x) \geqq c) \tag{9.5}$$

$$\forall x(x \in U \to S(x, x) > c) \tag{9.6}$$

Dazu sei bemerkt, daß (9.5) stets erfüllt ist, falls $c = 0$ ist; dagegen ist (9.6) für $c = 1$ nie erfüllbar.

Die (scharfe) Symmetrie

$$\forall x \forall y([x, y] \in R \to [y, x] \in R) \tag{9.7}$$

übersetzen wir durch

$$\forall x \forall y(x, y \in U \to S(x, y) = S(y, x)) \tag{9.8}$$

Entsprechend (9.5) und (9.6) gibt es vier Verallgemeinerungen von (9.8), nämlich

$$\forall x \forall y(x, y \in U \wedge S(x, y) \geqq c \to S(y, x) \geqq c) \tag{9.9}$$

$$\forall x \forall y(x, y \in U \wedge S(x, y) > c \to S(y, x) > c) \tag{9.10}$$

$$\forall x \forall y(x, y \in U \wedge S(x, y) \geqq c \to S(y, x) > c) \tag{9.11}$$

$$\forall x \forall y(x, y \in U \wedge S(x, y) > c \to S(y, x) \geqq c) \tag{9.12}$$

Im vorliegenden Kapitel 9.3 werden wir uns allein auf (9.8) stützen.

Die Transitivität der Relation R kann man gleichwertig durch die folgenden Versionen ausdrücken

$$\forall x \forall y \forall z([x, y] \in R \wedge [y, z] \in R \to [x, z] \in R) \tag{9.13}$$

$$\forall x \forall y \forall z([x, y] \in R \to ([y, z] \in R \to [x, z] \in R)) \tag{9.14}$$

Wir diskutieren zunächst Bedingung (9.13).

In manchen Büchern wird S transitiv über U genannt genau dann, wenn

$$\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in U \to min(S(x, y), S(y, z)) \leqq S(x, z)) \tag{9.15}$$

gilt.

Die Verwendung der Funktion *min* in (9.15) beruht darauf, daß *min* eine sehr einfache Łukasiewiczsche Erweiterung der zweiwertigen Funktion *et* ist. Nun ist aber jede T-Norm eine Łukasiewiczsche Erweiterung von *et*, also kann man S τ-transitiv nennen, falls

$$\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in U \to \tau(S(x, y), S(y, z)) \leqq S(x, z)) \tag{9.16}$$

gilt.

Die Verwendung des Kleiner-Gleich-Symbols $\leqq$ in (9.15) und (9.16) beruht darauf, daß man in (9.13) das Symbol $\to$ in der Fuzzy-Logik durch eine binäre reelle Funktion $imp : \langle 0, 1\rangle^2 \to \langle 0, 1\rangle$ interpretiert, welche die Bedingung

$$\forall r \forall s (r, s \in \langle 0, 1\rangle \to (r \leqq s \to imp(r, s) = 1)) \tag{9.17}$$

bzw.

$$\forall r \forall s (r, s \in \langle 0, 1\rangle \to (imp(r, s) = 1 \to r \leqq s)) \tag{9.18}$$

bzw. (9.17) und (9.18) erfüllt.

Wir stellen nun (9.16) die Bedingung

$$\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in U \to imp(\tau(S(x, y), S(y, z)), S(x, z)) = 1) \tag{9.19}$$

gegenüber.

Offenbar ist (9.16) mit (9.19) äquivalent, falls (9.17) und (9.18) gilt.

Gilt allein (9.17) bzw. (9.18), so impliziert (9.16) die Bedingung (9.19) bzw. umgekehrt.

Nach dem Muster der Bedingungen (9.5) und (9.6) zu Verallgemeinerungen der Reflexivität kann man (9.19) zu

$$\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in U \to imp(\tau(S(x, y), S(y, z)), S(x, z)) \geqq c) \tag{9.20}$$

bzw. zu

$$\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in U \to imp(\tau(S(x, y), S(y, z)), S(x, z)) > c) \tag{9.21}$$

abschwächen.

Wir wenden uns nun der Fuzzifizierung der Bedingung (9.14) zu. Wir erinnern daran, daß in der zweiwertigen Logik die Ausdrücke $A \wedge B \to C$ und $A \to (B \to C)$ logisch äquivalent sind, während dies — in Abhängigkeit von der Interpretation des Symbols $\to$ — in Łukasiewiczschen Logiken im allgemeinen nicht gilt. Interpretiert man z. B. $\to$ durch die Łukasiewiczsche Implikation $imp_{Ł}(r, s) = min(1, 1 - r + s)$ für $r, s \in \langle 0, 1\rangle$ und $\wedge$ durch die Funktion *min*, so gilt zwar

$$(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C)),$$

jedoch die Umkehrung $\leftarrow$ nicht.

Die Bedingung (9.14) kann man nun in den folgenden Formen fuzzifizieren:

$$\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in U \to S(x, y) \leqq imp(S(y, z), S(x, z))) \tag{9.22}$$

und

(9.23) $\qquad \forall x \forall y \forall z (x, y, z \in U \to \mathit{imp}(S(x,y), \mathit{imp}(S(y,z), S(x,z))) = 1).$

Wieder gilt, daß (9.22) mit (9.23) äquivalent ist, wenn (9.17) und (9.18) gilt. Gilt allein (9.17) bzw. (9.18), so impliziert (9.22) die Bedingung (9.23) bzw. umgekehrt.

Analog zu (9.20) und (9.21) kann man (9.23) abschwächen zu

(9.24) $\qquad \forall x \forall y \forall z (x, y, z \in U \to \mathit{imp}(S(x,y), \mathit{imp}(S(y,z), S(x,z))) \geqq c).$

bzw. zu

(9.25) $\qquad \forall x \forall y \forall z (x, y, z \in U \to \mathit{imp}(S(x,y), \mathit{imp}(S(y,z), S(x,z))) > c).$

Damit beenden wir die Diskussion, wie die Bedingungen, die eine Äquivalenzrelation definieren, in die Fuzzy-Logik übersetzt werden können.

Aus der Vielzahl der Möglichkeiten, Äquivalenzrelationen zu definieren, diskutieren wir nur wenige Fälle, wobei wir uns daran orientieren, was inzwischen in der Literatur diskutiert worden ist; der Rest muß der zukünftigen Forschung überlassen werden.

Es sei eine beliebige T-Norm τ fixiert. Dann definieren wir für $S : U \times U \to \langle 0, 1 \rangle$:

Definition 9.3.1

1. *S heiße reflexiv über U*
   $=_{def} \forall x (x \in U \to S(x,y) = 1)$

2. *S heiße symmetrisch über U*
   $=_{def} \forall x \forall y (x, y \in U \to S(x,y) = S(y,x))$

3. *S heiße τ-transitiv über U*
   $=_{def} \forall x \forall y \forall z (x, y, z \in U \to \tau(S(x,y), S(y,z)) \leqq S(x,z))$

4. *S heiße τ-Äquivalenzrelation über U*
   $=_{def}$ *S ist über U reflexiv, symmetrisch und τ-transitiv.*

Die Menge der τ-Äquivalenzrelationen über U wird durch $EREL(U, \tau)$ bezeichnet.

Die Definition 9.2.1 wird nun wie folgt in die Fuzzy-Logik übertragen.

Über dem Universum U sei eine beliebige binäre unscharfe Relation S, d. h. $S : U \times U \to \langle 0, 1 \rangle$ gegeben. Ferner sei $\mathcal{F}$ eine beliebige (scharfe) Menge von Fuzzy-Mengen über U, d. h. $\mathcal{F} \subseteqq \mathfrak{F}(U)$, fixiert. In Analogie zu $\Pi(E)$ für $E \subseteqq U \times U$ und $\Pi'(\mathcal{P})$ für $\mathcal{P} \subseteqq \mathfrak{P}(U)$ definieren wir:

Definition 9.3.2

1. $\Phi(S) =_{def} \{xS \mid x \in U\}$, *wobei* $(xS)(y) =_{def} S(x,y)$ $(x, y \in U)$

2. $\Phi'_\tau(\mathcal{F})(x,y) =_{def} \mathit{Sup}\, \{\tau(F(x), F(y)) \mid F \in \mathcal{F}\}$

Der Begriff der Partition wird wie folgt verallgemeinert:

Definition 9.3.3

1. *$\mathcal{F}$ heiße stark normal über U*
   $=_{def} \forall F (F \in \mathcal{F} \to \exists x (x \in U \land F(x) = 1))$

2. *$\mathcal{F}$ heiße Fuzzy-Überdeckung von U*
   $=_{def} \forall x (x \in U \to \exists F (F \in \mathcal{F} \land F(x) = 1))$

3. *$\mathcal{F}$ heiße τ-disjunkt über U*
   $=_{def} \forall F \forall G \forall x \forall y (F, G \in \mathcal{F} \land x, y \in U \land F(x) = 1 \to \tau(G(x), G(y)) \leqq F(y))$

4. $\mathcal{F}$ heiße τ-Partition von U
$=_{def}$ Es gelten die obigen Bedingungen 1, 2 und 3 für $\mathcal{F}$.
Die Menge der τ-Partitionen von U wird durch $PART(U,\tau)$ angedeutet.

Die in Kapitel 9.1 formulierten Grundprobleme 1 und 2 werden dann durch das folgende Theorem gelöst.

Theorem 9.3.1
Ist τ eine T-Norm und ist S eine τ-Äquivalenzrelation über U, so

1. $\Phi'_\tau(\Phi(S)) = S$ *und*
2. $\Phi(S)$ *ist eine τ-Partition.*

Beweis
ad 1
Um Bedingung 1 zu beweisen, zeigen wir, daß für alle $x, y \in U$ gilt:

1.1. $\Phi'_\tau(\Phi(S))(x,y) \leqq S(x,y)$ und

1.2. $S(x,y) \leqq \Phi'_\tau(\Phi(S))(x,y)$.

ad 1.1. Nach Voraussetzung ist S über U symmetrisch und τ-transitiv, also gilt

$$\tau(S(z,x), S(z,y)) \leqq S(x,y) \text{ für alle } x,y,z \in U, \tag{9.26}$$

also folgt

$$\mathit{Sup}\,\{\tau(S(z,x), S(z,y)) \,|\, z \in U\} \leqq S(x,y) \text{ für alle } x,y \in U. \tag{9.27}$$

Nun gilt aber nach Definition von Φ'_τ und Φ (Definition 9.3.2)

$$\begin{aligned} \Phi'_\tau(\Phi(S))(x,y) &= \mathit{Sup}\,\{\tau(F(x), F(y)) \,|\, F \in \Phi(S)\} \\ &= \mathit{Sup}\,\{\tau(S(z,x), S(z,y)) \,|\, z \in U\}\,, \end{aligned} \tag{9.28}$$

also gilt 1.1 auf Grund von (9.27) und (9.28).

ad 1.2. Weil τ eine T-Norm und S reflexiv ist, gilt

$$\begin{aligned} S(x,y) &= \tau(1, S(x,y)) \\ &= \tau(S(x,x), S(x,y)) \\ &\leqq \mathit{Sup}\,\{\tau(S(z,x), S(z,y)) \,|\, z \in U\} \\ &= \mathit{Sup}\,\{\tau(F(x), F(y)) \,|\, F \in \Phi(S)\} \\ &= \Phi'_\tau(\Phi(S)). \end{aligned}$$

ad 2
Um zu zeigen, daß $\Phi(S)$ eine τ-Partition ist, haben wir zu zeigen

2.1. $\forall F(F \in \Phi(S) \rightarrow \exists x(x \in U \wedge F(x) = 1))$

2.2. $\forall x(x \in U \rightarrow \exists F(F \in \Phi(S) \wedge F(x) = 1))$

2.3. $\forall F \forall G \forall x \forall y(F, G \in \Phi(S) \wedge x, y \in U \wedge F(x) = 1 \rightarrow \tau(G(x), G(y)) \leqq F(y))$

ad 2.1. Wenn $F \in \Phi(S)$, so existiert ein $z \in U$ mit $F = zS$. Also genügt es zu zeigen, daß ein $x \in U$ existiert, so daß $F(x) = S(z,x) = 1$. Wir definieren $x =_{def} z$, also ist wegen der Reflexivität von S der geforderte Nachweis erbracht.

ad 2.2. Gegeben sei ein $x \in U$. Da jedes $F \in \Phi(S)$ in der Form $F = zS$ dargestellt ist, genügt es ein z zu finden, so daß $S(z,x) = 1$ ist. Dazu definieren wir $z =_{def} x$ und erhalten wiederum wegen der Reflexivität von S über U das gewünschte Resultat $F(x) = S(x,x) = 1$.

ad 2.3. Gegeben seien $F, G \in \Phi(S)$ sowie $x, y \in U$ mit $F(x) = 1$. Nach Definition von $\Phi(S)$ bedeutet dies, daß Elemente $u, v \in U$ existieren mit $F = uS$, $G = vS$ und $F(x) = 1$, also $S(u,x) = 1$. Wir haben zu zeigen

$$\tau(G(x), G(y)) \leqq F(y), \tag{9.29}$$

d. h. nach Darstellung von F und G haben wir zu zeigen

$$\tau(S(v,x), S(v,y)) \leqq S(u,y). \tag{9.30}$$

Nun gilt aber auf Grund der Symmetrie und der τ-Transitivität von S, daß

$$\tau(S(v,x), S(v,y)) \leqq S(x,y). \tag{9.31}$$

Weil τ eine T-Norm ist und $S(u,x) = 1$ erhalten wir ferner

$$\begin{aligned} S(x,y) &= \tau(1, S(x,y)) \\ &= \tau(S(u,y), S(x,y)). \end{aligned} \tag{9.32}$$

Mit der Transitivität von S über U erhalten wir ferner

$$\tau(S(u,x), S(x,y)) \leqq S(u,y). \tag{9.33}$$

Somit folgt aus (9.31), (9.32) und (9.33) die Behauptung (9.30).

■

Korollar 9.3.2
Φ ist eine eineindeutige Abbildung von der Menge $EREL(U,\tau)$ aller τ-Äquivalenzrelationen über U in die Menge $PART(U,\tau)$ aller τ-Partitionen von U.

Aufgabe 9.3.1 *Im Beweis von Theorem 9.3.1 werden offenbar nicht alle Eigenschaften der T-Norm τ benötigt. Man prüfe, welche Eigenschaften des T-Norm-Konzepts ausreichen, um Theorem 9.3.1 zu beweisen.*

Wir stellen nun die Frage, ob Φ eine Abbildung auf die Menge $PART(U,\tau)$ ist und damit eine Bijektion vorliegt. Dieses Problem wird dadurch gelöst, daß man die Abbildung Φ'_τ betrachtet und zeigt, daß auch sie eindeutig umkehrbar und ihre Inverse die Abbildung Φ ist sowie daß für jede beliebige τ-Partition $\mathcal{F}$ das Φ'_τ-Bild $\Phi'_\tau(\mathcal{F})$ eine τ-Äquivalenzrelation ist. Man kann diese Resultate dann in der Aussage zusammenfassen, daß die Konzepte „τ-Äquivalenzrelation über U“ und „τ-Partition von U“ wechselseitig definierbar sind. Die angedeuteten Resultate werden in dem folgenden Theorem und Korollar zusammengefaßt.

Theorem 9.3.3
Ist τ eine T-Norm und ist $\mathcal{F}$ eine τ-Partition von U, so

1. *$\Phi(\Phi'_\tau(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$ und*
2. *$\Phi'_\tau(\mathcal{F})$ ist eine τ-Äquivalenzrelation über U.*

Beweis
ad 1
Um Behauptung 1 zu beweisen, zeigen wir

1.1. $\Phi(\Phi'_\tau(\mathcal{F})) \subseteqq \mathcal{F}$ und

1.2. $\mathcal{F} \subseteqq \Phi(\Phi'_\tau(\mathcal{F}))$.

ad 1.1. Es sei

$$F \in \Phi(\Phi'_\tau(\mathcal{F})), \tag{9.34}$$

also gibt es nach Definition von Φ ein $z \in U$, so daß

$$F = z\Phi'_\tau(\mathcal{F}), \tag{9.35}$$

d. h. nach Definition von $z\Phi'_\tau(\mathcal{F})$ und Φ'_τ

$$F(x) = Sup\,\{\tau(G'(z), G'(x))\,|\,G' \in \mathcal{F}\}\,. \tag{9.36}$$

Weil eine τ-Partition von U auch eine Überdeckung von U ist (siehe Bedingung 2 von Definition 9.3.3), existiert zu z ein $G \in \mathcal{F}$, so daß

$$G(z) = 1. \tag{9.37}$$

Um 1.1 zu beweisen, haben wir noch

$$F \in \mathcal{F} \tag{9.38}$$

zu zeigen. Da $G \in \mathcal{F}$ gilt, genügt es

$$F = G \tag{9.39}$$

zu zeigen.
Um (9.39) zu beweisen, zeigen wir für jedes $x \in U$:

$$F(x) \leqq G(x) \tag{9.40}$$

und

$$G(x) \leqq F(x). \tag{9.41}$$

Wir zeigen als erstes (9.40). Dazu gehen wir von (9.36) aus, d. h. wir haben die Gleichung

$$F(x) = Sup\,\{\tau(G'(z), G'(x))\,|\,G' \in \mathcal{F}\}\,.$$

Somit genügt es zu zeigen

$$Sup\,\{\tau(G'(z), G'(x))\,|\,G' \in \mathcal{F}\} \leqq G(x). \tag{9.42}$$

Nun gilt aber (9.42), falls

$$\tau(G'(z), G'(x)) \leqq G(x) \text{ für alle } G' \in \mathcal{F} \tag{9.43}$$

gilt. Da nach (9.37) $G(z) = 1$ gilt, haben wir (9.43) auf Grund von Bedingung 3 der Definition 9.3.3.

Wir zeigen nun als zweites Bedingung (9.41). Wenn wir die Darstellung (9.36) von $F(x)$ verwenden, genügt es,

$$G(x) \leqq Sup\,\{\tau(G'(z), G'(x))\,|\,G' \in \mathcal{F}\} \tag{9.44}$$

zu zeigen.
Aus (9.37), d. h. $G(z) = 1$, erhalten wir

$$\begin{aligned} G(x) &= \tau(1, G(x)) \\ &= \tau(G(z), G(x)) \\ &\leqq Sup\,\{\tau(G'(z), G'(x))\,|\,G' \in \mathcal{F}\}, \end{aligned} \tag{9.45}$$

d. h. (9.44) gilt.

ad 1.2. Wir haben

$$\mathcal{F} \subseteqq \Phi(\Phi'_\tau(\mathcal{F}))$$

zu beweisen. Wir nehmen

$$F \in \mathcal{F} \tag{9.46}$$

an und haben zu zeigen, daß

$$F \in \Phi(\Phi'_\tau(\mathcal{F})) \tag{9.47}$$

gilt. Nach Bedingung 1 von Definition 9.3.3 gibt es zu $F \in \mathcal{F}$ ein $x \in U$, so daß

$$F(x) = 1 \tag{9.48}$$

gilt. Also folgt aus Bedingung 3 von Definition 9.3.3 für beliebiges $G \in \mathcal{F}$ und beliebiges $y \in U$ die Ungleichung

$$\tau(G(x), G(y)) \leqq F(y). \tag{9.49}$$

Aus (9.49) folgt

$$Sup\,\{\tau(G'(x), G'(y))\,|\,G' \in \mathcal{F}\} \leqq F(y), \tag{9.50}$$

d. h. nach Definition von Φ'_τ

$$\Phi'_\tau(\mathcal{F})(x, y) \leqq F(y) \text{ für alle } y \in U. \tag{9.51}$$

Umgekehrt erhalten wir mit (9.48)

$$\begin{aligned} F(y) &= \tau(1, F(y)) \\ &= \tau(F(x), F(y)) \\ &\leqq Sup\,\{\tau(G'(x), G'(y))\,|\,G' \in \mathcal{F}\} \\ &= \Phi'_\tau(\mathcal{F})(x, y). \end{aligned} \tag{9.52}$$

Somit folgt aus (9.51) und (9.52), daß für das in (9.48) fixierte $x \in U$ und alle $y \in U$ gilt

$$\Phi'_\tau(\mathcal{F})(x, y) = F(y). \tag{9.53}$$

Nun gilt aber nach Definition

$$x\Phi'_\tau(\mathcal{F}) \in \Phi(\Phi'_\tau(\mathcal{F})), \tag{9.54}$$

also folgt $F \in \Phi(\Phi'_\tau(\mathcal{F}))$, d. h. (9.47) gilt.

■

9.4 „Natürliche“ Zerlegungen und deren Charakterisierung

10. Modifikatoren

10.1 Motivationen

Mit dem Begriff des „Modifikators“ kommt ein prinzipiell **neuer** Gesichtspunkt in unsere Betrachtungen.

Die betreffenden Untersuchungen beginnen mit der Arbeit [55] von L. A. Zadeh.

Zadeh geht bei seinen Betrachtungen von der Tatsache aus, daß beim Schließen (allgemeiner: bei der Kommunikation) in der **natürlichen** (bei Zadeh: der englischen) Sprache bestimmte Wörter (oder Wortverbindungen) eine besondere Rolle spielen. Meistens sind dies **Adverbien**, die **Adjektive** genauer bestimmen, diese einschränken oder erweitern, diese „modifizieren“. Um Trivialfälle zu vermeiden (bzw. „sinnlose“ Formulierungen auszuschließen), müssen ihnen Fuzzy-Mengen entsprechen, die nicht „scharf“ sind.

Ein Beispiel

Adjektiv:	*old*	$\approx$	alt (unscharfes Adjektiv)
Adverb:	*very*	$\approx$	sehr.
Universum U:	Eine (scharfe) Menge von Personen.		
Prädikat:	$old(x)$:	Die Person $x \in U$ ist alt.	

Logische Präzisierung dieses Prädikats durch eine Fuzzy-Menge *OLD* mit

$$OLD : U \to \langle 0, 1 \rangle \,,$$

wobei

$$OLD(x)$$

den Wahrheitswert (Zugehörigkeitswert) angibt, mit dem eine Person x als „alt“ eingestuft wird. Das Adverb „sehr“ modifiziert nun das Adjektiv „alt“ zu dem (modifizierten) Adjektiv „sehr alt“. Diesem entspricht eine modifizierte Fuzzy-Menge *VERY OLD*, die man — Zadeh folgend — definiert zu

$$(VERY\ OLD)(x) =_{def} (OLD(x))^2 \qquad x \in U.$$

In der oben genannten Arbeit nennt Zadeh derartige Wörter (oder Wortverbindungen) *Linguistic Hedges*. Es ist klar, daß eine allgemeine sprachwissenschaftliche Definition von Linguistic Hedges schwierig, vielleicht gar unmöglich ist; man muß sich hier — wieder Zadeh folgend — auf die Intuition verlassen und den Begriff „Linguistic Hedge“ durch geeignete *Beispiele* erläutern.

Zadeh gibt zwei Typen von Beispielen an.

Typ I. very, more or less, approximately, likely, slightly, plus, minus, much.

Typ II. essentially, practically, technically.

Zur weiteren Vertiefung der Einsicht, was Linguistic Hedges — logisch gesehen — bewirken, sei nochmals auf das obige Beispiel zurückgegriffen.

Die Modifizierung des unscharfen Adjektivs „alt" durch „sehr" zu dem unscharfen Adjektiv „sehr alt" wollen wir jetzt wie folgt auffassen.

Die unscharfe Aussage

„x ist alt"

wird modifiziert zu

„sehr (x ist alt)"

in der (grammatisch korrekten) Fassung

„x ist sehr alt".

Damit wird „sehr" zu einem **einstelligen** Junktor, der aus einer gegebenen Aussage (besser: aus einem gegebenen Ausdruck) A einen neuen, nämlich $sehr(A)$ erzeugt.

In diesem Sinne sind alle unter Typ I genannten Linguistic Hedges als einstellige Junktoren zu betrachten.

Ein **weiterer Gesichtspunkt** ist **fundamental**. Alle unter Typ I genannten Junktoren sind **extensional** (engl. „truth functional"), d. h. bei einer gegebenen Interpretation hängt der logische Wert des zusammengesetzten Ausdrucks hängt allein von dem logischen Wert des Teilausdrucks ab.

Die „Linguistic Hedges" von Typ II werden von Zadeh als möglicherweise mehrstellig angesehen; in jedem Fall sollen sie aber extensional sein. Weiteres dazu weiter unten.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem Beispiel, welches zeigt, daß in der zweiwertigen Logik und in der scharfen Mengenlehre die Anwendung von Modifikatoren nur triviale Resultate liefert bzw. sprachlich als unsinnig empfunden wird.

Beispiel Wir wählen als Universum U die Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich Null), d. h.

$$U =_{def} \{0, 1, 2, \dots\}$$

Wir betrachten das Prädikat „x ist eine gerade natürliche Zahl". Damit erhalten wir die scharfe Menge

$$G = \{0, 2, 4, \dots\}.$$

Nun kann man G durch die zweiwertige Zugehörigkeitsfunktion

$$GERADE(x) =_{def} \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in U \setminus G \\ 1, & \text{falls } x \in G \end{cases}$$

charakterisieren. Wir modifizieren nun das Adjektiv „gerade" durch das Adverb „sehr" und erhalten das modifizierte Adjektiv „sehr gerade", was rein sprachlich als **sinnlos** oder zumindest als eine unübliche Formulierung erscheint.

Nun können wir aber *GERADE* als Fuzzy-Menge auffassen und diese, wie weiter oben für *OLD*, durch *VERY* modifizieren entsprechend der Definition

$$(VERY\ GERADE)(x) =_{def} (GERADE(x))^2$$

Da nun *GERADE* **nur** die Zugehörigkeitswerte 0 oder 1 annimmt und $0^2 = 0$, $1^2 = 1$ ist, folgt

$$(VERY\ GERADE)(x) = GERADE(x)$$

für alle $x \in U$, d. h.

$$VERY\ GERADE = GERADE,$$

also die betrachteten Mengen sind gleich, d. h. die Anwendung des Modifikators *VERY* hat für *GERADE* keinen Effekt.

10.2 Allgemeine Begriffsbildungen zu „Modifikatoren“

Gegeben ein beliebiges Universum U. Die Menge aller Fuzzy-Mengen über U hatten wir durch $\mathfrak{F}(U)$ angedeutet, d. h.

$$\mathfrak{F}(U) =_{def} \{F \,|\, F : U \to \langle 0, 1\rangle\}\,.$$

Ein Modifikator *MOD* über U soll eine Abbildung sein, die eine beliebige gegebene Fuzzy-Menge F über U „modifiziert“, also die aus F eine neue Fuzzy-Menge G über U erzeugt. Demgemäß definieren wir:

Definition 10.2.1
MOD ist ein ***allgemeiner Modifikator*** *über* U
$=_{def}$ $MOD : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}(U)$.

Auf der Grundlage dieser (sehr allgemeinen) Definition kann man schon eine Reihe wichtiger Eigenschaften von Modifikatoren formulieren. Sei also *MOD* ein allgemeiner Modifikator über U.

Definition 10.2.2

1. *MOD heiße* ***expandierend (einbettend)***
   $=_{def}$ *Für jedes* $F \in \mathfrak{F}(U)$ *gilt:*
   $$F \subseteqq MOD(F).$$

2. *MOD heiße* ***komprimierend***
   $=_{def}$ *Für jedes* $F \in \mathfrak{F}(U)$ *gilt:*
   $$MOD(F) \subseteqq F.$$

3. *MOD heiße* ***monoton (comonoton)***
   $=_{def}$ *Für jedes* $F, G \in \mathfrak{F}(U)$ *gilt:*
   $$\text{Wenn } F \subseteqq G\,,\text{ so } MOD(F) \subseteqq MOD(G)$$
   bzw.
   $$MOD(F) \supseteqq MOD(G).$$

4. *MOD heiße* ***abgeschlossen***
   $=_{def}$ *Für jedes* $F \in \mathfrak{F}(U)$ *gilt:*
   $$MOD(MOD(F)) = MOD(F).$$

Anmerkung
Die Eigenschaften 1, 3 und 4 sind der aus Algebra und Logik wohlbekannten Theorie der *Hüllen*operatoren nachgebildet, während 2, 3 und 4 zusammen sogenannte *Kern*operatoren definieren, die z. B. in der Topologie als Zuordnung einer Menge M zur Menge der inneren Punkte von M eine große Rolle spielen.

Gegeben sei nun eine Abbildung π von U in U, d. h.

$$\pi : U \to U.$$

Dann erzeugt π aus einer Fuzzy-Menge F über U eine neue Fuzzy-Menge $F \circ \pi$ über U, die wie folgt definiert ist:

$$(F \circ \pi)(x) =_{def} F(\pi(x)),. \qquad x \in U$$

Definition 10.2.3
MOD heiße ***π-invariant***
$=_{def}$ *Für jedes* $F \in \mathfrak{F}(U)$ *gilt*

$$(MOD(F)) \circ \pi = MOD(F \circ \pi)$$

Weitere Untersuchungen zum Aufbau einer allgemeinen Theorie von Modifikatoren werden in geeigneter Weise Begriffsbildungen aus der Algebra (wie z. B. Isomorphie, Homomorphie, Endomorphie usw.) und aus der Algebra und Logik (wie z. B. Kompaktheit) benutzen. Wir führen diese Betrachtungen hier aus Raum- und Zeitmangel nicht weiter.

In Richtung der aus der Fuzzy-Logik und Fuzzy-Mengenlehre her bekannten Begriffsbildungen sind die folgenden einschränkenden Bedingungen wesentlich.

Definition 10.2.4

1. *MOD heiße* ***lokaler*** *Modifikator*
   $=_{def}$ *Es gibt Funktionen* mod *und* π *mit:*
   1.1. $mod : U \times \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$ *und*
   1.2. $\pi : U \to U$ *und*
   1.3. *Für jedes* $F \in \mathfrak{F}(U)$ *und für jedes* $x \in U$ *gilt:*

   $$MOD(F)(x) = mod(x, F(\pi(x)))$$

2. *MOD heiße* ***extensionaler*** *Modifikator*
   $=_{def}$ *Es gibt Funktionen* μ *und* π *mit:*
   2.1. $\mu : \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$ *und*
   2.2. $\pi : U \to U$ *und*
   2.3. *Für jedes* $F \in \mathfrak{F}(U)$ *und für jedes* $x \in U$ *gilt:*

   $$MOD(F)(x) = \mu(F(\pi(x)))$$

3. *MOD heiße* ***äußerer*** *Modifikator*
   $=_{def}$ *Es gibt eine Funktion* μ *mit:*
   3.1. $\mu : \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$ *und*
   3.2. *Für jedes* $F \in \mathfrak{F}(U)$ *und für jedes* $x \in U$ *gilt:*

   $$MOD(F)(x) = \mu(F(x))$$

4. *MOD heiße* ***innerer*** *Modifikator*
   $=_{def}$ *Es gibt eine Funktion* π *mit:*
   4.1. $\pi : U \to U$ *und*
   4.2. *Für jedes* $F \in \mathfrak{F}(U)$ *und für jedes* $x \in U$ *gilt:*

   $$MOD(F)(x) = F(\pi(x))$$

10.3 Die Modifikatoren „VERY“ und „MORE-OR-LESS“ („MOL“)

In diesem und dem folgenden Abschnitt wollen wir die „ältesten“ und am leichtesten verständlichen Modifikatoren, nämlich *VERY* und *MOL*, betrachten. Sie wurden 1972 in der bereits zitierten Arbeit von ZADEH eingeführt. Es sei $F \in \mathfrak{F}(U)$, $x \in U$.

Definition 10.3.1

1. $VERY(F)(x)$
   $=_{def} \; (F(x))^2$
2. $MOL(F)(x)$
   $=_{def} \; \sqrt[2]{F(x)}$

Sehr häufig wird $VERY(F)$ auch durch $CON(F)$ und $MOL(F)$ durch $DIL(F)$ bezeichnet, wobei

$$CON \approx \text{„concentration“}$$
$$DIL \approx \text{„dilation“}$$

Die Wirkung dieser Modifikatoren kann durch die Abbildungen 10.1 und 10.2 veranschaulicht werden (entnommen der eingangs zitierten Arbeit von ZADEH).

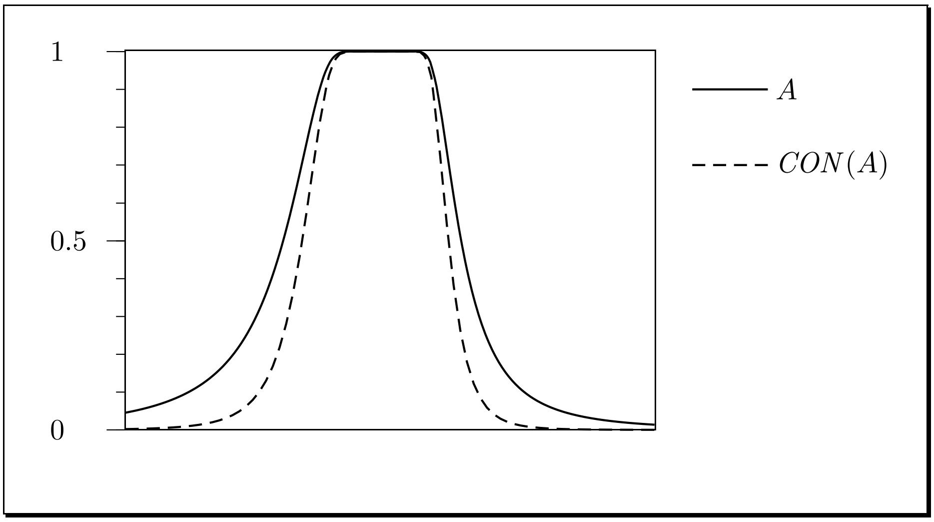


Abbildung 10.1: The effect of concentration on a fuzzy set A

Theorem 10.3.1

VERY und MOL sind äußere Modifikatoren mit den folgenden Eigenschaften:

1. *VERY ist komprimierend und MOL ist expandierend, d. h. für jede Fuzzy-Menge* $F : U \to \langle 0,1\rangle$ *gilt*
$$VERY(F) \subseteqq F \subseteqq MOL(F)$$
2. *VERY und MOL sind monoton, d. h. für jedes* $F, G : U \to \langle 0,1\rangle$ *gilt*
$$\text{Wenn } F \subseteqq G\text{, so } VERY(F) \subseteqq VERY(G) \text{ und } MOL(F) \subseteqq MOL(G).$$

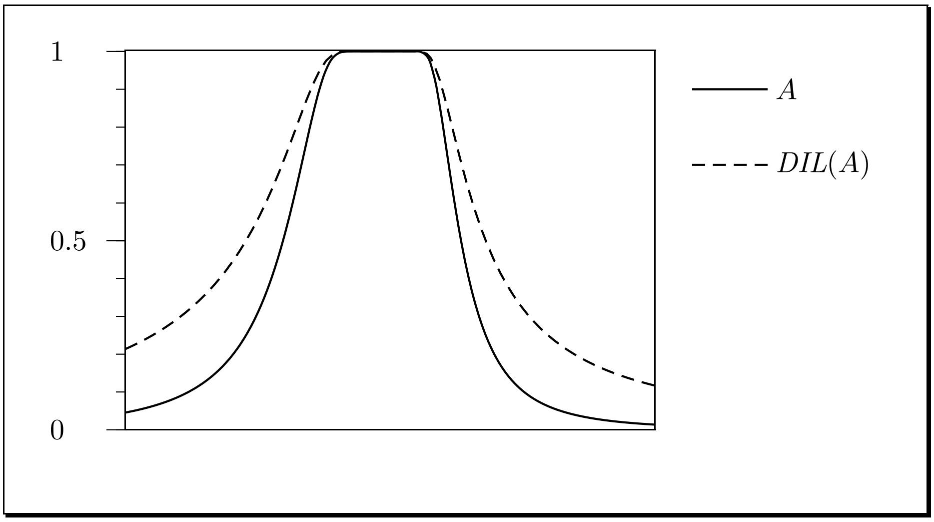


Abbildung 10.2: The effect of dilation on the operand A

3. *VERY und MOL sind distributiv bezüglich Standard-Durchschnitt und Standard-Vereinigung von Fuzzy-Mengen, d. h. für jedes $F, G : U \to \langle 0, 1\rangle$ gilt*

   3.1. $VERY(F \cap G) = VERY(F) \cap VERY(G)$

   3.2. $VERY(F \cup G) = VERY(F) \cup VERY(G)$

   3.3. $MOL(F \cap G) = MOL(F) \cap MOL(G)$

   3.4. $MOL(F \cup G) = MOL(F) \cup MOL(G)$

4. *VERY und MOL heben sich in ihrer Wirkung gegenseitig auf, d. h. für jedes $F : U \to \langle 0, 1\rangle$ gilt*

$$VERY(MOL(F)) = MOL(VERY(F)) = F.$$

Aus Platz- und Zeitgründen verzichten wir auf weitere genauere Ausführungen zu diesen Modifikatoren. Wir formulieren lediglich einige **Probleme**:

1. Erfüllen *VERY* und *MOL* auch Distributivitätseigenschaften bezüglich Nichtstandardoperationen $\Cap$ bzw. $\Cup$, die durch eine beliebige T-Norm τ bzw. S-Norm σ definiert sind?

2. Wie ist die Frage 1 bei der Wahl von τ und σ als *bold*-Verknüpfungen bzw. als algebraische Verknüpfungen zu beantworten?

3. Wie kann man die dualen Modifikatoren $DUAL(VERY)$ und $DUAL(MOL)$ mit

$$DUAL(VERY)(F) =_{def} \overline{VERY\left(\overline{F}\right)}$$
$$DUAL(MOL)(F) =_{def} \overline{MOL\left(\overline{F}\right)}$$
$$x \in U$$

   (siehe Abbildung 10.3) umgangssprachlich beschreiben?

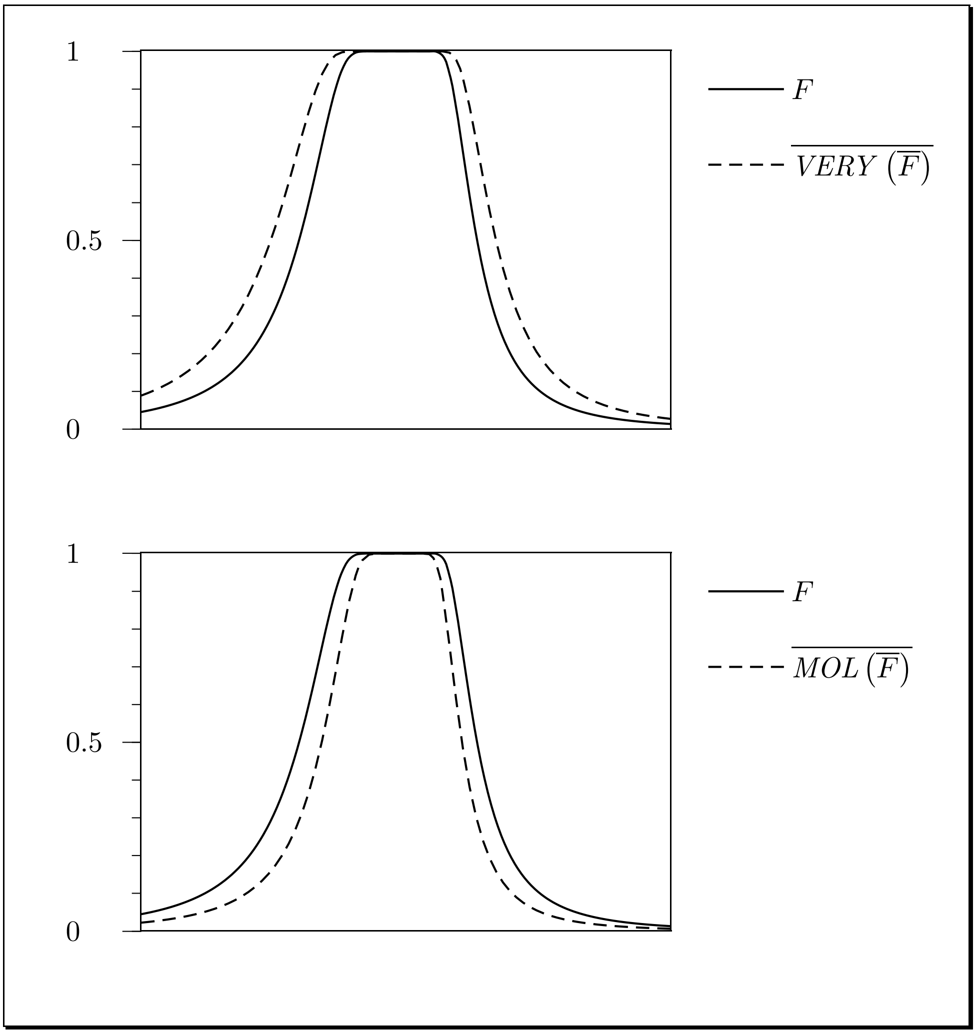


Abbildung 10.3: Die dualen Modifikatoren $DUAL(VERY)$ und $DUAL(MOL)$

10.4 Kontrastverstärker

Gegeben sei ein beliebiger Modifikator MOD über U, d. h.

$$MOD : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}(U).$$

Definition 10.4.1
MOD heiße ***Kontrastverstärker***
$=_{def}$ *Für jedes $F : U \to \langle 0, 1\rangle$ und jedes $x \in U$ gilt:*

1. *Wenn $F(x) \leqq \frac{1}{2}$, so*
$$MOD(F)(x) \leqq F(x)$$

2. *Wenn $F(x) \geqq \frac{1}{2}$, so*
$$MOD(F)(x) \geqq F(x).$$

Diese Definition modelliert offenbar das folgende **Prinzip der Kontrastverstärkung**:

Je nach Größe von $F(x)$ sei x grau koloriert, und zwar umso dunkler (bzw. heller), je größer $F(x)$ (bzw. kleiner $F(x)$) ist. Dabei entspricht $F(x) = 1$ schwarz bzw. $F(x) = 0$ weiß.

Dann macht ein Kontrastverstärker „dunkle" Elemente (d. h. $F(x) > \frac{1}{2}$) noch dunkler, während „helle" Elemente (d. h. $F(x) < \frac{1}{2}$) noch heller werden. Elemente mit $F(x) = \frac{1}{2}$ bleiben unverändert.

Für Kontrastverstärker kann man selbstverständlich alle in 10.2 formulierten einschränkenden Bedingungen fordern.

Wir definieren nun zwei äußere Kontrastverstärker $CINT_{\mathrm{Z}}$ (Zadeh, 1972) und $CINT_{\mathrm{GR}}$ (Gupta/Ragade, 1977).

Definition 10.4.2

1. $CINT_Z(F)(x)$
$$=_{def} \begin{cases} 2 \cdot (F(x))^2 & \text{, falls } 0 \leqq F(x) \leqq \frac{1}{2} \\ 1 - 2 \cdot (1 - F(x))^2 & \text{, falls } \frac{1}{2} \leqq F(x) \leqq 1 \end{cases}$$

2. $CINT_{GR}(F)(x)$
$$=_{def} \begin{cases} (F(x))^2 & \text{, falls } 0 \leqq F(x) \leqq \frac{1}{2} \\ \sqrt[2]{F(x)} & \text{, falls } \frac{1}{2} < F(x) \leqq 1 \end{cases}$$

Die Wirkung der Modifikatoren $CINT_{\mathrm{Z}}$ und $CINT_{\mathrm{GR}}$ kann man veranschaulichen wie in Abbildung 10.4 gezeigt.

Zum Kontrastverstärker $CINT_{\mathrm{GR}}$ siehe [21] von M. M. Gupta, R. K. Ragade und R. R. Yager.

Theorem 10.4.1
$CINT_Z$ ist ein äußerer Modifikator mit folgenden Eigenschaften:

1. *$CINT_Z$ ist im „unteren Teil" komprimierend, im „oberen Teil" expandierend, d. h. es gilt*

$$CINT_Z(F)(x) \leqq F(x), \text{ falls } 0 \leqq F(x) \leqq \tfrac{1}{2}$$
$$F(x) \leqq CINT_Z(F)(x), \text{ falls } \tfrac{1}{2} \leqq F(x) \leqq 1.$$

2. *$CINT_Z$ ist monoton, d. h. für jedes $F, G : U \to \langle 0, 1 \rangle$ gilt:*

$$\text{Wenn } F \subseteqq G \text{, so } CINT_Z(F) \subseteqq CINT_Z(G).$$

3. *$CINT_Z$ ist distributiv bezüglich Standard-Durchschnitt und Standard-Vereinigung, d. h. für jedes $F, G : U \to \langle 0, 1 \rangle$:*

$$CINT_Z(F \cap G) = CINT_Z(F) \cap CINT_Z(G)$$
$$CINT_Z(F \cup G) = CINT_Z(F) \cup CINT_Z(G).$$

Aufgabe 10.4.1 *Man prüfe, ob* **Theorem 10.4.1** *auch für den Kontrastverstärker $CINT_{GR}$ gilt.*

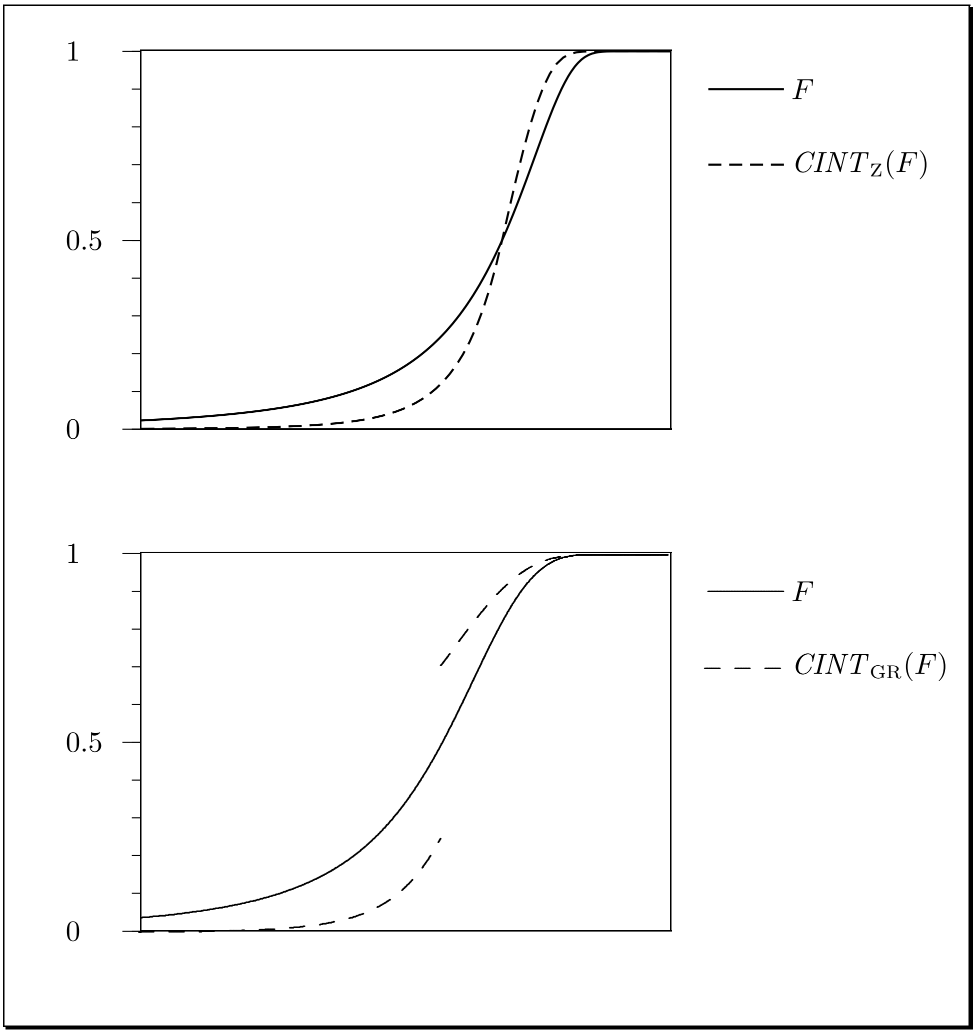


Abbildung 10.4: Die Modifikatoren $CINT_Z$ und $CINT_{GR}$

Aufgabe 10.4.2 *Heuristische Betrachtung: Ist das Universum U z. B. die Menge der reellen Zahlen und ist F eine stetige Funktion über U, wie etwa in Abbildung 10.4 angedeutet, so ist $CINT_Z(F)$ ebenfalls eine stetige Funktion.*

Betrachten wir aber $CINT_{GR}(F)$, so gilt

$$CINT_{GR}(F)(x_0) = (F(x_0))^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4} \qquad\qquad \text{falls } F(x_0) = \tfrac{1}{2}$$

Ferner gilt für $\frac{1}{2} < F(x) \leqq 1$

$$CINT_{GR}(F)(x) = \sqrt[2]{F(x)},$$

also

$$\lim_{F(x)\to\frac{1}{2}} CINT_{GR}(F)(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2}},$$

also ist $CINT_{GR}(F)$ unstetig, weil an der Stelle x_0 eine Sprungstelle vorhanden ist.

10.5 Die Modifikatoren *PLUS*, *MINUS*, *HIGHLY* und *EXTREMELY*

Die genannten Modifikatoren wurden 1972 von Zadeh in der eingangs zitierten Arbeit eingeführt, wobei er *HIGHLY* in zwei unterschiedlichen Varianten definiert und es dem Leser überläßt, sich für eine von diesen zu entscheiden.

Alle betrachteten Modifikatoren werden als **äußere** Modifikatoren definiert.

Definition 10.5.1 (*PLUS*, *MINUS*)

1. $PLUS(F)(x)$
   $=_{def}\ (F(x))^{1.25} = \sqrt[4]{(F(x))^5} = (F(x))^{\frac{5}{4}}$
2. $MINUS(F)(x)$
   $=_{def}\ (F(x))^{0.75} = \sqrt[4]{(F(x))^3} = (F(x))^{\frac{3}{4}}$

Folgerung 10.5.1

$$PLUS(MINUS(F)) = MINUS(PLUS(F)) \subseteqq F$$

Diese Folgerung ergibt sich aus der Tatsache, daß für $r \in \langle 0,1\rangle$

$$\left(r^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(r^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{4}} = r^{\frac{15}{16}} \leqq r$$

gilt.

Nun hat Zadeh die Modifikatoren *VERY* und *MOL* so definiert, daß

$$VERY(MOL(F)) = MOL(VERY(F)) = F$$

gilt.

Möglicherweise wollte er diese Formel auch für *PLUS* und *MINUS* haben, und es ist ihm ein Rechenfehler unterlaufen.

Demgemäß könnte man definieren

Definition 10.5.2

1. $PLUS'(F)(x)$
   $=_{def}\ (F(x))^{\frac{4}{3}}$
2. $MINUS'(F)(x)$
   $=_{def}\ (F(x))^{\frac{4}{5}}$

Mit dieser Definition erhalten wir dann trivial

Folgerung 10.5.2

1. $PLUS'(MINUS(F)) = MINUS(PLUS'(F)) = F$
2. $PLUS(MINUS'(F)) = MINUS'(PLUS(F)) = F$

Definition 10.5.3 (2 Varianten von *HIGHLY*, Zadeh 1972)

1. $HIGHLY(F)$
   $=_{def}\ PLUS(VERY(F))$
2. $HIGHLY'(F)$
   $=_{def}\ MINUS(VERY(VERY(F)))$

Zur besseren Unterscheidung werden wir die zweite Variante $HIGHLY'$ fortan $EXTREMELY$ nennen, definieren also

$2'$ $EXTREMELY(F) =_{def} MINUS(VERY(VERY(F)))$

Folgerung 10.5.3

1. $HIGHLY(F)(x) = (F(x))^{2.5} = (F(x))^{\frac{5}{2}}$
2. $EXTREMELY(F)(x) = (F(x))^3$

Aufgabe 10.5.1 *Man bestimme Relationen zwischen den eingeführten Modifikatoren.*

Beispiel Es gilt für alle Fuzzy-Mengen $F : U \to \langle 0, 1 \rangle$:

$$MOL(EXTREMELY(F)) = MINUS(VERY(F))$$

Aufgabe 10.5.2 *Man bestimme Relationen zwischen den eingeführten Modifikatoren und T-Normen bzw. S-Normen*

Beispiel Sei $(F \circledast G)(x) =_{def} F(x) \cdot G(x)$, d. h. $\circledast$ ist der Nicht-Standard-Durchschnitt, definiert durch die T-Norm „algebraische Konjunktion". Dann gilt für beliebige $F : U \to \langle 0, 1 \rangle$:

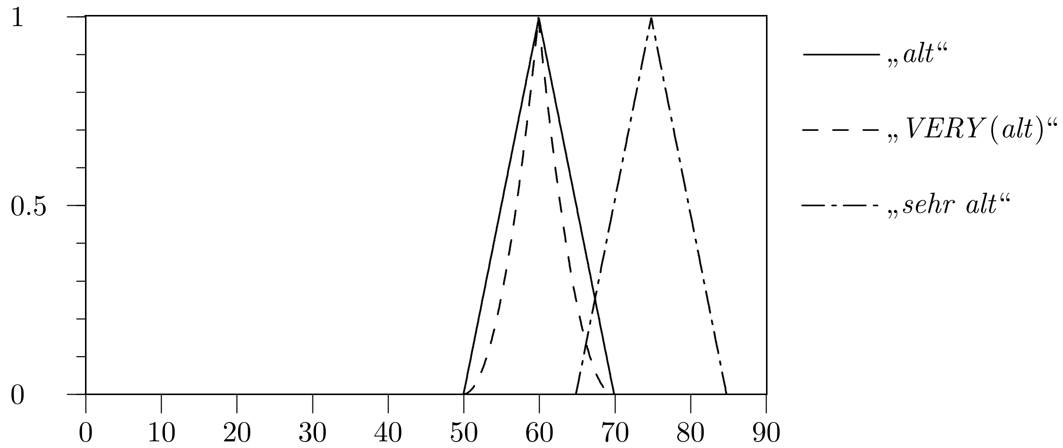
$$VERY(F) = F \circledast F.$$

Aufgabe 10.5.3 *Gilt für die in Abschnitt 10.5 eingeführten Modifikatoren ein dem* **Theorem 10.3.1** *analoges Theorem?*

10.6 Innere Modifikatoren

Grundlegend wichtig in Regelbasierten Anwendungen, z. B. in *Fuzzy*-Control.

Beispiel



Man kann „*sehr alt*" **nicht** erzeugen in der Form

$$sehr\ alt = VERY(alt),$$

d. h.

$$sehr\ alt(x) = (alt(x))^2.$$

Erzeugung durch „*inneren*“ Modifikator möglich:

$$sehr\ alt(x) = alt(\mu(x)),$$

wobei $\mu(x) = x - 15$, d. h.

$$sehr\ alt(x) = alt(x - 15)$$

11. Quantoren

11.1 Einleitung

In seiner “theory of dispositions” begann L. A. ZADEH die Untersuchung von Quantoren im Rahmen der Fuzzy-Logik (siehe [57–63]), wobei seine Aufmerksamkeit auf „echte“ Fuzzy-Quantoren wie z. B. *MOST*, *ALMOST-ALL*, *ALMOST-ALWAYS*, *USUALLY*, *RARELY*, *FEW*, *SMALL-FRACTION* etc. gerichtet war. Wir sprechen im vorliegenden Fall von „echten“ Fuzzy-Quantoren, weil sie offenbar keine (oder nur triviale) Gegenstücke in der zweiwertigen Logik haben. In dieser Hinsicht unterscheiden sie sich grundsätzlich von Quantoren wie z. B. *FÜR-ALLE* oder *ES-GIBT-EIN*, die sowohl in der zweiwertigen Logik als auch in der Fuzzy-Logik (allgemeiner, in der mehrwertigen Logik schlechthin) sinnvoll interpretierbar sind.

Weitere wichtige Beiträge zu Quantoren in der Fuzzy-Logik stammen von R. R. YAGER (siehe [46–52]).

Sieht man die genannten sowie weitere Arbeiten zum Thema „Fuzzy-Quantoren“ durch, so vermißt man Diskussionen bzw. Referenzen zu zwei Fakten:

Erstens fehlen Referenzen zum Begriff des allgemeinen Quantors, wie er von A. MOSTOWSKI Mitte der fünfziger Jahre im Rahmen der zweiwertigen Logik entwickelt worden ist [31]. Auch fehlen Hinweise auf die umfangreichen Untersuchungen und Resultate zu allgemeinen Quantoren, die in den letzten etwa 35 Jahren unternommen und erzielt worden sind, von denen manche durchaus für die Fuzzy-Logik Bedeutung haben, z. B. das detaillierte Studium des Quantors *FAST-ALLE*. Der interessierte Leser findet einen guten Überblick z. B. in [6].

Zweitens vermißt man in den bisherigen Arbeiten über Fuzzy-Quantoren eine prinzipielle Einbeziehung auch unendlicher Universa, also eine Definition über beliebigen Grundbereichen (siehe z. B. [60, page 756]). Der Grund dafür ist offenbar, daß bei vielen dieser Betrachtungen das Konzept des „sigma-count“ bzw. des „relative sigma-count“ verwendet wird, was bei unendlichen Universa zu Summen mit abzählbar unendlich vielen oder gar überabzählbar unendlich vielen Summanden führt, für welche der Summationsprozeß nicht konvergiert bzw. gar nicht definiert ist.

Man könnte nun annehmen, die prinzipielle Einschränkung auf endliche Universa reiche für Theorie und Praxis aus.

Eine solche Einschränkung ist aus praktischer Sicht sehr nachdrücklich abzulehnen; denn sonst könnten viele Anwendungsprobleme nicht erfaßt werden.

Aber auch aus theoretischer Sicht sind Einwendungen gegen eine Beschränkung auf endliche Universa zu formulieren. Bekannt ist, daß schon die zweiwertige Prädikatenlogik der ersten Stufe in beliebigen nicht-leeren, aber **endlichen** Universa wesentlich komplizierter ist als in **beliebigen** (also auch unendlichen) nicht-leeren Bereichen. Dazu verweisen wir auf die folgenden klassischen Resultate (aus der zweiwertigen Prädikatenlogik der ersten Stufe). Wir nehmen an, daß die zugrunde liegende Signatur hinreichend „reichhaltig“ ist, z. B. ein binäres Prädikatensymbol oder zwei einstellige Funktionssymbole und das

Gleichheitszeichen für eine gegebene Sorte der Signatur enthält. Dann wissen wir:

Die Menge der in **jedem** nicht-leeren Universum allgemeingültigen Ausdrücke ist unentscheidbar [11], jedoch rekursiv aufzählbar [17]. Die Menge der in **jedem** nicht-leeren **endlichen** Universum allgemeingültigen Ausdrücke ist unentscheidbar, sogar **nicht** rekursiv aufzählbar [23, 43].

In der Fuzzy-Logik, genauer für den kontinuierlich-wertigen ŁUKASIEWICZschen Prädikatenkalkül der ersten Stufe, liegen die Verhältnisse wesentlich komplizierter, wie die folgenden Beispiele zeigen, falls über die gewählte Signatur die oben formulierten Voraussetzungen gelten sollen.

Die Menge der in **jedem** nicht-leeren Universum allgemeingültigen Ausdrücke ist unentscheidbar, **sogar** nicht axiomatisierbar. Hieraus kann man die Vermutung ableiten, daß die Menge der in jedem nicht-leeren **endlichen** Universum im ŁUKASIEWICZschen Sinne allgemeingültigen Ausdrücke eine „höhere Komplexität“ (wir müssen in diesem Rahmen darauf verzichten, diesen Terminus exakt zu definieren) hat als die entsprechende Menge der zweiwertigen Logik. Auf Grund dieser Resultate kann man vermuten, daß in der Fuzzy-Logik die Beschränkung auf endliche Universa weitere Schwierigkeiten mit sich bringt als sie ohnehin durch die unendliche Menge von Wahrheitswerten impliziert werden.

11.2 Allgemeine Fuzzy-Quantoren

Wir beginnen mit der Festlegung einiger Notationen.

Gegeben seien beliebige Mengen X und Y. Wir bezeichnen durch *card* X die Kardinalzahl von X, durch $\mathfrak{P}X$ die übliche Potenzmenge von X, d. h. die Menge aller („klassischen“ oder „scharfen“) Teilmengen von X sowie durch X^Y die Menge aller Abbildungen $\varphi : Y \to X$, d. h. die Menge aller (eindeutigen) Abbildungen φ von Y in X.

Ferner sei $\langle 0,1\rangle$ die Menge aller reellen Zahlen r mit $0 \leqq r \leqq 1$. Wir betrachten $\langle 0,1\rangle$ als die Menge aller Wahrheitswerte der zugrunde liegenden ŁUKASIEWICZschen (kontinuierlichwertigen) Logik. Demgemäß ist für eine nicht-leere Menge U (Universum) $\langle 0,1\rangle^U$ die Menge aller Fuzzy-Mengen $F : U \to \langle 0,1\rangle$ über U, wobei wir darauf hinweisen, daß wir zwischen einer Fuzzy-Menge F und deren „Zugehörigkeitsfunktion“ μ_F nicht unterscheiden, weil eine solche Unterscheidung offenbar begrifflich unsinnig ist.

Die („klassische“) Menge aller Wahrheitswerte, die eine Fuzzy-Menge $F : U \to \langle 0,1\rangle$ annehmen kann, wird wie üblich durch $\{F(x)\,|\,x \in U\}$ angedeutet.

In der zweiwertigen Logik verwenden wir die natürliche Zahl 0 bzw. 1 als den Wahrheitswert *FALSCH* bzw. *WAHR*, demgemäß ist $\{0,1\}$ mit $\{0,1\} \subseteqq \langle 0,1\rangle$ die Menge der Wahrheitswerte der zweiwertigen Logik.

MOSTOWSKI [31] betrachtet nun die Menge $\{0,1\}^U$ aller einstelligen zweiwertigen Prädikate $\Pi : U \to \{0,1\}$ über U und definiert dann einen allgemeinen Quantor $QUANT$ über U als (zweiwertiges) Prädikat *zweiter* Stufe, d. h. in der Form $QUANT : \{0,1\}^U \to \{0,1\}$.

Diesen Gedanken übernehmen wir und werden dementsprechend unter einem allgemeinen Fuzzy-Quantor über U ein Fuzzy-Prädikat zweiter Stufe, d. h. eine Fuzzy-Menge über $\langle 0,1\rangle^U$, also eine Abbildung $QUANT : \langle 0,1\rangle^U \to \langle 0,1\rangle$ verstehen.

Bei Durchsicht der Literatur kann man entsprechende Ideen schon bei L. A. ZADEH finden [57–59]. Sie sind dort jedoch weder ausgearbeitet, noch wird ein Zusammenhang zum Ansatz von A. MOSTOWSKI hergestellt und auf die folgenden Arbeiten hingewiesen.

Beim Aufbau einer allgemeinen Theorie von Fuzzy-Quantoren stößt man auf das Problem, wie für eine beliebige Fuzzy-Menge eine Kardinalzahl zu definieren ist. Dazu gibt es in der Literatur (siehe z. B. [24, 32]) eine Reihe von Ansätzen, die jedoch häufig nur für Fuzzy-Mengen $F : U \to \langle 0,1\rangle$ mit endlichem Träger $\{x\,|\,x \in U \text{ und } F(x) > 0\}$ sinnvoll sind. Wir wollen diese Ansätze hier nicht diskutieren, da wir für unsere Zwecke nicht wissen müssen, **was** die Kardinalzahl *card* F einer Fuzzy-Menge F **ist**, sondern es **ausreicht**, zu definieren, wann beliebige Fuzzy-Mengen $F : U \to \langle 0,1\rangle$ und $G : V \to \langle 0,1\rangle$ **dieselbe** Kardinalzahl **haben**, wobei die Universa nicht notwendig übereinstimmen müssen. Auf diese Weise werden wir zu einer binären Relation „Kardinalzahläquivalenz" für Fuzzy-Mengen F und G entsprechend der nachfolgenden Definition geführt, bei der es entsprechend unserer Intention wesentlich ist, daß keine Einschränkungen bezüglich der Träger $\{x|x \in U \text{ und } F(x) > 0\}$ und $\{y|y \in V \text{ und } G(y) > 0\}$ erforderlich sind.

Definition 11.2.1
F und G heißen kardinalzahl-äquivalent (kurz: $F \approx_{card} G$)
$=_{def}$ *Für jedes $c \in \langle 0,1\rangle$ gilt die Gleichung*

$$card\,\{x|x \in U \text{ und } F(x) = c\} = card\,\{y|\ y \in V \text{ und } G(y) = c\}\,.$$

Unmittelbar ist klar, daß diese Äquivalenzdefinition mit dem klassischen Kardinalzahlbegriff für scharfe Mengen kompatibel ist; denn für $F : U \to \{0,1\}$ und $G : V \to \{0,1\}$ mit $\hat{F} =_{def} \{x|\ x \in U \text{ und } F(x) = 1\}$ und $\hat{G} =_{def} \{y|\ y \in V \text{ und } G(y) = 1\}$ gilt:

$$F \approx_{card} G \text{ genau dann, wenn } card\,\hat{F} = card\,\hat{G}.$$

Ein weiteres wichtiges Prinzip zur Klassifikation allgemeiner Quantoren ist das der *Extensionalität*.

Wir übernehmen dieses Prinzip aus der Aussagenlogik, wo es wie folgt formuliert werden kann. Gegeben sei eine Menge $AUSS$ von „Aussagen" sowie eine Bewertungsfunktion $\omega : AUSS \to \Omega$, wobei Ω die zugrunde gelegte Menge von Wahrheitswerten ist. Eine n-stellige eindeutige Abbildung α von $AUSS$ in $AUSS$, auch Aussagenfunktion genannt, heißt nun *extensional* genau dann, wenn für jedes $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n \in AUSS$ gilt:

$$\text{Wenn } \omega(A_1) = \omega(B_1), \ldots, \omega(A_n) = \omega(B_n), \text{ so } \omega(\alpha(A_1, \ldots, A_n)) = \omega(\alpha(B_1, \ldots, B_n)).$$

Diese Bedingung besagt offenbar, daß der Wahrheitswert $\omega(\alpha(A_1, \ldots, A_n))$ der „zusammengesetzten" Aussage $\alpha(A_1, \ldots, A_n)$ allein von den Wahrheitswerten $\omega(A_1), \ldots, \omega(A_n)$ der Aussagen $A_1, \ldots, A_n$, jedoch nicht von den Aussagen $A_1, \ldots, A_n$ selbst abhängt.

Die Bedingung $\omega(A_1) = \omega(B_1), \ldots, \omega(A_n) = \omega(B_n)$ übertragen wir für beliebige Fuzzy-Mengen $F : U \to \langle 0,1\rangle$ und $G : U \to \langle 0,1\rangle$ durch die folgende Isomorphie-Definition.

Definition 11.2.2
F und G heißen isomorph (kurz: $F \approx_{isom} G$)
$=_{def}$ *Es gibt eine eineindeutige Abbildung h von U auf V (Bijektion), so daß für alle $x \in U$ gilt: $F(x) = G(h(x))$.*

Mit den eingeführten Begriffsbildungen formulieren wir nun die folgende grundlegende Definition. Dazu seien beliebige Fuzzy-Mengen $F : U \to \langle 0,1\rangle$ und $G : V \to \langle 0,1\rangle$ gegeben.

Definition 11.2.3

1. *$QUANT$ heiße allgemeiner Fuzzy-Quantor über U*
   $=_{def}$ *$QUANT : \langle 0,1\rangle^U \to \langle 0,1\rangle$.*

2. *$QUANT$ heiße kardinalzahl-invarianter Fuzzy-Quantor über U*
   $=_{def}$ *$QUANT$ ist ein allgemeiner Fuzzy-Quantor über U und für jede Fuzzy-Menge F und G über U gilt:*

$$\text{Wenn } F \approx_{card} G, \text{ so } QUANT(F) = QUANT(G).$$

3. *QUANT heiße extensionaler Fuzzy-Quantor über U*
$=_{def}$ *QUANT ist ein allgemeiner Fuzzy-Quantor über U und für jede Fuzzy-Menge F und G über U gilt:*

$$\text{Wenn } F \approx_{isom} G, \text{ so } QUANT(F) = QUANT(G).$$

Beispiele und Folgerungen

1. Obwohl die Motivationen zur Definition der Kardinalzahl-Äquivalenz und der Isomorphie von Fuzzy-Mengen sich sehr unterscheiden, sind beide Begriffsbildungen gleichwertig, d. h. für beliebige nicht-leere Universa U und V sowie für beliebige Fuzzy-Mengen $F : U \to \langle 0,1 \rangle$ und $G : V \to \langle 0,1 \rangle$ gilt: $F \approx_{card} G$ genau dann, wenn $F \approx_{isom} G$. Daraus folgt offenbar, daß die Klasse der kardinalzahl-invarianten Fuzzy-Quantoren über U mit der Klasse der extensionalen Fuzzy-Quantoren über U zusammenfällt.

2. Kardinalzahl-invariante Quantoren sind aus der zweiwertigen Logik bekannt als Quantoren der Form „es gibt mindestens (höchstens bzw. genau) n Elemente x, so daß“ (n natürliche Zahl mit $n \geqq 1$). Auch die Quantoren „es gibt mindestens (höchstens bzw. genau) abzählbar-unendlich viele Elemente x, so daß“ und „für fast alle x gilt“ sowie „es gibt unendlich viele x, so daß“ sind kardinalzahl-invariant.

3. Offenbar erhält man unmittelbar auf Grundlage von Definition 11.2.3.3 die Folgerung: $QUANT$ ist ein extensionaler Quantor über U genau dann, wenn es ein Q gibt, so daß

   3.1. Q ist eine eindeutige Abbildung von der Menge $\mathfrak{P}_m \langle 0,1 \rangle$ aller Multiteilmengen von $\langle 0,1 \rangle$ in $\langle 0,1 \rangle$ und

   3.2. für jede Fuzzy-Menge F über U gilt:

   $$QUANT(F) = Q \underset{m}{\{} F(x) \,|\, x \in U \underset{m}{\}}$$

   Hierbei ist $\underset{m}{\{} F(x) \,|\, x \in U \underset{m}{\}}$ als Multimenge zu verstehen, d. h. Werte $F(x)$ kommen so oft vor, wie sie durch $x \in U$ erzeugt werden. Will man den Begriff der Multimenge vermeiden, darf man nur solche Fuzzy-Mengen $F : U \to \langle 0,1 \rangle$ zulassen, für die aus $F(x) = F(x')$ mit $x, x' \in U$ die Gleichung $x = x'$ folgt. In diesem Fall ist $\underset{m}{\{} F(x) \,|\, x \in U \underset{m}{\}}$ eine Menge im üblichen Sinne.

4. Die Fuzzy-Quantoren ALL und EX, definiert über U durch

   $$ALL(F) =_{def} \mathit{Inf}\, \{F(x) \,|\, x \in U\}$$
   $$EX(F) =_{def} \mathit{Sup}\, \{F(x) \,|\, x \in U\}$$

   sind kardinalzahl-invariant und somit auch extensional.

5. Fordert man für einen kardinalzahl-invarianten Quantor $QUANT$ zusätzlich die Umkehrung der definierenden Bedingung, d. h.

   $$\text{Wenn } QUANT(F) = QUANT(G), \text{ so } F \approx_{card} G$$

   für jede Fuzzy-Menge F und G über U, so wollen wir $QUANT$ einen Kardinalitätsquantor nennen.

   Offenbar sind die in Punkt 2 genannten Quantoren „es gibt genau n Elemente x, so daß“ und „es gibt genau abzählbar-unendlich viele x, so daß“ Kardinalitätsquantoren, während die übrigen genannten diese Eigenschaft nicht haben.

11.3 T-Quantoren und S-Quantoren

In Theorie und Anwendungen spielen T-Normen und S-Normen eine hervorragende Rolle, und zwar als Verallgemeinerungen der Funktoren *min* und *max*, die in der Fuzzy-Logik zur Interpretation von $\wedge$ (und) und $\vee$ (oder) dienen. Um Unklarheiten zu vermeiden, schreiben wir hier die entsprechenden Definitionen noch einmal auf:

Definition 11.3.1

1. *Eine Abbildung* $\tau : \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ *heiße T-Norm* $=_{def}$ τ *erfüllt die folgenden Axiome:*

   TN$_1$. *Für jedes* $r \in \langle 0,1\rangle$ *gilt:* $\tau(r,1) = r$.

   TN$_2$. *Für jedes* $r \in \langle 0,1\rangle$ *gilt:* $\tau(r,0) = 0$.

   MON (Monotonie). *Für jedes* $r, r', s, s' \in \langle 0,1\rangle$ *gilt:*

   $$\text{Wenn } r \leqq r' \text{ und } s \leqq s', \text{ so } \tau(r,s) \leqq \tau(r',s').$$

   KOM (Kommutativität). *Für jedes* $r, s \in \langle 0,1\rangle$ *gilt:*

   $$\tau(r,s) = \tau(s,r).$$

   ASS (Assoziativität). *Für jedes* $r, s, t \in \langle 0,1\rangle$ *gilt:*

   $$\tau(r, \tau(s,t)) = \tau(\tau(r,s), t).$$

2. *Eine Abbildung* $\sigma : \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ *heiße S-Norm* $=_{def}$ σ *erfüllt die folgenden Axiome:*

   SN$_1$. *Für jedes* $r \in \langle 0,1\rangle$ *gilt:* $\sigma(r,1) = 1$.

   SN$_2$. *Für jedes* $r \in \langle 0,1\rangle$ *gilt:* $\sigma(r,0) = r$.

   MON, KOM, ASS *wie in der Definition von* τ.

Zur Formulierung des folgenden Theorems verwenden wir die *schwach-drastische Konjunktion* et_{sd} und die *schwach-drastische Alternative* vel_{sd}, die für jedes $r, s \in \langle 0,1\rangle$ wie folgt definiert werden.

Definition 11.3.2

1. $$\begin{aligned} et_{\mathrm{sd}}(r,1) &=_{def} r \\ et_{\mathrm{sd}}(1,s) &=_{def} s \\ et_{\mathrm{sd}}(r,s) &=_{def} 0, \text{ falls } r < 1 \text{ und } s < 1 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} vel_{\mathrm{sd}}(r,0) &=_{def} r \\ vel_{\mathrm{sd}}(0,s) &=_{def} s \\ vel_{\mathrm{sd}}(r,s) &=_{def} 1, \text{ falls } 0 < r \text{ und } 0 < s \end{aligned}$$

Aus der Literatur bekannt sind die nachstehende Folgerung sowie die **Theoreme** 11.3.2 und 11.3.3.

Folgerung 11.3.1

1. *Die Funktionen* et_{sd} *und min sind T-Normen.*

2. *Die Funktionen* vel_{sd} *und max sind S-Normen.*

Theorem 11.3.2

1. *Ist τ eine T-Norm, so gilt für jedes $r, s \in \langle 0,1 \rangle$:*

$$et_{\text{sd}}(r,s) \leqq \tau(r,s) \leqq min(r,s)$$

2. *Ist σ eine S-Norm, so gilt für jedes $r, s \in \langle 0,1 \rangle$:*

$$max(r,s) \leqq \sigma(r,s) \leqq vel_{\text{sd}}(r,s)$$

Gegeben sei $\varphi : \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle \to \langle 0,1 \rangle$.

Definition 11.3.3
φ heiße ***idempotent***
$=_{def}$ *Für jedes $r \in \langle 0,1 \rangle$ gilt: $\varphi(r,r) = r$.*

Theorem 11.3.3

1. *Ist τ eine idempotente T-Norm, so gilt für jedes $r, s \in \langle 0,1 \rangle$: $\tau(r,s) = min(r,s)$.*

2. *Ist σ eine idempotente S-Norm, so gilt für jedes $r, s \in \langle 0,1 \rangle$: $\sigma(r,s) = max(r,s)$.*

Wir übertragen nun diese Betrachtungen auf Fuzzy-Quantoren. Dabei verwenden wir die folgenden Notationen bzw. Begriffsbildungen.

Gegeben seien die beliebigen Fuzzy-Mengen F und G über U, d. h. $F, G : U \to \langle 0,1 \rangle$.

Die „scharfe" Teilmengenbeziehung $F \subseteqq G$ wird definiert durch die Bedingung, daß für jedes $x \in U$ gilt: $F(x) \leqq G(x)$.

Eine Abbildung $\Pi : U \to U$ heiße *Permutation* von U (auch Bijektion genannt), falls sie eine Abbildung auf U (Surjektion) und eindeutig umkehrbar (Injektion) ist.

Gegeben seien eine beliebige Fuzzy-Menge $F : U \to \langle 0,1 \rangle$ sowie eine Permutation Π von U. Wir definieren nun eine Fuzzy-Menge $\Pi(F)$ über U wie folgt:

$$\Pi(F)(x) =_{def} F(\Pi(x)), \text{ wobei } x \in U.$$

Definition 11.3.4

1. *Ein allgemeiner Fuzzy-Quantor*

$$TQ : \langle 0,1 \rangle^U \to \langle 0,1 \rangle$$

über U heiße T-Quantor über U
$=_{def}$ *TQ erfüllt die folgenden Axiome:*

$\mathsf{TQ_1}$. *Für jedes $F : U \to \langle 0,1 \rangle$ und jedes $x \in U$ gilt: Ist $F(y) = 1$ für alle $y \in U$ mit $y \neq x$, so*

$$TQ(F) = F(x)$$

$\mathsf{TQ_2}$. *Für jedes $F : U \to \langle 0,1 \rangle$ und jedes $x \in U$ gilt: Ist $F(x) = 0$, so*

$$TQ(F) = 0$$

MON. *Für jedes $F, G : U \to \langle 0,1 \rangle$ gilt:*

$$\text{Wenn } F \subseteqq G, \text{ so } TQ(F) \leqq TQ(G).$$

KOM/ASS. *Für jedes $F : U \to \langle 0,1 \rangle$ und jedes $\Pi : U \to U$ gilt: Ist Π eine Permutation von U, so $TQ(\Pi(F)) = TQ(F)$.*

2. *Ein allgemeiner Fuzzy-Quantor*

$$SQ : \langle 0,1\rangle^U \to \langle 0,1\rangle$$

über U *heiße S-Quantor über* U
$=_{def}$ SQ *erfüllt die folgenden Axiome:*

$\mathsf{SQ_1}$. *Für jedes* $F : U \to \langle 0,1\rangle$ *und jedes* $x \in U$ *gilt: Ist* $F(x) = 1$, *so*

$$SQ(F) = 1$$

$\mathsf{SQ_2}$. *Für jedes* $F : U \to \langle 0,1\rangle$ *und jedes* $x \in U$ *gilt: Ist* $F(y) = 0$ *für alle* $y \in U$ *mit* $y \neq x$, *so*

$$SQ(F) = F(x)$$

MON und **KOM/ASS** *wie in der Definition von* TQ.

Unmittelbar ist klar, daß die formulierten Axiome Verallgemeinerungen der entsprechenden Axiome für T- bzw. S-Normen sind. Insbesondere sind in KOM/ASS die Kommutativität (siehe Axiom KOM) und die Assoziativität (siehe Axiom ASS) zusammengefaßt.

Folgerung 11.3.4
Ist $QUANT$ *ein T-Quantor oder ein S-Quantor, so ist* $QUANT$ *kardinalzahl-invariant.*

In Analogie zur Definition der Funktionen et_{sd} und vel_{sd} definieren wir den *schwach drastischen All-Quantor* ALL_{sd} und den *schwach drastischen Existenz-Quantor* EX_{sd} wie folgt.

Definition 11.3.5

1. $$ALL_{\mathrm{sd}}(F) =_{def} \begin{cases} F(x) & \text{, falls für jedes } y \in U \text{ mit } y \neq x \text{ gilt } F(y) = 1. \\ 0 & \text{, falls es } x, y \in U \text{ gibt} \\ & \quad \text{mit } x \neq y \text{ und } F(x) < 1 \text{ und } F(y) < 1. \end{cases}$$

2. $$EX_{\mathrm{sd}}(F) =_{def} \begin{cases} F(x) & \text{, falls für jedes } y \in U \text{ mit } y \neq x \text{ gilt } F(y) = 0. \\ 1 & \text{, falls es } x, y \in U \text{ gibt} \\ & \quad \text{mit } x \neq y \text{ und } 0 < F(x) \text{ und } 0 < F(y). \end{cases}$$

Folgerung 11.3.5

1. *Die Abbildungen* ALL_{sd} *und* ALL *sind T-Quantoren.*
2. *Die Abbildungen* EX_{sd} *und* EX *sind S-Quantoren.*

Theorem 11.3.6

1. *Ist* TQ *ein T-Quantor über* U, *so gilt für jedes* $F : U \to \langle 0,1\rangle$:

$$ALL_{\mathrm{sd}}(F) \leqq TQ(F) \leqq ALL(F).$$

2. *Ist* SQ *ein S-Quantor über* U, *so gilt für jedes* $F : U \to \langle 0,1\rangle$:

$$EX(F) \leqq SQ(F) \leqq EX_{\mathrm{sd}}(F).$$

Gegeben sei ein allgemeiner Fuzzy-Quantor $QUANT$ über U, d. h.

$$QUANT : \langle 0,1\rangle^U \to \langle 0,1\rangle$$

Definition 11.3.6
*$QUANT$ heiße **idempotent***
$=_{def}$ *Für jedes $F : U \to \langle 0,1\rangle$ und jedes $c \in \langle 0,1\rangle$ gilt:*

$$\textit{Wenn } F(x) = c \textit{ für alle } x \in U, \textit{ so } \; QUANT(F) = c.$$

Theorem 11.3.7

1. *Ist TQ ein idempotenter T-Quantor über U, so gilt für jedes $F : U \to \langle 0,1\rangle$:*

$$TQ(F) = \mathit{Inf}\,\{F(x)\,|\,x \in U\} = ALL(F)$$

2. *Ist SQ ein idempotenter S-Quantor über U, so gilt für jedes $F : U \to \langle 0,1\rangle$:*

$$SQ(F) = \mathit{Sup}\,\{F(x)\,|\,x \in U\} = EX(F).$$

11.4 Über die gegenseitige Erzeugbarkeit von T-Normen und T-Quantoren bzw. S-Normen und S-Quantoren

Ausgangspunkt der Untersuchungen in diesem Abschnitt ist die Tatsache, daß sich in der zweiwertigen Logik der All-Quantor als iterierte Konjunktion und der Existenz-Quantor als iterierte Alternative auffassen läßt. In der betrachteten ŁUKASIEWICZschen Logik besteht ein entsprechender Zusammenhang zwischen dem Operator *Inf* und der (zweistelligen) Funktion *min* einerseits und zwischen dem Operator *Sup* und der (zweistelligen) Funktion *max* andererseits.

Wir übertragen diese Idee nun auf beliebige T-Normen bzw. S-Normen und erhalten auf diesem Wege verallgemeinerte *All*-Quantoren bzw. *Existenz*-Quantoren, die durch die gegebene T-Norm bzw. S-Norm erzeugt werden.

Gegeben seien eine beliebige T-Norm τ und eine beliebige S-Norm σ.

Als wesentliche Hilfsmittel für die Erzeugung eines verallgemeinerten *All*-Quantors ALL_τ durch die T-Norm τ und eines verallgemeinerten *Existenz*-Quantors EX_σ durch die S-Norm σ definieren wir zunächst mittels τ eine Funktionenfolge $(\tau^n)_{n=1,2,\ldots}$ sowie mittels σ eine Funktionenfolge $(\sigma^n)_{n=1,2,\ldots}$, wobei τ^n und σ^n jeweils eine Abbildung von $\langle 0,1\rangle^n \to \langle 0,1\rangle$ ist. Diese Funktionenfolgen werden induktiv über n wie folgt definiert, wobei $r_1, \ldots, r_n, \ldots \in \langle 0,1\rangle$:

Definition 11.4.1

1.
$$\tau^1(r_1) =_{def} r_1$$
$$\tau^{n+1}(r_1, \ldots, r_n, r_{n+1}) =_{def} \tau\,(\tau^n(r_1, \ldots, r_n), r_{n+1})$$

2.
$$\sigma^1(r_1) =_{def} r_1$$
$$\sigma^{n+1}(r_1, \ldots, r_n, r_{n+1}) =_{def} \sigma\,(\sigma^n(r_1, \ldots, r_n), r_{n+1})$$

Es sei nun eine beliebige Fuzzy-Menge F über U gegeben.

Definition 11.4.2

1.
$$ALL_\tau(F) =_{def} \mathit{Inf}\,\{\tau^n(F(x_1), \ldots, F(x_n))\,|\,n \geqq 1 \textit{ und } x_1, \ldots, x_n \in U\}$$

2.
$$EX_\sigma(F) =_{def} \mathit{Sup}\,\{\sigma^n(F(x_1), \ldots, F(x_n))\,|\,n \geqq 1 \textit{ und } x_1, \ldots, x_n \in U\}$$

Diese Definition läßt sich dadurch rechtfertigen, daß für jedes $n = 1, 2, \dots$ gilt

$$\tau^{n+1}(r_1, \dots, r_n, r_{n+1}) \leqq \tau^n(r_1, \dots, r_n)$$

und

$$\sigma^{n+1}(r_1, \dots, r_n, r_{n+1}) \geqq \sigma^n(r_1, \dots, r_n).$$

Eine weitere Rechtfertigung ergibt sich aus der nachstehenden

Folgerung 11.4.1

1. $ALL_{min} = ALL$
2. $EX_{max} = EX$
3. $ALL_{et_{\mathrm{sd}}} = ALL_{sd}$
4. $EX_{vel_{\mathrm{sd}}} = EX_{sd}$

Das folgende Theorem gibt eine endgültige Rechtfertigung für **Definition 11.4.2**.

Theorem 11.4.2

1. *ALL_τ ist ein extensionaler T-Quantor.*
2. *EX_σ ist ein extensionaler S-Quantor.*

An dieses Theorem schließen sich zwei Fragen an:

Frage 1. Ist **jeder** T-Quantor bzw. S-Quantor durch eine geeignet gewählte T-Norm bzw. S-Norm erzeugbar?

Frage 2. Ist die durch die **Definition 11.4.2** beschriebene Erzeugungsprozedur eindeutig umkehrbar, d. h. ist jeder extensionale T-Quantor bzw. extensionale S-Quantor durch höchstens eine T-Norm bzw. S-Norm erzeugbar?

Beide Fragen werden im folgenden positiv beantwortet.

Dazu zeigen wir als erstes, wie durch einen extensionalen T-Quantor TQ eine T-Norm τ_{TQ} und aus einem extensionalen S-Quantor SQ eine S-Norm σ_{SQ} erzeugt werden kann. Dazu definieren wir für beliebige $r, s, t \in \langle 0, 1\rangle$:

Definition 11.4.3

1. *$\tau_{TQ}(r, s) =_{def} t$ genau dann, wenn es eine Fuzzy-Menge $F : U \to \langle 0, 1\rangle$ sowie Elemente $x, y \in U$ gibt, so daß $r = F(x)$ und $s = F(y)$ und $t = TQ(F)$ und $F(z) = 1$ für alle $z \in U$ mit $z \neq x$ und $z \neq y$.*
2. *$\sigma_{SQ}(r, s) =_{def} t$ genau dann, wenn es eine Fuzzy-Menge $F : U \to \langle 0, 1\rangle$ sowie Elemente $x, y \in U$ gibt, so daß $r = F(x)$ und $s = F(y)$ und $t = SQ(F)$ und $F(z) = 0$ für alle $z \in U$ mit $z \neq x$ und $z \neq y$.*

Aus dieser Definition kann man unmittelbar ablesen, daß die Funktionen τ_{TQ} und σ_{SQ} nur dann total, d. h. überall definiert, sind, wenn U mindestens zwei Elemente enthält. Enthält nämlich U nur genau ein Element, dann ist für $r, s \in \langle 0, 1\rangle$ mit $r \neq s$ eine Darstellung in der Form $r = F(x)$ und $s = F(y)$ nicht möglich.

Außerdem ist klar, daß diese Funktionen im allgemeinen nur dann eindeutig sind, falls die Quantoren TQ bzw. SQ extensional sind — eine Tatsache, die die Wichtigkeit des Konzepts der Extensionalität unterstreicht.

Die Axiome TN_1, TN_2, MON, KOM, ASS für τ_{TQ} bzw. SN_1, SN_2, MON, KOM und ASS für σ_{SQ} werden aus den entsprechenden Axiomen für TQ bzw. SQ hergeleitet.

Somit erhalten wir

Theorem 11.4.3

1. *Ist* $card\, U \geqq 2$ *und ist* TQ *ein extensionaler T-Quantor, so ist* τ_{TQ} *eine T-Norm.*

2. *Ist* $card\, U \geqq 2$ *und ist* SQ *ein extensionaler S-Quantor, so ist* σ_{SQ} *eine S-Norm.*

Auf Grund dieses Theorems können wir durch einen gegebenen extensionalen T-Quantor bzw. S-Quantor eindeutig eine T-Norm bzw. S-Norm erzeugen (falls außerdem die triviale Voraussetzung $card\, U \geqq 2$ erfüllt ist).

Somit schließen sich, entsprechend den Fragen 1 und 2, die folgenden Fragen an.

Frage 3. Ist jede T-Norm bzw. jede S-Norm durch einen geeignet gewählten extensionalen T-Quantor bzw. extensionalen S-Quantor erzeugbar?

Frage 4. Ist die durch **Definition 11.4.3** beschriebene Erzeugungsprozedur eindeutig umkehrbar, d. h. ist jede T-Norm bzw. jede S-Norm durch höchstens einen extensionalen T-Quantor bzw. extensionalen S-Quantor erzeugbar?

Frage 5. Welches Resultat erhält man, wenn man die beschriebenen Erzeugungsprozeduren hintereinander ausführt, d. h.

Fall 1. $$\tau \Rightarrow ALL_\tau \Rightarrow \tau_{(ALL_\tau)}$$

bzw. $$\sigma \Rightarrow EX_\sigma \Rightarrow \sigma_{(EX_\sigma)}$$

Fall 2. $$TQ \Rightarrow \tau_{TQ} \Rightarrow ALL_{(\tau_{TQ})}$$

bzw. $$SQ \Rightarrow \sigma_{SQ} \Rightarrow EX_{(\sigma_{SQ})}$$

Die folgenden zwei Theoreme geben eine komplette Antwort auf die gestellten Fragen 1 bis 5.

Theorem 11.4.4

1. *Ist* $card\, U \geqq 2$ *und ist* τ *eine T-Norm, so gilt:*

   1.1. ALL_τ *ist ein extensionaler T-Quantor und*
   1.2. $\tau_{(ALL_\tau)}$ *ist eine T-Norm und*
   1.3. $\tau_{(ALL_\tau)} = \tau$.

2. *Ist* $card\, U \geqq 2$ *und ist* σ *eine S-Norm, so gilt:*

   2.1. EX_σ *ist ein extensionaler S-Quantor und*
   2.2. $\sigma_{(EX_\sigma)}$ *ist eine S-Norm und*
   2.3. $\sigma_{(EX_\sigma)} = \sigma$.

Theorem 11.4.5

1. *Ist* $card\, U \geqq 2$ *und ist* TQ *ein extensionaler T-Quantor, so gilt:*

   1.1. τ_{TQ} *ist eine T-Norm und*
   1.2. $ALL_{(\tau_{TQ})}$ *ist ein extensionaler T-Quantor und*
   1.3. $ALL_{(\tau_{TQ})} = TQ$.

2. *Ist* $card\, U \geqq 2$ *und ist* SQ *ein extensionaler S-Quantor, so gilt:*

   2.1. σ_{SQ} *ist eine S-Norm und*
   2.2. $EX_{(\sigma_{SQ})}$ *ist ein extensionaler S-Quantor und*
   2.3. $EX_{(\sigma_{SQ})} = SQ$.

Folgerung 11.4.6
Wenn card $U \geqq 2$, so existiert eine Bijektion zwischen der Menge aller T-Normen und der Menge aller extensionalen T-Quantoren über U bzw. zwischen der Menge der S-Normen und der Menge aller extensionalen S-Quantoren über U.

11.5 Die Quantoren *ALMOST-ALL*, *INF-EX*, *MOST* und *MANY*

In der zweiwertigen Logik werden die Quantoren *ALMOST-ALL* („für fast alle x gilt ... “) und *INF-EX* („es gibt unendlich viele x, so daß gilt ... “) wie folgt eingeführt. Dazu sei ein **zweiwertiges** Prädikat P über U, d. h. mit $P : U \to \{0, 1\}$, gegeben.

Definition 11.5.1

1. *$ALMOST\text{-}ALL(P) =_{def} 1$ genau dann, falls es eine* ***endliche*** *Teilmenge $V \subseteqq U$ gibt, so daß für alle $x \in U \setminus V$ die Gleichung $P(x) = 1$ gilt.*

2. *$INF\text{-}EX(P) =_{def} 1$ genau dann, falls es eine* ***unendliche*** *Teilmenge $W \subseteqq U$ gibt, so daß für alle $x \in W$ die Gleichung $P(x) = 1$ gilt.*

Zur Formulierung des folgenden Theorems definieren wir für $P : U \to \{0, 1\}$ das Komplement $\overline{P}$ von P wie folgt:

$$\overline{P}(x) =_{def} 1 - P(x) \qquad (x \in U).$$

Theorem 11.5.1

1. *Die Quantoren ALMOST-ALL und INF-EX sind dual, d. h. für jedes $P : U \to \{0, 1\}$ gilt*
$$ALMOST\text{-}ALL(P) = 1 - INF\text{-}EX\left(\overline{P}\right)$$

2. *Ist U endlich (und nicht-leer), so gilt für* ***jedes*** *$P : U \to \{0, 1\}$:*

   2.1. *$ALMOST\text{-}ALL(P) = 1$*

   2.2. *$INF\text{-}EX(P) = 0$*

Aus Bedingung 2 des obigen Theorems ergibt sich, daß in der zweiwertigen Logik die Quantoren *ALMOST-ALL* und *INF-EX* konstant sind, falls U endlich ist, in diesen Fällen also unbrauchbar sind, weil sie nur triviale Resultate liefern. Ihr eigentlicher Anwendungsbereich betrifft unendliche U, z. B. in der Analysis, wo U z. B. als Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen gewählt wird und so die genannten Quantoren zur Definition grundlegender Begriffe der Analysis, wie etwa „Grenzwert“, „Konvergenz“, „Häufungspunkt“ eine fundamentale Rolle spielen.

Die Ausdehnung dieser Quantoren auf Prädikate $F : U \to \langle 0, 1\rangle$ der Łukasiewiczschen Logik (d. h. auf Fuzzy-Mengen über U) gibt die folgende

Definition 11.5.2

1. $ALMOST\text{-}ALL'(F) =_{def} Sup\,\{Inf\,\{F(x)\,|\,x \in U \setminus V\}\,|\,V \subseteqq U \text{ und } V \text{ ist endlich}\}$

2. $INF\text{-}EX'(F) =_{def} Sup\,\{Inf\,\{F(x)\,|\,x \in W\}\,|\,W \subseteqq U \text{ und } W \text{ ist unendlich}\}$

Das Komplement $\overline{F}$ einer Fuzzy-Menge $F : U \to \langle 0, 1\rangle$ wird analog zur zweiwertigen Logik durch

$$\overline{F}(x) =_{def} 1 - F(x) \qquad (x \in U)$$

definiert.

Wir müssen nun feststellen, daß für die durch **Definition 11.5.2** definierten Fuzzy-Quantoren ein zu **Theorem 11.5.1** analoges Theorem gilt, nämlich

Theorem 11.5.2

1. *Die Fuzzy-Quantoren* $\mathit{ALMOST\text{-}ALL}'$ *und* $\mathit{INF\text{-}EX}'$ *sind dual, d. h. für jede Fuzzy-Menge* $F : U \to \langle 0, 1\rangle$ *gilt*

$$\mathit{ALMOST\text{-}ALL}'(F) = 1 - \mathit{INF\text{-}EX}'\left(\overline{F}\right)$$

2. *Ist* U *endlich (und nicht-leer), so gilt für jede Fuzzy-Menge* $F : U \to \langle 0, 1\rangle$*:*

   2.1. $\mathit{ALMOST\text{-}ALL}'(F) = 1$

   2.2. $\mathit{INF\text{-}EX}'(F) = 0$

Aus Bedingung 2 dieses Theorems ergibt sich, daß die Ausdehnung der Quantoren $\mathit{ALMOST\text{-}ALL}$ und $\mathit{INF\text{-}EX}$ von der zweiwertigen Logik in die Fuzzy-Logik mittels **Definition 11.5.2** für endliche U ebenfalls nur triviale Resultate liefert.
Durch die „Fuzzy-Philosophie“ haben wir aber die Möglichkeit, auch für endliche U eine nicht-triviale und im Hinblick auf die Anwendungen sinnvolle Definition dieser Quantoren zu geben, nämlich wie folgt.

Es seien also ein nicht-leeres endliches U und ein $F : U \to \langle 0, 1\rangle$ gegeben.

Definition 11.5.3

1. $$\mathit{ALMOST\text{-}ALL}''(F) =_{def} \frac{1}{\mathit{card}\, U} \sum_{x \in U} F(x)$$

2. $$\mathit{INF\text{-}EX}''(F) =_{def} \frac{1}{\mathit{card}\, U} \sum_{x \in U} F(x)$$

Zur Definition von $\mathit{ALMOST\text{-}ALL}''(F)$ haben wir den wohlbekannten relativen Σ-Count einer Fuzzy-Menge F über endlichen U verwendet, der in vielen anderen Anwendungen eine wichtige Rolle spielt. Wir sind darüberhinaus der Meinung, daß diese Definition gut das präzisiert, was man intuitiv (oder umgangssprachlich) unter „fast-alle“, bezogen auf endliche U, versteht.

Die Definition $\mathit{INF\text{-}EX}''(F)$ erscheint merkwürdig, da sie mit der Definition von $\mathit{ALMOST\text{-}ALL}''(F)$ übereinstimmt. Man wird aber mit Notwendigkeit auf diese Definition geführt, wenn man das Dualitätsprinzip als gültig fordert, d. h. daß die Quantoren $\mathit{ALMOST\text{-}ALL}''$ und $\mathit{INF\text{-}EX}''$ zueinander dual sein sollen.

Die Rechtfertigung dieser Definition (insbesondere von Teil 2) wird durch den folgenden Satz geliefert.

Theorem 11.5.3
Bezogen auf endliche (nicht-leere) Universa U *sind die Fuzzy-Quantoren* $\mathit{ALMOST\text{-}ALL}''$ *und* $\mathit{INF\text{-}EX}''$ *dual, d. h. für jedes* $F : U \to \langle 0, 1\rangle$ *gilt*

$$\mathit{ALMOST\text{-}ALL}''(F) = 1 - \mathit{INF\text{-}EX}''\left(\overline{F}\right).$$

Nun müssen wir allerdings feststellen, daß sich die Quantoren $ALMOST\text{-}ALL''$ und $INF\text{-}EX''$ für $F : U \to \langle 0, 1\rangle$, falls U unendlich ist, nicht definieren lassen, da in diesem Fall $\frac{1}{card\,U}$ nicht definiert ist und außerdem die Bildung der Summe $\sum_{x\in U} F(x)$ Schwierigkeiten bereitet.

Wir „eliminieren" nun in den **Definitionen** 11.5.2 und 11.5.3 die „unbrauchbaren" Teile und fügen die „brauchbaren" Reste zu der folgenden Definition zusammen.

Definition 11.5.4

1. $ALMOST\text{-}ALL^*(F) =_{def} \begin{cases} ALMOST\text{-}ALL'(F), & \text{falls } U \text{ unendlich} \\ ALMOST\text{-}ALL''(F), & \text{falls } U \text{ endlich} \end{cases}$

2. $INF\text{-}EX^*(F) =_{def} \begin{cases} INF\text{-}EX'(F), & \text{falls } U \text{ unendlich} \\ INF\text{-}EX''(F), & \text{falls } U \text{ endlich} \end{cases}$

Theorem 11.5.4

1. *Die Quantoren $ALMOST\text{-}ALL^*$ und $INF\text{-}EX^*$ sind dual, d. h. für jedes nicht-leere U und jedes $F : U \to \langle 0, 1\rangle$ gilt*

$$ALMOST\text{-}ALL^*(F) = 1 - INF\text{-}EX^*\left(\overline{F}\right).$$

2. *Die Quantoren $ALMOST\text{-}ALL^*$ und $INF\text{-}EX^*$ erfüllen beide die Axiome MON und KOM/ASS.*

3. *Der Quantor $ALMOST\text{-}ALL^*$ erfüllt im allgemeinen keines der Axiome TQ_1, TQ_2, SQ_1, SQ_2; er ist also weder ein T-Quantor noch ein S-Quantor. Dieselbe Aussage gilt für den Quantor $INF\text{-}EX^*$.*

4. *Die Quantoren $ALMOST\text{-}ALL^*$ und $INF\text{-}EX^*$ sind kardinalzahl-invariant und extensional.*

Theorem 11.5.5

Für jedes nicht-leere U und jede Fuzzy-Menge $F : U \to \langle 0, 1\rangle$ gilt:

$$ALL(F) \leqq ALMOST\text{-}ALL^*(F) \leqq INF\text{-}EX^*(F) \leqq EX(F).$$

Bemerkung

Zu Definition 11.5.3 könnte man der Meinung sein, daß beim Ansatz

$$ALMOST\text{-}ALL''(F) =_{def} \frac{1}{card\,U} \cdot \sum_{x\in U} F(x)$$

der Wert „zu langsam abfällt" und

$$INF\text{-}EX''(F) =_{def} ALMOST\text{-}ALL''(F)$$

nicht der geläufigen Intention entspricht.

Somit wäre zu diskutieren, ob eine Definition der Form

$$ALMOST\text{-}ALL''_n(F) =_{def} \left[\frac{1}{card\,U} \sum_{x\in U} F(x)\right]^n,$$

wobei n eine fixierte natürliche Zahl mit $n \geqq 2$ ist, bessere Ergebnisse liefert. Zur Wahrung des Dualitätsprinzips müßte man dann

$$\mathit{INF\text{-}EX}''_n(F) = 1 - \mathit{ALMOST\text{-}ALL}''_n\left(\overline{F}\right)$$

definieren.

Für den Spezialfall $n = 2$ erhält man dann für $\mathit{INF\text{-}EX}''_2(F)$ die Gleichung

$$\mathit{INF\text{-}EX}''_2(F) = \frac{2}{\mathit{card}\, U} \cdot \sum_{x \in U} F(x) - \left[\frac{1}{\mathit{card}\, U} \cdot \sum_{x \in U} F(x)\right]^2 .$$

Von **Theorem 11.5.5** würde (für endliche U) zwar noch

$$\mathit{ALMOST\text{-}ALL}''_2(F) \leqq \mathit{INF\text{-}EX}''_2(F)$$

gelten, jedoch nicht mehr allgemein

$$\mathit{ALL}(F) \leqq \mathit{ALMOST\text{-}ALL}''_2(F)$$

und auch nicht mehr allgemein

$$\mathit{INF\text{-}EX}''_2(F) \leqq \mathit{EX}(F),$$

was unserer Intention eklatant widerspricht.

Es bleibt hier offen, ob für $n \geqq 3$ ähnliche Effekte auftreten. Auch soll nicht diskutiert werden, ob zur Definition von $\mathit{ALMOST\text{-}ALL}$ für endliche U evtl. ganz andere Ansätze bessere Resultate liefern.

Wir wollen jetzt den Fuzzy-Quantor $\mathit{ALMOST\text{-}ALL}^*$ als „Basis-Quantor“ betrachten, d. h. ihn dazu verwenden, um andere („echte“) Fuzzy-Quantoren zu definieren.

Als erstes definieren wir — Zadeh folgend und wie in vielen fuzzy-logischen Untersuchungen üblich — für $r \in \langle 0, 1\rangle$:

$$\begin{aligned} \mathit{more\text{-}or\text{-}less}(r) &=_{\mathit{def}} \sqrt[2]{\ } \\ \mathit{very}(r) &=_{\mathit{def}} r^2 \end{aligned}$$

Sodann setzen wir:

Definition 11.5.5

1. $\mathit{MOST}(F) =_{\mathit{def}} \mathit{more\text{-}or\text{-}less}(\mathit{ALMOST\text{-}ALL}^*(F))$
2. $\mathit{MANY}(F) =_{\mathit{def}} \mathit{more\text{-}or\text{-}less}(\mathit{MOST}(F))$

Aus dieser Definition ergibt sich trivial die

Folgerung 11.5.6

1. $\mathit{MOST}(F) = \mathit{very}(\mathit{MANY}(F))$
2. $\mathit{ALMOST\text{-}ALL}^*(F) = \mathit{very}(\mathit{very}(\mathit{MANY}(F)))$

Anhang

Literaturverzeichnis

[1] Asser, Günter: *Aussagenkalkül.* Band 1 der Reihe *Einführung in die mathematische Logik* [4], 6. Auflage, 1983.

[2] Asser, Günter: *Prädikatenkalkül der ersten Stufe.* Band 2 der Reihe *Einführung in die mathematische Logik* [4], 2. Auflage, 1976.

[3] Asser, Günter: *Prädikatenlogik höherer Stufe.* Band 3 der Reihe *Einführung in die mathematische Logik* [4], 1981.

[4] Asser, Günter: *Einführung in die mathematische Logik.* Drei Bände. Verlag Harri Deutsch, Thun·Frankfurt/Main, 1959–81.

[5] Bandemer, Hans und Siegfried Gottwald: *Einführung in Fuzzy-Methoden.* Akademie Verlag, Berlin, 4. Auflage, 1993.

[6] Barwise, Jon and F. Feferman (editors): *Model-Theoretic Logics.* Perspectives in Mathematical Logics. Springer-Verlag, 1985.

[7] Bellmann, R. and M. Giertz: *On the analytic formalism of the theory of fuzzy sets.* Information Sciences, 5:149–156, 1973.

[8] Bezdek, J. C.: *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms.* Plenum Press, New York, 1981.

[9] Black, M.: *Vagueness.* Philosophy of Science, 4, 1937.

[10] Borkowski, Ludwik (editor): *Selected works of* J. Łukasiewicz. North-Holland, Amsterdam, 1970.

[11] Church, A.: *A note on the Entscheidungsproblem.* Journal of Symbolic Logic, 1:40–41, 1936.

[12] Dombi, J.: *A general class of fuzzy operators, the de morgan class of fuzzy operators and fuzziness measures induced by fuzzy operators.* Fuzzy Sets and Systems, 8:149–163, 1982.

[13] Dubois, D. and H. Prade: *New results about properties and semantics of fuzzy set-theoretic operators.* In Wang, P. P. and S. K. Chang (editors): *Fuzzy Sets: Theory and Applications to Policy Analysis and Information Systems*, pages 59–75. Plenum Press, New York, 1980.

[14] Dubois, Didier and Henri Prade: *A review of fuzzy set aggregation connectives.* Information Sciences, 36:85–121, 1985.

[15] Dubois, Didier and Henri Prade: *Fuzzy sets in approximate reasoning, Part 1: Inference with possibility distributions.* Fuzzy Sets and Systems, 40:142–202, 1991. Special Memorial Volume: 25 years of fuzzy sets.

[16] Frank, M. J.: *On the simultaneous associativity of* $f(x, y)$ *and* $x + y - f(x, y)$. Aequationes Math., 19:194–226, 1979.

[17] Gödel, Kurt: *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls.* Monatshefte für Mathematik und Physik, 37:349–360, 1930.

[18] Goguen, J. A.: *The logic of inexact concepts.* Synthese, 3/4:325–373, 1969.

[19] Gottwald, Siegfried: *Mehrwertige Logik. Eine Einführung in Theorie und Anwendungen.* Akademie-Verlag, Berlin, 1989.

[20] Gottwald, Siegfried: *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Foundations of Application — from a Mathematical Point of View.* Artificial Intelligence. Vieweg, 1993.

[21] Gupta, M. M., R. K. Ragade, and R. R. Yager (editors): *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications.* Amsterdam, New York, Oxford, 1979.

[22] Hamacher, H.: *Über logische Verknüpfungen unscharfer Aussagen und deren zugehörige Bewertungsfunktionen.* In: Trappl, R., G. J. Klir und L. Ricciardi (Herausgeber): *Progress in Cybernetics and Systems Research*, Band 3, Seiten 276–288. Hemisphere, Washington, D.C., 1978.

[23] Kalmár, L.: *Contributions to the reduction theory of the decision problem — Fourth paper: Reduction to the case of a finite set of individuals.* Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, 2:125–142, 1951.

[24] Klir, George J. and Tina A. Folger: *Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information.* Prentice Hall, 1988.

[25] Li, M. and P. M. B. Vitány: Kolmogorov *complexity and its applications.* In Leeuwen, Jan van (editor): *Algorithms and Complexity*, volume A of *Handbook of Theoretical Computer Science*, chapter 4, pages 187–254. Elsevier / The MIT Press, Amsterdam / Cambridge, MA, 1990.

[26] Ling, C.-H.: *Representations of associative functions.* Publications Mathematicae Debrecen, 12:189–212, 1965.

[27] Łukasiewicz, Jan: *Die logischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Krakow, 1913.

[28] Łukasiewicz, Jan: *O logice trójwartościowej (Über die dreiwertige Logik).* Ruch Filozofiezny, 5:170–171, 1920.

[29] Łukasiewicz, Jan: *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls.* Comptes Rendus Séances Société des Sciences et Lettres Varsovie, 23:51–77, 1930.

[30] Łukasiewicz, Jan und Alfred Tarski: *Untersuchungen über den Aussagenkalkül.* Comptes Rendus Séances Société des Sciences et Lettres Varsovie, 23:30–50, 1930. Nachgedruckt (engl. Fassung) in [10] und [41].

[31] Mostowski, A.: *On a generalization of quantifiers.* Fundamenta mathematicae, 44:12–36, 1957.

[32] Novák, V.: *Fuzzy Sets and their Applications.* Adam Hilger, 1989.

[33] Post, E. L.: *Introduction to a general theory of elementary propositions.* American Journal of Mathematics, 43:163–185, 1921.

[34] Schmidt, Jürgen: *Mengenlehre. Einführung in die axiomatische Mengenlehre*, Band 1: Grundbegriffe. B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 2., verbesserte und erweiterte Auflage, 1974.

[35] Schmidt, Peter H.: *Theorie der logischen Programmierung — Eine elementare Einführung.* Springer-Verlag, 1992.

[36] Schweizer, B. and A. Sklar: *Statistical metric spaces.* Pacific Journal of Mathematics, 10:313–334, 1960.

[37] Schweizer, B. and A. Sklar: *Associative functions and statistical triangle inequalities.* Publicationes Mathematicae Debrecen, 8:169–186, 1961.

[38] Shannon, C. E.: *The mathematical theory of communication.* The Bell System Technical Journal, 27:379–423, 623–656, 1948.

[39] Sinha, D. and E. R. Dougherty: *Fuzzyfication of set inclusion: Theory and applications.* Fuzzy Sets and Systems, 55:14–42, 1993.

[40] Sugeno, M.: *Fuzzy measures and fuzzy integrals — a survey.* In Gupta, M. M., G. N. Saridis, and B. R. Gaines (editors): *Fuzzy Automata and Decision Processes*, pages 89–102. North-Holland, 1977.

[41] Tarski, Alfred: *Logic, Semantics, Metamathematics — Papers from 1923 to 1938.* Clarendon Press, Oxford, 1956.

[42] Tilli, Thomas: ***Fuzzy**-Logik. Grundlagen, Anwendungen, Hard- und Software.* Franzis-Verlag, München, 1991.

[43] Trachtenbrot, B. A.: *On the algorithmic unsolvability of the decision problem in finite domains.* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 70:569–572, 1950. (In Russian).

[44] Türkşen, I. B. and Y. Tian: *Combination of rules or their consequences in fuzzy expert systems.* Fuzzy Sets and Systems, 58:3–40, 1993.

[45] Yager, R. R.: *On a general class of fuzzy connectives.* Fuzzy Sets and Systems, 4:235–242, 1980.

[46] Yager, R. R.: *Reasoning with fuzzy quantified statements, part I.* Kybernetes, 14:233–240, 1985.

[47] Yager, R. R.: *Decisions with usual values.* In Jones, A., A. Kaufmann, and H. J. Zimmermann (editors): *Fuzzy Sets Theory and Applications*, pages 209–217. Reidel, Dortrecht, 1986.

[48] Yager, R. R.: *On implementing ususal values.* In *Second Workshop on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 339–346, Philadelphia, PA, 1986.

[49] Yager, R. R.: *Reasoning with fuzzy quantified statements, part II.* Kybernetes, 15:111–120, 1986.

[50] Yager, R. R.: *On implementing usual values in uncertainty.* In Lemmer, J. F. and L. N. Kanal (editors): *Artificial Intelligence*, volume 2, pages 209–217. Elesevier Science Publishers, New York, 1988.

[51] Yager, R. R.: *On usual values in common sense reasoning.* Fuzzy Sets and Systems, 30:239–255, 1989.

[52] Yager, R. R.: *Connectives and quantifiers in fuzzy sets.* Fuzzy Sets and Systems, 40:39–75, 1991.

[53] Yager, R. R., S. Ovchinnikov, R. M. Tong, and H. T. Nguyen (editors): *Fuzzy Sets and Applications — Selected Papers by L. A. Zadeh.* John Wiley & Sons, 1987.

[54] Zadeh, Lotfi A.: *Fuzzy sets.* Information and Control, 8:338–353, 1965. Reprinted in [53].

[55] Zadeh, Lotfi A.: *A fuzzy-set-theoretic interpretation of linguistic hedges.* Journal of Cybernetics, 2:4–34, 1972. Reprinted in [53].

[56] Zadeh, Lotfi A.: *Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes.* IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, 3(1):28–44, 1973. Reprinted in [53].

[57] Zadeh, Lotfi A.: *A computational approach to fuzzy quantifiers in natural language.* Computers and Maths with Applications, 9:149–184, 1983. Reprinted in [53].

[58] Zadeh, Lotfi A.: *A computational theory of dispositions.* In *Int. Conference Computational Linguistics*, pages 312–318, 1984.

[59] Zadeh, Lotfi A.: *Syllogistic reasoning as a basis for combination of evidence in expert systems.* In *IJCAL*, pages 417–419, Los Angeles, CA, 1985.

[60] Zadeh, Lotfi A.: *Syllogistic reasoning in fuzzy logic and its application to usuality and reasoning with dispositions.* IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, SMC-15:754–763, 1985. Reprinted in [53].

[61] Zadeh, Lotfi A.: *Dispositional logic and commonsense reasoning.* In *Second Annual Artificial Intelligence Forum*, pages 375–389, NASA-Ames Research Center, Moffett-Field, CA, 1987.

[62] Zadeh, Lotfi A.: *On computational theory of dispositions.* International Journal of Intelligent Systems, 2:39–63, 1987.

[63] Zadeh, Lotfi A.: *Dispositional logic.* Appl. Math. Lett., 1:95–99, 1988.

[64] Zimmermann, H.-J. and P. Zysno: *Latent connectives in human decision making.* Fuzzy Sets and Systems, 4:37–51, 1980.