Wintersemester 2006/07

Fundamente der Computational Intelligence

(Vorlesung)

Prof. Dr. Günter Rudolph

Fachbereich Informatik

Lehrstuhl für Algorithm Engineering

Inhalt

- Fuzzy Mengen ☑
- Fuzzy Relationen ☑
- Fuzzy Logik
- Approximatives Schließen
- …

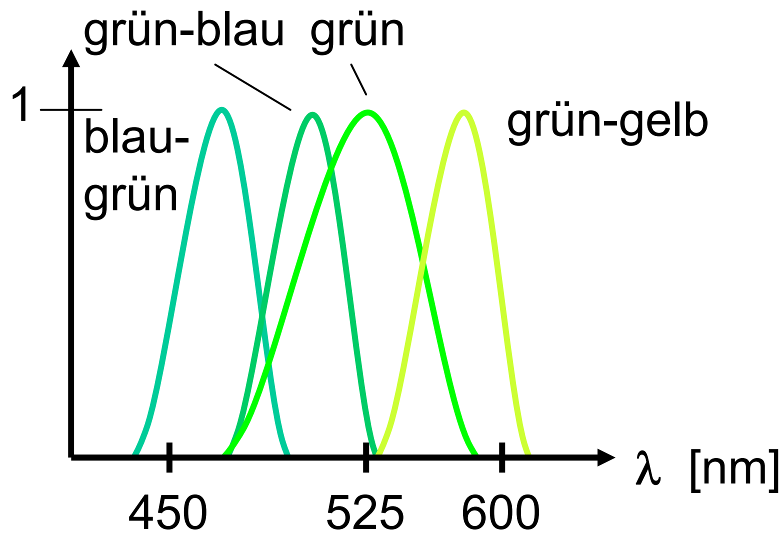
Linguistische Variable:

Sprachlicher Begriff, der verschiedene Werte annehmen kann

Bsp: **Farbe** kann Werte **rot**, **grün**, **blau**, **gelb**, … annehmen

Die Werte (rot, grün, …) heißen **linguistische Terme**

Den linguistischen Termen werden Fuzzy-Mengen zugeordnet



Unscharfe Aussage (*fuzzy proposition*)

p: *Temperatur* ist *hoch*

Linguistische Variable (LV)

Linguistischer Term (LT)

- LV kann verschiedene LT zugeordnet werden: *hoch, mittel, tief, …*
- *hohe, mittlere, tiefe* Temperatur sind Fuzzy-Mengen über der scharfen Temperaturskala
- Wahrheitsgrad der unscharfen Aussage „Temperatur ist hoch“ wird für **konkreten scharfen** Temperaturwert v als gleich dem Zugehörigkeitsgrad *hoch*(v) der Fuzzy-Menge *hoch* interpretiert

Unscharfe Aussage (*fuzzy proposition*)

p: *V* ist F

Linguistische Variable (LV)

Linguistischer Term (LT)

schafft Verbindung zwischen Zugehörigkeitsgrad einer Fuzzy-Menge und Wahrheitsgrad einer Aussage

eigentlich steht da:

p: *V* ist F(v)

und

T(p) = F(v) für einen konkreten scharfen Wert v

truth(p)

Unscharfe Aussage (*fuzzy proposition*)

p: IF *Heizung* ist *heiß*, THEN *Energieverbrauch* ist *hoch*

Heizung	*heiß*	*Energieverbrauch*	*hoch*
LV	LT	LV	LT

hier wird eine Beziehung / Relation zwischen

a) Temperatur der Heizung und

b) Menge des Energieverbrauches

ausgedrückt:

Relation

p: (*Heizung*, *Energieverbrauch*) $\in$ R

Unscharfe Aussage (*fuzzy proposition*)

p: IF $\underset{\text{LV}}{\underset{|}{X}}$ ist $\underset{\text{LT}}{\underset{|}{\text{A}}}$, THEN $\underset{\text{LV}}{\underset{|}{Y}}$ ist $\underset{\text{LT}}{\underset{|}{\text{B}}}$

Wie können wir hier den Grad der Wahrheit T(p) angeben?

- Für konkrete scharfe Werte x, y kennen wir A(x) und B(y)
- A(x) und B(y) müssen durch Relation R zu einem Wert verarbeitet werden
- R(x, y) = Funktion(A(x), B(y)) ist Fuzzy-Menge über X $\times$ Y
- wie zuvor: interpretiere T(p) als Zugehörigkeitsgrad R(x,y)

Unscharfe Aussage (*fuzzy proposition*)

p: IF X ist A, THEN Y ist B

A ist Fuzzy-Menge über X

B ist Fuzzy-Menge über Y

R ist Fuzzy-Menge über $X \times Y$

$\forall (x,y) \in X \times Y$: $R(x, y) = \text{Imp}(A(x), B(y))$

Was ist $\text{Imp}(\cdot, \cdot)$?

$\Rightarrow$ „geeignete“ Fuzzy-Implikation $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$

Annahme: Wir kennen „geeignetes“ Imp(a,b).

Wie berechnet man den Wahrheitsgrad T(p) ?

Beispiel:

Sei Imp(a, b) = min{ 1, 1 – a + b } und gegeben seien Fuzzy-Mengen

A:

x_1	x_2	x_3
0.1	0.8	1.0

B:

y_1	y_2
0.5	1.0

$\Rightarrow$

R	x_1	x_2	x_3
y_1	1.0	0.7	0.5
y_2	1.0	1.0	1.0

z.B.
$R(x_2, y_1) = Imp(A(x_2), B(y_1)) = Imp(0.8, 0.5) =$
$\min\{1.0, 0.7\} = 0.7$

und T(p) für (x_2,y_1) ist $R(x_2, y_1) = 0.7$ ■

Inferenz aus unscharfen Aussagen

- Sei $\forall x, y: y = f(x)$.

  IF $X = x$ THEN $Y = f(x)$

- IF $X \in A$ THEN $Y \in B = \{ y \in Y: y = f(x), x \in A \}$

Inferenz aus unscharfen Aussagen

- Sei Beziehung zw. x und y eine Relation R auf $X \times Y$

  IF $X = x$ THEN $Y \in B = \{ y \in Y: (x, y) \in R \}$

- IF $X \in A$ THEN $Y \in B = \{ y \in Y: (x, y) \in R,\ x \in A \}$

Inferenz aus unscharfen Aussagen

IF X $\in$ A THEN Y $\in$ B = { y $\in$ Y: (x, y) $\in$ R, x $\in$ A }

Auch ausdrückbar über charakt. Fkt. Der Mengen A, B, R:

$\forall y \in Y: B(y) = \sup_{x \in X} \min \{ A(x), R(x, y) \}$

Jetzt: A‘, B‘ unscharfe Mengen über X bzw. Y

Wenn R und A‘ gegeben:

$\forall y \in Y: B'(y) = \sup_{x \in X} \min \{ A'(x), R(x, y) \}$

Kompositionsregel der Inferenz (in Matrixform): **B‘ = A‘ $\circ$ R**

Inferenz aus unscharfen Aussagen

- klassisch:
  Modus ponens

$$\frac{\begin{array}{l} a \Rightarrow b \\ a \end{array}}{b}$$

- fuzzy:
  Generalisierter modus ponens (GMP)

$$\frac{\begin{array}{l} \text{IF } X \text{ ist A, THEN } Y \text{ ist B} \\ X \text{ ist A‘} \end{array}}{Y \text{ ist B‘}}$$

Bsp.:

IF *Heizung* ist heiß, THEN *Energieverbrauch* ist hoch
Heizung ist warm

Energieverbrauch ist normal

Beispiel: GMP

Gegeben sei A:

x_1	x_2	x_3
0.5	1.0	0.6

B:

y_1	y_2
1.0	0.4

mit der Regel: IF X is A THEN Y ist B

Für den Fakt A‘:

x_1	x_2	x_3
0.6	0.9	0.7

$\Rightarrow$

R	x_1	x_2	x_3
y_1	1.0	1.0	1.0
y_2	0.9	0.4	0.8

mit Imp(a,b) = min{1, 1-a+b }

Also: A‘ ∘ R = B‘

mit max-min-Komposition

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.9 & 0.7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1.0 & 0.9 \\ 1.0 & 0.4 \\ 1.0 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.7 \end{pmatrix}$$

■

Inferenz aus unscharfen Aussagen

- klassisch:
  Modus trollens

$$\begin{array}{l} a \Rightarrow b \\ \overline{b} \\ \hline \overline{a} \end{array}$$

- fuzzy:
  Generalisierter modus ponens (GMP)

$$\begin{array}{l} \text{IF } X \text{ ist A, THEN } Y \text{ ist B} \\ Y \text{ ist B‘} \\ \hline X \text{ ist A‘} \end{array}$$

Bsp.:

IF *Heizung* ist heiß, THEN *Energieverbrauch* ist hoch
Energieverbrauch ist normal

Heizung ist warm

Beispiel: GMT

Gegeben sei A:

x_1	x_2	x_3
0.5	1.0	0.6

B:

y_1	y_2
1.0	0.4

mit der Regel: IF *X* is A THEN *Y* ist B

Für den Fakt B‘:

y_1	y_2
0.9	0.7

$\Rightarrow$

R	x_1	x_2	x_3
y_1	1.0	1.0	1.0
y_2	0.9	0.4	0.8

mit Imp(a,b) = min{1, 1-a+b }

Also: B‘ ∘ R^{-1} = A‘

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.9 & 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{pmatrix}$$

mit max-min-Komposition

■

Inferenz aus unscharfen Aussagen

- klassisch:
  Hypothetischer Syllogismus

$$\frac{\begin{array}{l} a \Rightarrow b \\ b \Rightarrow c \end{array}}{a \Rightarrow c}$$

- fuzzy:
  Generalisierter HS

$$\frac{\begin{array}{l} \text{IF } X \text{ ist A, THEN } Y \text{ ist B} \\ \text{IF } Y \text{ ist B, THEN } Z \text{ ist C} \end{array}}{\text{IF X ist A, THEN Z ist C}}$$

Bsp.:

IF *Heizung* ist heiß, THEN *Energieverbrauch* ist hoch
IF *Energieverbrauch* ist hoch, THEN *Lebensunterhalt* ist teuer

---

IF *Heizung* ist heiß, THEN *Lebensunterhalt* ist teuer

Beispiel: GHS

Fuzzy-Mengen A(x), B(x), C(x) sind gegeben.

$\Rightarrow$ daraus lassen sich die 3 Relationen

$R_1(x,y) = \mathrm{Imp}(A(x),B(y))$

$R_2(y,z) = \mathrm{Imp}(B(y),C(z))$

$R_3(x,z) = \mathrm{Imp}(A(x),C(z))$

berechnen und als Matrizen R_1, R_2, R_3 angeben.

Wir sagen:

Der GHS gilt, wenn $R_1 \circ R_2 = R_3$

Also: Was macht Sinn für Imp(·,·) ?

Imp(a,b) soll unscharfe Version der Implikation (a $\Rightarrow$ b) ausdrücken

Klassisch: a $\Rightarrow$ b identisch zu $\overline{a} \vee b$

Wie lassen sich unscharfe boolesche Ausdrücke berechnen?

Forderung: Für a,b $\in$ { 0, 1 } kompatibel zur scharfen Version (und mehr).

a	b	$a \wedge b$	t(a,b)
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

a	b	$a \vee b$	s(a,b)
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

a	$\overline{a}$	c(a)
0	1	1
1	0	0

Also: Was macht Sinn für Imp(·,·) ?

1. Ansatz: S-Implikationen

Klassisch: $a \Rightarrow b$ identisch zu $\overline{a} \vee b$

Fuzzy: Imp(a, b) = s(c(a), b)

2. Ansatz: R-Implikationen

Klassisch: $a \Rightarrow b$ identisch zu $\max\{ x \in \mathbb{B} : a \wedge x \leq b \}$

Fuzzy: $\text{Imp}(a, b) = \max\{ x \in [0,1] : t(a, x) \leq b \}$

3. Ansatz: QL-Implikationen

Klassisch: $a \Rightarrow b$ identisch zu $\overline{a} \vee b \equiv \overline{a} \vee (a \wedge b)$ wg. Absorptionsgesetz

Fuzzy: Imp(a, b) = s(c(a), t(a, b)) (duale Tripel ?)

Beispiele: S-Implikationen $\mathrm{Imp}(a, b) = s(\, c_s(a), b)$

1. Kleene-Dienes-Implikation

   $s(a, b) = \max\{ a, b \}$ (Std.) $\mathrm{Imp}(a,b) = \max\{ 1-a, b \}$

2. Reichenbach-Implikation

   $s(a, b) = a + b - ab$ (alg. S.) $\mathrm{Imp}(a, b) = 1 - a + ab$

3. Lukasiewicz-Implikation

   $s(a, b) = \min\{ 1, a + b \}$ (beschr. S.) $\mathrm{Imp}(a, b) = \min\{ 1, 1 - a + b \}$

Beispiele: R-Implikationen $\mathrm{Imp}(a, b) = \max\{\, x \in [0,1] : t(a, x) \le b \,\}$

1. Gödel-Implikation

   $t(a, b) = \min\{\, a, b \,\}$ (Std.) $\mathrm{Imp}(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{, für } a \le b \\ b & \text{, sonst} \end{cases}$

2. Goguen-Implikation

   $t(a, b) = ab$ (alg. P.) $\mathrm{Imp}(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{, für } a \le b \\ \frac{b}{a} & \text{, sonst} \end{cases}$

3. Lukasiewicz-Implikation

   $t(a, b) = \max\{\, 0, a + b - 1 \,\}$ (beschr. D.) $\mathrm{Imp}(a, b) = \min\{\, 1, 1 - a + b \,\}$

Beispiele: QL-Implikationen $Imp(a, b) = s(c(a), t(a, b))$

1. Zadeh-Implikation

$t(a, b) = \min \{ a, b \}$	(Std.)	$Imp(a, b) = \max\{ 1 – a, \min\{a, b\} \}$
$s(a,b) = \max\{ a, b \}$	(Std.)	

2. „NN“-Implikation ☺ (Klir/Yuan 1994)

$t(a, b) = ab$	(alg. P.)	$Imp(a, b) = 1 – a + a^2b$
$s(a,b) = a + b – ab$	(alg. S.)	

3. Kleene-Dienes-Implikation

$t(a, b) = \max\{ 0, a + b – 1 \}$	(beschr. D.)	$Imp(a, b) = \max\{ 1-a, b \}$
$s(a,b) = \min \{ 1, a + b)$	(beschr. S.)	

Axiome für unscharfe Implikationen

1. $a \le b$ impliziert $\text{Imp}(a, x) \ge \text{Imp}(b, x)$	Monotonie im 1. Argument
2. $a \le b$ impliziert $\text{Imp}(x, a) \le \text{Imp}(x, b)$	Monotonie im 2. Argument
3. $\text{Imp}(0, a) = 1$	Dominanz der Unrichtigkeit
4. $\text{Imp}(1, b) = b$	Neutralität der Richtigkeit
5. $\text{Imp}(a, a) = 1$	Identität
6. $\text{Imp}(a, \text{Imp}(b, x)) = \text{Imp}(b, \text{Imp}(a, x))$	Austausch-Eigenschaft
7. $\text{Imp}(a, b) = 1$ gdw. $a \le b$	Randbedingung
8. $\text{Imp}(a, b) = \text{Imp}(c(b), c(a))$	Kontraposition
9. $\text{Imp}(\cdot, \cdot)$ ist stetig	Stetigkeit

Charakterisierung der unscharfen Implikationen

Satz:
Imp: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ erfüllt Axiome 1-9 für unscharfe Implikationen
für ein gewisses unscharfes Komplement $c(\cdot)$ $\Leftrightarrow$

$\exists$ str. m. w., stetige Fkt. $F: [0,1] \rightarrow [0, \infty)$ mit

- $f(0) = 0$
- $\forall a, b \in [0,1]: \mathrm{Imp}(a, b) = f^{(-1)}(f(1) – f(a) + f(b))$
- $\forall a \in [0,1]: c(a) = f^{-1}(f(1) – f(a))$

Beweis: Smets & Magrez (1987). ■

Beispiele: (Übung)

Auswahl einer „geeigneten“ unscharfen Implikation

Zitat: (Klir & Yuan 1995, S. 312)

„To select an appropriate fuzzy implication for approximate reasoning under each particular situation is a difficult problem.“

Richtschnur:
GMP, GMT, GHS sollten mit MP, MT, HS kompatibel sein
für unscharfe Implikation bei Berechnung von Relationen:
$B(y) = \sup \{ t(A(x), \mathrm{Imp}(A(x), B(y))) : x \in \mathcal{X} \}$

Beispiel:
Gödel-Imp. für t = beschr. Diff.