



Fundamente der Computational Intelligence

– Teil 3 –

Günter Rudolph
Fachbereich Informatik, Lehrstuhl XI
Fachgebiet *Computational Intelligence*

WS 2006/07



Standard Fuzzy Operatoren

Bisher betrachtet:

Standard Fuzzy Operatoren

- $A^c(x) = 1 - A(x)$
- $(A \cap B)(x) = \min\{A(x), B(x)\}$
- $(A \cup B)(x) = \max\{A(x), B(x)\}$

sind kompatibel mit den Operatoren

für gewöhnliche Mengen

mit Zugehörigkeitsfunktionen mit Wertebereich $\in \{0, 1\}$

Verallgemeinerte Fuzzy Operatoren

Frage: \exists Nicht-Standard-Operatoren?

- Ja!
- Sogar viele!
- Lassen sich charakterisieren ... (wie?)
- ... durch Festlegung „sinnvoller“ Axiome für
 - Komplement
 - Schnittmenge
 - Vereinigung

Fuzzy Komplement: Axiome

Sei $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

(A1) $c(0) = 1$ und $c(1) = 0$

(A2) $\forall a, b \in [0, 1] : a \leq b \Rightarrow c(a) \geq c(b)$ (monoton)

Axiome (A1) und (A2) sind das Grundgerüst.

Ohne sie kein Komplementbegriff möglich.

Oft zusätzlich:

(A3) $c(\cdot)$ ist stetig

(A4) $\forall a \in [0, 1] : c(c(a)) = a$ (involutiv)

Fuzzy Komplement: Beispiele

$$\text{a) } c(a) = \begin{cases} 1 & \text{für } a \leq t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } 0 < t < 1.$$

→ verletzt (A3) weil unstetig

→ verletzt (A4) weil z.B. $c(c(\frac{1}{4})) = c(1) = 0 \neq \frac{1}{4}$ für $t = \frac{1}{2}$

$$\text{b) } c(a) = \frac{1 + \cos(\pi a)}{2}$$

→ verletzt (A4) weil z.B. $c(c(\frac{1}{3})) = c(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \neq \frac{1}{3}$

Fuzzy Komplement: Beispiele

$$\text{c) } c(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a} \text{ für } \lambda > -1 \text{ (Sugeno-Klasse)}$$

(A1) Einsetzen: $c(0) = 1$ und $c(1) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{(A2) } \frac{1-a}{1+\lambda a} &\stackrel{!}{\geq} \frac{1-a}{1+\lambda a} \Leftrightarrow (1-a)(1+\lambda b) \geq (1+\lambda a)(1-b) \Leftrightarrow \\ &\lambda b + b \geq \lambda a + a \Leftrightarrow b(\lambda + 1) \geq a(\lambda + 1) \Leftrightarrow b \geq a \end{aligned}$$

nach Division durch $(\lambda + 1) > 0$.

(A3) $c(\cdot)$ ist stetig als Komposition stetiger Funktionen.

$$\text{(A4) } c(c(a)) = c\left(\frac{1-a}{1+\lambda a}\right) = a$$



Fuzzy Komplement: Beispiele

d) $c(a) = (1 - a^w)^{\frac{1}{w}}$ für $w > 0$ (**Yager-Klasse**)

(A1) Einsetzen: $c(0) = 1$ und $c(1) = 0$.

(A2) $(1 - a^w)^{\frac{1}{w}} \stackrel{!}{\geq} (1 - b^w)^{\frac{1}{w}} \Leftrightarrow$

$$(1 - a^w) \geq (1 - b^w) \Leftrightarrow a^w \leq b^w \Leftrightarrow a \leq b$$

(A3) $c(\cdot)$ ist stetig als Komposition stetiger Funktionen.

(A4) $c(c(a)) = c\left((1 - a^w)^{\frac{1}{w}}\right) = \left(1 - \left[(1 - a^w)^{\frac{1}{w}}\right]^w\right)^{\frac{1}{w}} =$

$$(1 - (1 - a^w))^{\frac{1}{w}} = (a^w)^{\frac{1}{w}} = a$$

□

Fuzzy Komplement: Fixpunkte

Satz

Erfüllt die Funktion $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ die Axiome (A1) und (A2) für das Fuzzy-Komplement, dann besitzt sie höchstens einen Fixpunkt a^* mit $c(a^*) = a^*$.

Bemerkung

Gilt zusätzlich (A3) \Rightarrow exakt 1 Fixpunkt!

Weitere Eigenschaften beweisbar,
aber nicht in dieser Vorlesung!

Fuzzy Komplement: Fixpunkte

Übrigens: Wie erhält man den Fixpunkt grafisch?

Zeichne Winkelhalbierende a und $c(a)$

∃ Schnittpunkt: \Rightarrow Fixpunkt!

Fuzzy Komplement: 1. Charakterisierung

Satz:

$c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ist involutives Fuzzy-Komplement \Leftrightarrow
 \exists stetige Funktion $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit Eigenschaften

- $g(0) = 0$,
- streng monoton wachsend,
- $\forall a \in [0, 1] : c(a) = g^{(-1)}(g(1) - g(a))$.

□

$g(\cdot)$ heißt *ansteigender Generator*

$g^{(-1)}(\cdot)$ ist Pseudo-Inverse zu $g(\cdot)$

Fuzzy Komplement: Ansteigende Generatoren

Beispiel: $g(a) = a$

- $g(0) = 0$
- streng monoton steigend wg. $g'(a) = 1 > 0$
- Inverse auf $[0, 1]$ ist $g^{-1}(a) = a$, also

$$c(a) = g^{-1}(g(1) - g(a)) = g^{-1}(1 - a) = 1 - a$$

⇒ ergibt das Standard-Komplement

Fuzzy Komplement: Ansteigende Generatoren

Beispiel: $g(a) = \frac{1}{\lambda} \log_e(1 + \lambda a)$ für $\lambda > -1$

- $g(0) = \log_e(1) = 0$
- str. mon. st. wegen $g'(a) = \frac{1}{1+\lambda a} > 0$ für $a \in [0, 1]$
- Inverse auf $[0, 1]$ ist $g^{-1}(a) = \frac{\exp(\lambda a) - 1}{\lambda}$, also

$$\begin{aligned} c(a) &= g^{-1} \left(\frac{\log(1 + \lambda)}{\lambda} - \frac{\log(1 + \lambda a)}{\lambda} \right) \\ &= \frac{\exp(\log(1 + \lambda) - \log(1 + \lambda a)) - 1}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1 + \lambda}{1 + \lambda a} - 1 \right) = \frac{1 - a}{1 + \lambda a} \quad (\text{Sugeno-Kompl.}) \end{aligned}$$

Fuzzy Komplement: 2. Charakterisierung

Satz:

$c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ist involutives Fuzzy-Komplement \Leftrightarrow
 \exists stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit Eigenschaften

- $f(1) = 0$,
- streng monoton fallend,
- $\forall a \in [0, 1] : c(a) = f^{(-1)}(f(0) - f(a))$. □

$f(\cdot)$ heißt *absteigender Generator*

$f^{(-1)}(\cdot)$ ist Pseudo-Inverse zu $f(\cdot)$

Fuzzy Komplement: Absteigende Generatoren

Beispiel: $f(a) = -k a + k$ für $k > 0$

- $f(1) = 0$
- streng monoton fallend wg. $f'(a) = -k < 0$
- Inverse auf $[0, 1]$ ist $f^{-1}(a) = 1 - \frac{a}{k}$, also

$$c(a) = f^{-1}(f(0) - f(a)) = f^{-1}(k a) = 1 - a$$

⇒ ergibt das Standard-Komplement für beliebiges $k > 0$

Fuzzy Komplement: Absteigende Generatoren

Beispiel: $f(a) = 1 - a^w$ für $w > 0$

- $f(1) = 1 - 1^w = 0$
- str. mon. f. wegen $f'(a) = -w a^{w-1} < 0$ für $a \in [0, 1]$
- Inverse auf $[0, 1]$ ist $f^{-1}(a) = (1 - a)^{\frac{1}{w}}$, also

$$c(a) = f^{-1}(f(0) - f(a)) = f^{-1}(a^w) = (1 - a^w)^{\frac{1}{w}}$$

⇒ ergibt das Yager-Komplement

Verallgemeinerte Fuzzy Operatoren

Frage:

Wenn \exists Verallgemeinerungen vom Fuzzy-Komplement, gibt es dann so etwas auch für Fuzzy-Schnittmenge und Fuzzy-Vereinigung?

- Ja! Viele!
- Analoge Vorgehensweise: Axiome!

Fuzzy Schnittmenge: Axiome

Sei $i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ und $a, b, d \in [0, 1]$.

(A1) $i(a, 1) = a$

(A2) $b \leq d \Rightarrow i(a, b) \leq i(a, d)$ (monoton)

(A3) $i(a, b) = i(b, a)$ (kommutativ)

(A4) $i(a, i(b, d)) = i(i(a, b), d)$ (assoziativ)

Axiome (A1) – (A4): Grundgerüst für Fuzzy Schnittmenge.

Die verallgemeinerte Fuzzy Schnittmengenoperation wird ***t-Norm*** genannt!

Fuzzy Schnittmenge: Axiome

Häufig weitere Einschränkungen:

(A5) $i(\cdot, \cdot)$ ist stetig

(A6) $i(a, a) < a$ (Subidempotenz)

(A7) $a_1 < a_2$ und $b_1 < b_2 \Rightarrow i(a_1, b_1) < i(a_2, b_2)$ (str. monoton)

Was ist mit (A6)?

Kann man diese Eigenschaft immer fordern?

„Standard t-Norm“

Satz:

Die Standardversion der Fuzzy Schnittmengenoperation

$$A(x) \cap B(x) = \min\{A(x), B(x)\}$$

ist die einzige idempotente t-Norm.

Beweis: (Übung)



t-Norm: Beispiele

Name	Funktion
Standard	$i(a, b) = \min\{a, b\}$
Algebraisches Produkt	$i(a, b) = a b$
Beschränkte Differenz	$i(a, b) = \max\{0, a + b - 1\}$
Drastische Schnittmenge	$i(a, b) = \begin{cases} a & \text{für } b = 1 \\ b & \text{für } a = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Übrigens: Wie weist man t-Norm nach?
⇒ Axiome (A1) – (A4) überprüfen!

t-Norm: Charakterisierung

Satz:

$i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ist t-Norm \Leftrightarrow
 \exists absteigender Generator $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$i(a, b) = f^{(-1)}(f(a) + f(b)).$$



$f^{(-1)}(\cdot)$ ist Pseudo-Inverse zu Generator $f(\cdot)$

t-Norm: Generatoren

Beispiel: $f(a) = \frac{1}{a} - 1$

- $f(1) = \frac{1}{1} - 1 = 0$
- str. mon. fallend wg. $f'(a) = -\frac{1}{a^2} < 0$ auf $(0, 1]$
- Inverse auf $[0, 1]$ ist $f^{-1}(a) = \frac{1}{a+1}$ auf $(0, 1]$, also

$$\begin{aligned} i(a, b) &= f^{-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 2\right) = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 1} \\ &= \frac{ab}{a + b - ab} \quad (\text{Spezialfall aus Dombi 1982}) \end{aligned}$$

Fuzzy Vereinigung: Axiome

Sei $u : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ und $a, b, d \in [0, 1]$.

(A1) $u(a, 0) = a$

(A2) $b \leq d \Rightarrow u(a, b) \leq u(a, d)$ (monoton)

(A3) $u(a, b) = u(b, a)$ (kommutativ)

(A4) $u(a, u(b, d)) = u(u(a, b), d)$ (assoziativ)

Axiome (A1) – (A4): Grundgerüst für Fuzzy Vereinigung.

Die verallgemeinerte Fuzzy Vereinigungsoperation wird **s-Norm** oder **t-Conorm** genannt! Hier: s-Norm.

Fuzzy Vereinigung: Axiome

Häufig weitere Einschränkungen:

(A5) $u(\cdot, \cdot)$ ist stetig

(A6) $u(a, a) > a$ (Superidempotenz)

(A7) $a_1 < a_2$ und $b_1 < b_2 \Rightarrow u(a_1, b_1) < u(a_2, b_2)$ (str. monoton)

Was ist mit (A6)?

Kann man diese Eigenschaft immer fordern?

„Standard s-Norm“

Satz:

Die Standardversion der Fuzzy Vereinigungsoperation

$$A(x) \cap B(x) = \max\{A(x), B(x)\}$$

ist die einzige idempotente s-Norm.

Beweis: (analog zur t-Norm)



s-Norm: Beispiele

Name	Funktion
Standard	$u(a, b) = \max\{a, b\}$
Algebraische Summe	$u(a, b) = a + b - ab$
Beschränkte Summe	$u(a, b) = \min\{1, a + b\}$
Drastische Vereinigung	$u(a, b) = \begin{cases} a & \text{für } b = 0 \\ b & \text{für } a = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Übrigens: Wie weist man s-Norm nach?
⇒ Axiome (A1) – (A4) überprüfen!

s-Norm: Charakterisierung

Satz:

$u : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ist s-Norm \Leftrightarrow
 \exists ansteigender Generator $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$u(a, b) = g^{(-1)}(g(a) + g(b)).$$



$g^{(-1)}(\cdot)$ ist Pseudo-Inverse zu Generator $g(\cdot)$

s-Norm: Generatoren

Beispiel: $g(a) = -\log_e(1 - a)$

- $g(0) = -\log(1) = 0$
- str. mon. steigend wg. $g'(a) = \frac{1}{1-a} > 0$ auf $(0, 1)$
- Inverse auf $[0, 1]$ ist $g^{-1}(a) = 1 - \exp(-a)$ auf $(0, 1)$, also

$$\begin{aligned}u(a, b) &= g^{-1}(-\log(1 - a) - \log(1 - b)) \\&= 1 - \exp(\log(1 - a) + \log(1 - b)) \\&= 1 - (1 - a)(1 - b) \\&= a + b - ab \quad (\text{algebraische Summe})\end{aligned}$$

Verallgemeinerte Fuzzy Operatoren

Wir wissen jetzt:

1. Verallgemeinerungen für Komplement, Schnittmenge und Vereinigung basieren auf Axiomensysteme
2. Verallgemeinerungen erzeugbar durch Generatoren
3. \exists jeweils überabzählbar viele Möglichkeiten zur Verallgemeinerung von Komplement, \cap und \cup

Frage:

Kann beliebige Kombination aus Komplement, t- und s-Norm verwendet werden?

Kombination verallgemeinerter Fuzzy Operatoren

Klassische Mengenlehre:

\cap - und \cup -Operation sind dual bzgl. Komplement, weil sie DEMORGANSche Gesetze erfüllen

Definition

Eine t-Norm $t(\cdot, \cdot)$ und s-Norm $s(\cdot, \cdot)$ werden *dual bzgl. dem Fuzzy-Komplement* genannt, wenn

$$c(t(a, b)) = s(c(a), c(b))$$

$$c(s(a, b)) = t(c(a), c(b))$$

für alle $a, b \in [0, 1]$.



Duale Tripel: Beispiele

Definition

Tripel (t, s, c) mit t und s dual zu c heißt *duales Tripel*. □

t-Norm	s-Norm	Komplement
$\min\{a, b\}$	$\max\{a, b\}$	c_s
$a b$	$a + b - a b$	c_s
$\max\{0, a + b - 1\}$	$\min\{1, a + b\}$	c_s

c_s : Standard Fuzzy-Komplement

Duale Tripel: Beispiel

Behauptung:

Sei $t(a, b) = ab$, $s(a, b) = a + b - ab$ und $c(a) = 1 - a$.

Dann ist (t, s, c) ein duales Tripel.

Beweis:

Wegen

$$s(c(a), c(b)) = (1-a) + (1-b) - (1-a)(1-b) = 1 - ab = c(t(a, b))$$

und

$$t(c(a), c(b)) = 1 - (a + b - ab) = (1 - a)(1 - b) = c(s(a, b))$$

sind die Morganschen Bedingungen erfüllt. □