UNIVERSITÄT DORTMUND

Wintersemester 2005/06

Fundamente der Computational Intelligence

(Vorlesung)

Prof. Dr. Günter Rudolph

Fachbereich Informatik

Lehrstuhl für Algorithm Engineering

Inhalt

Nachtrag: EP-Selektion (Beispiel für Verlust des Besten)

$\mu = \lambda = 2$ bei Minimierung, q = 2

Index	1	2	3	4
f(x)	12.3	1.9	4.2	8.1
Rang	4	1	2	3
Siege	0	2	2	2
Sortierrang	4	3	2	1
Auswahl	-	-	+	+

Annahme: Sortierung nach Anzahl der Siege mit „selection sort"

⇒ abhängig von Implementierung!

⇒ Lösung: Bestem **vorher** q+1 Siege zuweisen!

Schematischer Ablauf eines Evolutionären Algorithmus

	GA	ES	EP
Initialisierung der Population	x	x	x
repeat			
Reproduktionsselektion	x	–	–
Rekombination	x	x	–
Mutation	x	x	x
Überlebensselektion	–	x	x
until Abbruch			

Heute: Keine Unterscheidung zwischen GA/ES/EP, da Übergänge fließend

EA im $\mathbb{R}^n$

Selektion: unabhängig von Representation

Rekombination: k-Punkt-Crossover, Uniform Crossover
funktioniert auf allen Produkträumen!

zusätzlich:
Intermediäre Rekombination $z_i = \alpha_i\, x_i + (1-\alpha_i)\, y_i$, $\alpha_i \in (0,1)$

$\alpha_i \equiv \alpha$: auf Verbindungslinie zwischen x und y
sonst innerhalb des durch x und y definierten Hyperrechtecks

auch: Varianten mit > 2 Eltern

Mutation: additiv via Normalverteilung N(0, C), C Kovarianzmatrix
häufig: $C = \sigma^2 \cdot I_n$ oder individuelle σ_i

auch: Cauchyverteilung („Levy flights“) oder Mixturen

notwendig: Anpassung von C bzw. σ_i während Suche!

Optimierung ohne „Anpassen“ (reine Zufallssuche)

$f(x) = \| x \|^2 = x'x \to \min!$ wobei $x \in S_n(r) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \| x \| \le r \}$

Z_k ist gleichverteilt in $S_n(r)$

$X_{k+1} = Z_k$ falls $f(Z_k) < f(X_k)$, sonst $X_{k+1} = X_k$

$\Rightarrow V_k = \min \{ f(Z_1), f(Z_2), \ldots, f(Z_k) \}$ bester ZF-Wert bis Iteration k

$P\{ \| Z \| \le x \} = P\{ Z \in S_n(x) \} = \mathrm{Vol}(S_n(x)) / \mathrm{Vol}(S_n(r)) = (x / r)^n$, $0 \le x \le r$

$P\{ \| Z \|^2 \le x \} = P\{ \| Z \| \le x^{1/2} \} = x^{n/2} / r^n$, $0 \le x \le r^2$

$P\{ V_k \le x \} = 1 - (1 - P\{ \| Z \|^2 \le x \})^k = 1 - (1 - x^{n/2} / r^n)^k$

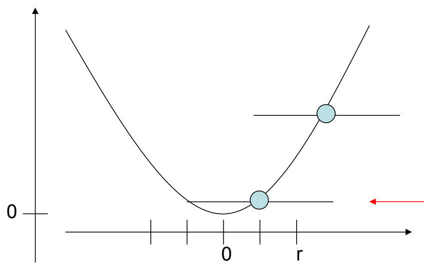
$E[V_k] \to r^2\, \Gamma(1 + 2/n)\, k^{-2/n}$ für große k

Optimierung ohne „Anpassen“ (lokal gleichverteilt)

$f(x) = \| x \|^2 = x'x \to \min!$ wobei $x \in S_n(r) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \| x \| \le r \}$

Z_k ist gleichverteilt in [-r, r], n = 1

$X_{k+1} = X_k + Z_k$ falls $f(X_k + Z_k) < f(X_k)$, sonst $X_{k+1} = X_k$



ab hier:
wie reine
Zufallssuche!

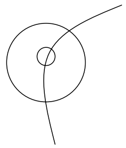
(1+1)-EA mit Schrittweitenanpassung (1/5-Erfolgsregel, Rechenberg 1973)

Idee:

• Wenn viele erfolgreiche Mutationen, dann Schrittweite zu klein.

• Wenn wenige erfolgreiche Mutationen, dann Schrittweite zu groß.

bei infinitesimal
kleinem Radius ist
Erfolgsrate = 1/2



Ansatz:

• Protokolliere erfolgreiche Mutationen in gewissem Zeitraum

• Wenn Anteil größer als gewisse Schranke (z. B. 1/5),
dann Schrittweite erhöhen,
sonst Schrittweite verringern

Schrittweite?

Normalverteilter Vektor $Z = N(0, \sigma^2 I_n)$ hat zufällige Länge $|| Z ||$

Man kann zeigen: $E[\, || Z || \,] \approx \sigma \, (n - ½)^{½}$ mit Varianz von etwa $\sigma^2 / 2$

Definition:

Zufallsvektor $X = (x_1, \ldots, x_n)$ sphärisch verteilt
wenn X für jede orthonormale Matrix T
die gleiche Verteilung wie TX besitzt (also rotationsinvariant ist). ■

Satz:

$X = (x_1, \ldots, x_n)$ sphärisch verteilt gdw. $X = r \cdot U$, wobei

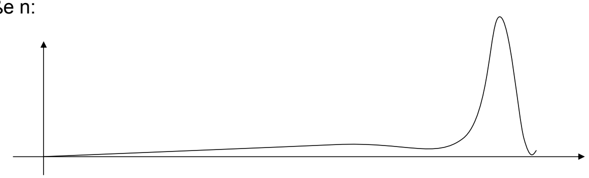
r nicht negative Zufallsvariable,

U n-dim. Zufallsvektor gleichverteilt auf Kugelrand und

= im Sinne von „gleich in Verteilung" ■

Wenn Zufallsschrittweite r wie $\chi_n(\sigma)$-verteilt, dann X normalverteilt $N(0, \sigma^2 I_n)$

Für große n:



$\Rightarrow$ Normalverteilung verhält sich ähnlich wie Kugelrandverteilung!

$\Rightarrow$ fast alle sphärischen Verteilungen verhalten sich für große n ähnlich!

fast alle? alle mit finiter Varianz!

Analyse

$(1, \lambda)$-EA mit $f(x) = || x ||^2$

$$
\begin{aligned}
|| Y_k ||^2 &= || X_k + r_k U_k ||^2 = (X_k + r_k U_k)' (X_k + r_k U_k) \\
&= X'_k X_k + 2 r_k X'_k U_k + r_k^2 U'_k U_k \\
&= ||X_k||^2 + 2 r_k X'_k U_k + r_k^2 \underbrace{||U_k||^2}_{=1} = ||X_k||^2 + 2X'_k U_k + r_k^2
\end{aligned}
$$

da das zufällige Skalarprodukt x'U die gleiche Verteilung hat wie ||x|| B,

wobei Zufallsvariable B betaverteilt mit Parametern (n-1)/2 auf [-1, 1] ist, folgt

$|| Y_k ||2 = || X_k ||^2 + 2 r_k \, || X_k || \, B + r_k^2$

da der $(1,\lambda)$ den besten Wert aus λ Versuchen selektiert, folgt
$|| X_{k+1} ||^2 = || X_k ||^2 + 2 r_k \, || X_k || \, B_{1:\lambda} + r_k^2$

$|| X_{k+1} ||^2 = || X_k ||^2 + 2 r_k \, || X_k || \, B_{1:\lambda} + r_k^2$

$\downarrow$ bedingte Erwartungswerte auf beiden Seiten

$E|| X_{k+1} ||^2 = || X_k ||^2 + 2 r_k \, || X_k || \, E[\, B_{1:\lambda} \,] + r_k^2$

$\downarrow$ Ansatz: $r_k = \gamma \, || X_k ||$

$E|| X_{k+1} ||^2 = || X_k ||^2 + 2 \gamma \, || X_k ||^2 \, E[\, B_{1:\lambda} \,] + \gamma^2 \, || X_k ||^2$

$\downarrow$ wg. Symmetrie von B folgt $E[B_{1:\lambda}] = - E[B_{\lambda:\lambda}] < 0$

$$
\begin{aligned}
E|| X_{k+1} ||^2 &= || X_k ||^2 - 2 \gamma \, || X_k ||^2 \, E[\, B_{\lambda:\lambda} \,] + \gamma^2 \, || X_k ||^2 \\
&= || X_k ||^2 \, (1 - 2\gamma \, E[B_{\lambda:\lambda}] + \gamma^2)
\end{aligned}
$$

Parabelscheitel bei $\gamma^* = E[B_{\lambda:\lambda}]$, also $E|| X_{k+1} ||^2 = || X_k ||^2 \, (1 - E[B_{\lambda:\lambda}]^2)$