UNIVERSITÄT DORTMUND

Wintersemester 2005/06

Fundamente der Computational Intelligence

(Vorlesung)

Prof. Dr. Günter Rudolph
Fachbereich Informatik
Lehrstuhl für Algorithm Engineering

Kapitel 2: Fuzzy Systeme

Inhalt

- Fuzzy Mengen ☑
- Fuzzy Relationen ☑
- Fuzzy Logik ☑
- Approximatives Schließen (Teil 1)
- Approximatives Schließen (Teil 2) ⟶ Heute
- Fuzzy Regelung ⟶ Freitag
- …

Approximatives Schließen (Teil 2)

Bisher:

- p: IF *X* ist A THEN *Y* ist B

  → R(x, y) = Imp(A(x), B(y)) Regel als Relation; Fuzzy Implikation

- Regel: IF *X* ist A THEN *Y* ist B
  Fakt: *X* ist A'
  Folgerung: *Y* ist B'

  → $B'(y) = \sup_{x \in X} t(A'(x), R(x, y))$ Kompositionsregel der Inferenz

Also:

- $B'(y) = \sup_{x \in X} t(A'(x), \text{Imp}(A(x), B(y)))$

Approximatives Schließen (Teil 2)

Hier:

$$A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\boxed{\text{scharfe Eingabe!}}$

$$B'(y) = \sup_{x \in X} t(A'(x), \text{Imp}(A(x), B(y)))$$

$$= \begin{cases} \sup\limits_{x \neq x_0} t(0, \text{Imp}(A(x), B(y))) & \text{für } x \neq x_0 \\ t(1, \text{Imp}(A(x_0), B(y))) & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq x_0 & \text{da } t(0, a) = 0 \\ \text{Imp}((A(x_0), B(y)) & \text{für } x = x_0 & \text{da } t(a, 1) = a \end{cases}$$

Approximatives Schließen (Teil 2)

Lemma:

a) $t(a, 1) = a$

b) $t(a, b) \le \min \{ a, b \}$

c) $t(0, a) = 0$

Beweis:

ad a) Identisch zu Axiom 1 für t-Normen.

ad b) Aus Monotonie (Axiom 2) folgt für $b \le 1$, dass $t(a, b) \le t(a, 1) \overset{\text{wg. a)}}{=} a$.
Wg. Kommutativität aus Axiom 3 und Monotonie folgt für $a \le 1$, dass $t(a, b) = t(b, a) \le t(b, 1) = b$. Also ist $t(a, b)$ sowohl kleiner oder gleich a als auch b, woraus sofort $t(a, b) \le \min \{ a, b \}$ folgt.

ad c) Mit b) folgt $0 \le t(0, a) \le \min \{ 0, a \} = 0$ und damit $t(0, a) = 0$. ■

Approximatives Schließen (Teil 2)

Mehrere Regeln:

IF X ist A_1, THEN Y ist B_1 → $R_1(x, y) = Imp_1(A_1(x), B_1(y))$
IF X ist A_2, THEN Y ist B_2 → $R_2(x, y) = Imp_2(A_2(x), B_2(y))$
IF X ist A_3, THEN Y ist B_3 → $R_3(x, y) = Imp_3(A_3(x), B_3(y))$
… …
IF X ist A_n, THEN Y ist B_n → $R_n(x, y) = Imp_n(A_n(x), B_n(y))$
X ist A'

Y ist B'

Mehrere Regeln bei <u>scharfer Eingabe</u>: x_0 gegeben

$$\left.\begin{array}{l} B_1'(y) = Imp_1(A_1(x_0), B_1(y)) \\ \dots \\ B_n'(y) = Imp_n(A_n(x_0), B_n(y)) \end{array}\right\}$$

Aggregation der Teilregeln bzw. lokalen Inferenzen notwendig!

Maximumbildung! $\Rightarrow$ $B'(y) = \max \{ B_1'(y), \dots, B_n'(y) \}$

Approximatives Schließen (Teil 2)

<u>**FITA**: "**F**irst **i**nference, **t**hen **a**ggregate!"</u>

1. Jede Regel der Form IF *X* ist A_k THEN *Y* ist B_k durch geeignete Wahl einer unscharfen Implikation $Imp_k(\cdot, \cdot)$ in Relation R_k überführen:
$R_k(x, y) = Imp_k(A_k(x), B_k(y))$.
2. Berechne $B_k'(y) = R_k(x, y) \circ A'(x)$ für alle k = 1, …, n (lokale Inferenz).
3. Aggregiere zu $B'(y) = \beta(B_1'(y), \dots, B_n'(y))$.

<u>**FATI**: "**F**irst **a**ggregate, **t**hen **i**nference!"</u>

1. Jede Regel der Form IF *X* ist A_k THEN *Y* ist B_k durch geeignete Wahl einer unscharfen Implikation $Imp_k(\cdot, \cdot)$ in Relation R_k überführen:
$R_k(x, y) = Imp_k(A_k(x), B_k(y))$.
2. Aggregiere $R_1, \dots, R_n$ zu einer **Superrelation** mit Aggregierungsfkt. **$\alpha(\cdot)$:**
$R(x, y) = \alpha(R_1(x, y), \dots, R_n(x, y))$.
3. Berechne $B'(y) = R(x, y) \circ A'(x)$ bzgl. Superrelation (Inferenz).

Approximatives Schließen (Teil 2)

1. Welches Prinzip ist besser? FITA oder FATI?

2. Äquivalenz von FITA und FATI ?

FITA:
$$\begin{aligned} B'(y) &= \beta(B_1'(y), \dots, B_n'(y)) \\ &= \beta(R_1(x, y) \circ A'(x), \dots, R_n(x, y) \circ A'(x)) \end{aligned}$$

FATI:
$$\begin{aligned} B'(y) &= R(x, y) \circ A'(x) \\ &= \alpha(R_1(x, y), \dots, R_n(x, y)) \circ A'(x) \end{aligned}$$

Approximatives Schließen (Teil 2)

Spezialfall:

$$A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

scharfe Eingabe!

Zur Äquivalenz von FITA und FATI:

FITA:

$$\begin{aligned} B'(y) &= \beta(\, B_1'(y), \ldots, B_n'(y)\,) \\ &= \beta(\, Imp_1(A_1(x_0), B_1(y)\,), \ldots, Imp_n(A_n(x_0), B_n(y)\,)\,) \end{aligned}$$

FATI:

$$\begin{aligned} B'(y) &= R(x, y) \circ A'(x) \\ &= \sup_{x \in X} t(\, A'(x), R(x, y)\,) \qquad \text{(ab jetzt: Spezialfall)} \\ &= R(x_0, y) \\ &= \alpha(\, Imp_1(\, A_1(x_0), B_1(y)\,), \ldots, Imp_n(\, A_n(x_0), B_n(y)\,)\,) \end{aligned}$$

Offensichtlich: sup-t-Komposition mit beliebiger t-Norm und **$\alpha(\cdot) = \beta(\cdot)$**

Approximatives Schließen (Teil 2)

- **UND-gekoppelte Prämissen**

IF $X_1 = A_{11}$ AND $X_2 = A_{12}$ AND … AND $X_m = A_{1m}$ THEN $Y = B_1$
…
IF $X_n = A_{n1}$ AND $X_2 = A_{n2}$ AND … AND $X_m = A_{nm}$ THEN $Y = B_n$

zusammenfassen zu einer Prämisse je Regel k:

$A_k(x_1,\ldots, x_m) = \min \{\, A_{k1}(x_1), A_{k2}(x_2), \ldots, A_{km}(x_m)\, \}$ oder allgem.: t-Norm

- **ODER-gekoppelte Prämissen**

IF $X_1 = A_{11}$ OR $X_2 = A_{12}$ OR … OR $X_m = A_{1m}$ THEN $Y = B_1$
…
IF $X_n = A_{n1}$ OR $X_2 = A_{n2}$ OR … OR $X_m = A_{nm}$ THEN $Y = B_n$

zusammenfassen zu einer Prämisse je Regel k:

$A_k(x_1,\ldots, x_m) = \max \{\, A_{k1}(x_1), A_{k2}(x_2), \ldots, A_{km}(x_m)\, \}$ oder allgem.: s-Norm

Approximatives Schließen (Teil 2)

- **Beispiele:** An der Tafel …